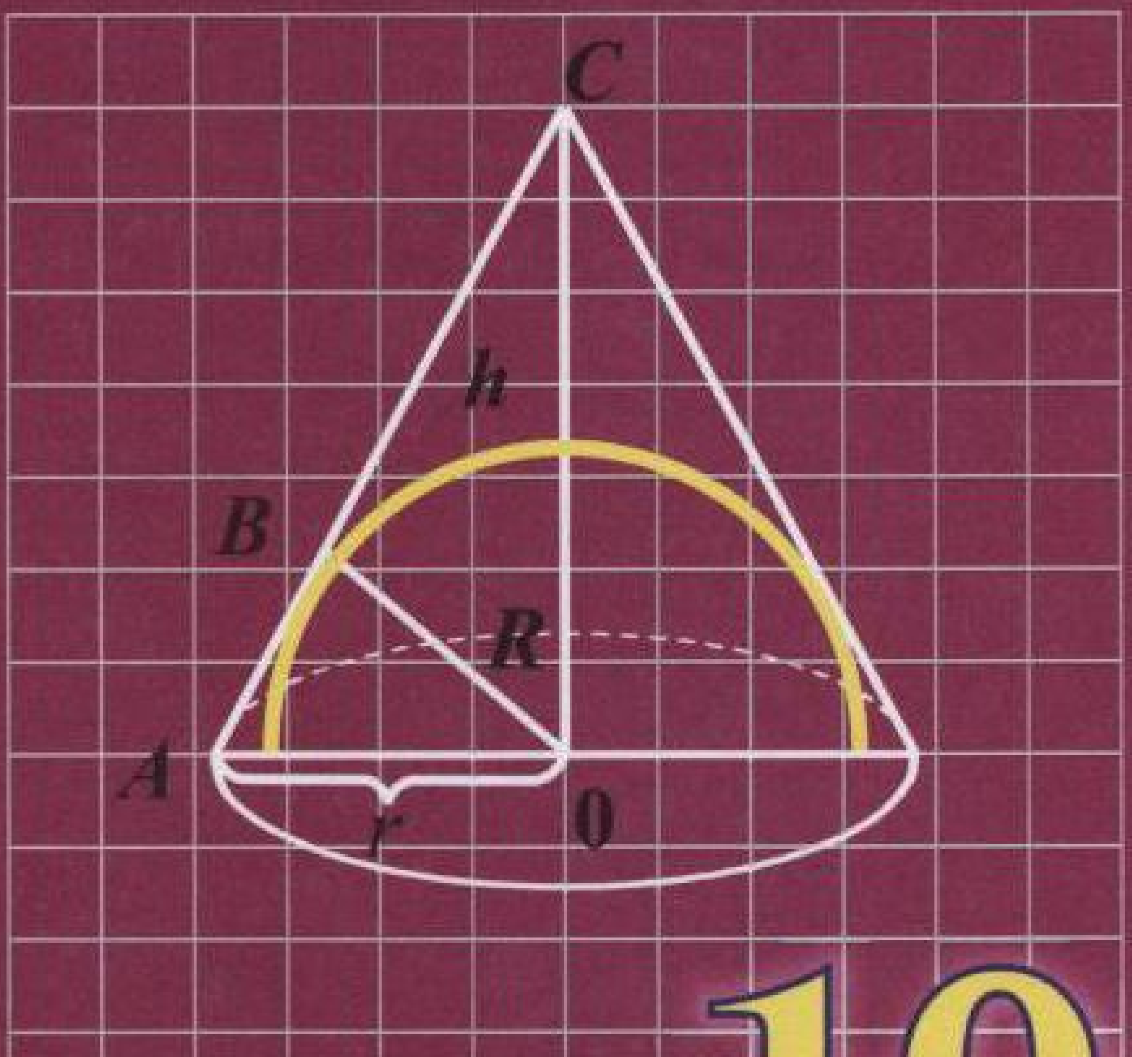
Ғуломов И., Акбаров Р., Изатуллоев К.,
Ҳалимов Ғ., Маҳмудов Т.

АЛГЕБРА

ВА ИБТИДОИ АНАЛИЗ



10

Ғуломов И., Акбаров Р., Изатуллоев К.,
Ҳалимов Ғ., Маҳмудов Т.

Алгебра
ва ибтидои анализ

Китоби дарсӣ барои синфи 10

Мушоварам Вазорати маорифи Ҷумҳурии Тоҷикистон ба чоп тавсия кардааст.

Душанбе
ОПЕК
2005

Сарсухан

Хонандагони азиз!

Шумо ба омӯзиши фанни «Алгебра ва ибтидои анализ» шурӯъ мекунед, ки вай мантикан давоми фанни «Алгебра» мебошад. Ҳангоми омӯзиш Шумо ба мафҳумҳои нав, ба монанди дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ, муодила ва системаи муодилаҳои ирритсионалӣ, муодила ва системаи муодилаҳои тригонометрӣ, мафҳуми асосбунёди анализ - ҳосила ва татбиқи он шинос мешавед. Дар қатори тарзҳои хусусии ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарини функсияҳо оид ба методи умумии маълум намудани онҳо маълумот мегиред. Шумо мефаҳмед, ки бо зарурияти ҳал кадани ягон масъалаи муайян методҳои умумии ҳалли онҳо ба вуҷуд омада, минбаъд инкишоф меёбанд. Бинобар ин аз ибтидо то интиҳои китоб Шумо ба ибораи «методи математикӣ» дучор мешавед. Татбиқи методҳои математикӣ дар омӯзиши назария ва ҳалли масъалаҳо боварии Шуморо барои амиқ аз худ намудани математика зиёд мекунад.

Китоб аз 5 боб иборат буда, бобҳо ба параграфҳо тақсим мешаванд. Ҳар боб аз гузориши масъала оғоз меёбад. Дар онҳо зарурати омӯзиши мафҳумҳо ва ё масъалаҳое, ки ба пайдоиши ин ё он мафҳум мусоидат намудаанд, ифода ёфтааст. Баъди ҳар як параграф саволҳои **назоратӣ** ва машқҳо зери аломати $\boxed{?}$ ҷой дода шудаанд. Онҳо ёдовар мешаванд, ки кадом мафҳумҳо ва аломатҳои асосӣ дар ин параграфҳо баён ёфтаанд. Интиҳои ҳар як боб аз гӯшаи – «Худро санҷед», корҳои амалӣ, супоришҳои мустақилона ва машқҳои иловагӣ иборат аст.

Маводҳои гӯшаи «Худро санҷед» барои омӯзиши мустақилона, эҷоду бунёдкорӣ ва «кашф» - и хурди асрорҳои математикӣ тавсия шудаанд. Барои ҳар як боб машқҳо алоҳида рақамгузорӣ шудааст. Дар аксарияти машқҳо се дараҷаи азхудкунӣ ба инобат гирифта шуда, онҳо дар се вариант (1 - дараҷаи ҳатмии талабот, 2 – дараҷаи хуби азбаркунии маводи таълимӣ дар ҳаҷми пурра ва 3 – дараҷаи баланд, ки ба синфҳои равияи риёзӣ дошта мувофиқ меояд) дода шудаанд. Супоришҳои мустақилона низ аз се дараҷаи талабот иборат мебошанд.

Маводҳои илова бо рамзи ишорат ёфтааст. Рамзи зарурати дар хотир нигоҳ доштани таърифҳоро мефаҳмонад. Таърихи пайдоиш ва инкишофи ҳар як мафҳум хотимаи бобро ташкил медиҳад. Ҳарчанд омӯхтани ин маводҳо шарт набошад ҳам, вале хонандаи ҷӯянда аз онҳо маълумотҳои зиёди таърихӣ ва иловагиро дарёфт карда метавонад. Дар китоб саҳми математикони замони Сомониён ва хусусан халқҳои Осиёи Миёна дар инкишофи алгебра ва тригонометрия мавкеъи хосаро ёфтааст. Мазмуни асосии китобро тасвирҳо (графикҳо, расмҳо ва схемаҳо) бо тафсил шарҳ медиҳад.

Муаллифон

БОБИ I. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ ВА СИСТЕМАИ ОНҲО

Шумо ба дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ ва хосиятҳои он шинос ҳастед. Ин хосиятҳо имкон медиҳанд, ки табдилдиҳиҳои айниятии ифодаҳо ба амал оварда шуда, ҳисоббарориҳои онҳо содда ва ададҳо байни ҳамдигар муқоиса карда шаванд.

Аз ин рӯ, баъди такрори дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ Шумо ба дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ ва хосиятҳои он шиносоӣ пайдо мекунед. Омӯзиши дараҷа бо нишондиҳандаи ирратсионалӣ бошад барои аз худ намудани муодилаҳои ирратсионалӣ ва системаи онҳо замина бунёд мекунад.

Муодила яке аз мафҳумҳои асосии курси математикаи мактабӣ ба ҳисоб меравад, зеро ҳалли масъалаҳои зиёди амалӣ ба тартиб додан ва ҳал кардани муодилаҳо оварда мерасонад. Бар замми он, масъалаҳои зиёде мавҷуданд, ки аз рӯи мазмун гуногун буда, онҳо ба соҳаҳои мухталифи фаъолияти инсонӣ мутааллиқанд ва ба намудҳои маълуми муодилаҳо оварда мерасонанд. Ҳал карда тавонистани намудҳои маълуми муодилаҳо имконият медиҳад, ки гурӯҳи зиёди масъалаҳо ҳал карда шаванд. Методи муодилаҳо яке аз методҳои донистa гирифтани дунёи ҳақиқӣ ҳисоб мешавад. Дар ин боб Шумо тарзҳои ҳалли муодилаҳои ирратсионаӣ ва системаи онҳоро меомӯзед.

§1. Мафҳуми дараҷаи нишондиҳадааш ирратсоналӣ

Ба шумо дараҷаи нишодиҳандааш ратсионалӣ ва хосиятҳои он аз синфи 9 маълум аст. Бори дигар онҳоро ба хотир меорем:

Дараҷаи адади $a>0$ - и нишондиҳандааш ратсионалии $r=\frac{m}{n}$ гуфта адади $\sqrt[n]{a^m}$ -ро меноманд; дар ин ҷо m - адади бутун ва n - адади натуралӣ $(n>1)$.

Менависем:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Ҳангоми $a = 0$ будан дараҷа фақат барои нишондиҳандаҳои мусбат муайян аст. Мувофиқи таъриф барои $r > 0$ - и дилхоҳ $0^r = 0$ аст.

Барои ҳаргуна ду адади ратсионалии r ва s ва ададҳои мусбати дилхоҳи a ва b хосиятҳои зерин ҷой доранд:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ 2. $a^r : a^s = a^{r-s}$ 3. $(a^r)^s = a^{rs}$

4. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$ 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

6. Агар $0 < a < b$ бошад, ҳангоми $r > 0$ будан $a^r < b^r$ ва ҳангоми $r < 0$ будан $a^r > b^r$ аст.

7. Аз $r > s$ бармеояд, ки ҳангоми $a > 1$ будан $a^r > a^s$ ва ҳангоми $0 < a < 1$ будан $a^r < a^s$ аст.

Акнун дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалиро муайян менамоем.

Бигузор a - ягон адади мусбат ва α - адади ирратсионалӣ бошад. Ёдовар мешавем, ки касрҳои даҳии беохири ғайридаврӣ ададҳои ирратсионалиро ташкил медиҳанд. Масалан, $\alpha = \pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$

Пас, мувофиқи таърифи дараҷа a^α - дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ мебошад.

Ҳолати $a > 1$ - ро муоина мекунем.

Барои намуна адади $3^{\sqrt{2}}$ - ро дида мебароем: дар ин ҷо $a = 3 > 1$ ва нишондиҳандаи дараҷа $\alpha = \sqrt{2}$ - адади ирратсионалӣ мебошад.

Маълум аст, ки $\sqrt{2} = 1{,}414213... = a_0, a_1a_2a_3a_4...a_n ...$

Акнун наздикшавии дахии адади $\sqrt{2}$-ро бо норасой r_n ва бо зиёдатӣ r'_n тартиб медиҳем:

$$r_n = a_0, a_1a_2...a_{n-1}a_n;$$

$$r'_n = a_0, a_1a_2...a_{n-1}a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Якчанд аъзоҳои аввалаи ин пайдарпаиҳоро менависем:

$$r_n: 1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;...$$

$$r'_n: 2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ 1{,}41422;...$$

Он гоҳ барои ду пайдарпаии дараҷаҳо навишта метавонем:

$$3^1;\ 3^{1,4};\ 3^{1,41};\ 3^{1,414};...;\ 3^{r_n};...$$

$$3^2;\ 3^{1,5};\ 3^{1,42};\ 3^{1,415};...;\ 3^{r'_n};...$$

қиматҳои ин дараҷаҳоро дар компютер (калкулятор) ҳисоб карда, мувофиқи хосияти 7-уми дараҷа бо нишондиҳандаи ратсионалӣ меёбем, ки:

$$3^1 = 3 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2 = 9;$$

$$3^{1,4} \approx 4{,}6555367 < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5} \approx 5{,}1961524;$$

$$3^{1,41} \approx 4{,}7069650 < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,42} \approx 4{,}7589613;$$

$$3^{1,414} \approx 4{,}7276950 < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,415} \approx 4{,}7328917;$$

$$3^{1,4142} \approx 4{,}7287339 < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,4143} \approx 4{,}7292534;$$

$$3^{1,41421} \approx 4{,}7287858 < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,41422} \approx 4{,}7288378;$$

....

$$3^{r_n} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{r'_n}$$ мешавад.

Қимати $3^{\sqrt{2}}$, ки дар компютер (ё калкулятор) ҳисоб карда шудааст, чунин мебошад: $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}7288$.

Ба ҳамин тариқ, ҳангоми $a>1$ ва $\alpha>0$ будан дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалии a^{α} ададе мебошад, ки аз ҳамаи ададҳои намуди a^{r_n} калон ва аз ҳамаи ададҳои намуди $a^{r'_n}$ хурд аст, яъне $a^{r_n}<a^{\alpha}<a^{r'_n}$. Дар ин ҷо r_n ва r'_n қиматҳои тақрибии α бо норасоӣ ва бо зиёдатӣ бо ягон саҳеҳии дода шуда мебошанд.

Ҳангоми $0<a<1$ будан, $a^{r_n}>a^{\alpha}>a^{r'_n}$ аст.

Агар $\alpha<0$ бошад, $a^{-\alpha}=\dfrac{1}{a^{\alpha}}$ мешавад. Қайд менамоем, ки

адади a^{α} ҳамеша мусбат буда, он ягона аст. Ғайр аз ин, барои α -и дилхоҳ $1^{\alpha}=1$ ва $0^{\alpha}=0$ $(\alpha>0)$ мебошад.

Аз хосиятҳои нишондиҳанда натиҷа мебарояд, ки дараҷаи адад бо нишондиҳандаи дилхоҳи ҳақиқӣ муайян буда, барои он хосиятҳои 1-7 ҷой доранд.

?

1. Ба калимаҳо, ибораҳо ва рамзҳои дар матн оварда шуда эътибор диҳед: дараҷа, адади ирратсионалӣ, дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ ва a^{α}.
2. Адади ратсионалӣ чист?
3. Таърифи дараҷаи нишондиҳандааш растионалиро баён кунед ва хосиятҳои асосии онро гӯед.
4. Адади ирратсионалӣ чист?
5. Дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ чӣ маъно дорад ва онро чӣ тавр муайян мекунанд?
6. Хосиятҳои дараҷаи нишондиҳандааш адади ҳақиқиро номбар намоед.

Машқҳо

1°. Қимати ифодаҳои зеринро бо саҳеҳии то 0,1 (бо ёрии компютер, калкулятор ё ҷадвал) ҳисоб кунед:

а) $5^{1,4}$ ва $5^{1,5}$; б) $5^{1,41}$ ва $5^{1,42}$;

в) $5^{1,414}$ ва $5^{1,415}$; г) $5^{2,23}$ ва $5^{2,24}$.

Ҳисоб кунед (2°–3):

2°. а) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; б) $3^{1-2\sqrt{3}} \cdot 9^{1+\sqrt{3}}$;

в) $8^{\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}}$; г) $\left(3^{\sqrt[5]{8}}\right)^{\sqrt[5]{4}}$.

3. а) $32^{\sqrt{2}} : 2^{5\sqrt{2}}$; б) $\left(5^{\sqrt[3]{9}}\right)^{\sqrt[3]{3}}$;

в) $27^{2-2\sqrt{3}} \cdot 9^{1+\sqrt{3}}$; г) $\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{3}}$.

4*. Қимати ифодаи $2^{\sqrt{5}}$-ро бо саҳеҳии то 0,01 (аз компютер истифода карда) ҳисоб кунед.

Аз компютер ва хосиятҳои дараҷа истифода карда ададҳоро муқоиса кунед (5°–6):

5°. а) $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$ ва $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2,1}$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2,2}$;

в) $2^{0,4}$ ва $2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$; г) $1,2^{-\sqrt{3}}$ ва $1,2^{\sqrt{5}}$.

6. а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ ва 1; б) $3^{-\sqrt{12}}$ ва $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,8}$;

в) $2,5^{-\sqrt{2}}$ ва 1; г) $0,3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ ва $0,3^{\frac{1}{3}}$.

Ифодаҳоро содда кунед (7–8*):

7. а) $\left(a^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}$; б) $a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$;

в) $x^3 \cdot \sqrt[4]{x^2 : x^{4\pi}}$; г) $y^{\sqrt{2}} \cdot y^{1,3} : \sqrt{y^{3\sqrt{2}}}$

8*. а) $\dfrac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}\right)^2} + 1$; б) $\dfrac{\left(a^{2\sqrt{3}} - 1\right)\left(a^{2\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}} + a^{3\sqrt{3}}\right)}{a^{4\sqrt{3}} - a^{\sqrt{3}}}$;

в) $\dfrac{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$;   г) $\sqrt{(x^{\pi}+y^{\pi})^2-4(xy)^{\pi}}$.

§ 2. Муодилаҳои ирратсионалӣ

Таъриф. Муодилаҳое, ки дар онҳо тағйирёбанда дар зери аломати реша омадааст, муодилаҳои ирратсионалӣ ном доранд.

Масалан, муодилаҳои 1) $\sqrt{x-2}=0$; 2) $\sqrt[3]{x}-3=0$;

3) $\sqrt{x^2-3}=\sqrt{2x}$; 4) $\sqrt{x-5}=\sqrt{3-x}$; 5) $\sqrt{x-2}=x-8$;

6) $\sqrt{x-3}-6=\sqrt[4]{x-3}$ ва 7) $\sqrt{x}=-2$ ирратсионалианд.

Ҳалли муодилаҳои ирратсионалӣ дар натиҷаи пай дар пай иваз намудани онҳо ба муодилаҳои баробарқувваи оддитарин ба амал оварда мешавад.

Муодилаҳои болоро ҳал мекунем.

1) $\sqrt{x-2}=0$. Ҳар ду тарафи муодиларо ба квадрат бардошта ҳосил мекунем: $x-2=0$. Аз ин ҷо: $x=2$. Месанҷем: $\sqrt{2-2}=0$. Пас, $x=2$ ҳалли муодила мебошад.

2) $\sqrt[3]{x}-3=0$. Аъзои муодила (- 3)-ро аз тарафи чап ба тарафи рост бо аломати муқобил гузаронида муодилаеро ҳосил мекунем, ки ба муодилаи додашуда баробарқувва мебошад: $\sqrt[3]{x}=3$.

Ҳар ду тарафи муодиларо ба куб бардошта меёбем: $x=27$. Месанҷем: $\sqrt[3]{27}-3=0$; $3-3=0$.

Ҷавоб: $x=3$.

3) $\sqrt{x^2-3}=\sqrt{2x}$. Решаи квадратӣ ҳамон вақт маъно дорад, ки агар ифодаи зери реша ғайриманфӣ бошад, яъне $x^2-3\geq 0$ ва $2x\geq 0$.

Аз системаи нобаробарихои $\begin{cases} x^2 - 3 \ge 0, \\ 2x \ge 0 \end{cases}$ меёбем, ки $x \ge \sqrt{3}$

ва фосилаи $\left[\sqrt{3};\ \ +\infty\right)$ соҳаи қиматҳои имконпазири муодила аст. Ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат бардошта пайдо мекунем: $x^2 - 3 = 2x$. Аз ин ҷо: $x^2 - 2x - 3 = 0$. Решаҳои ин муодила $x_1 = -1$ ва $x_2 = 3$ мебошанд.

Месанҷем. қимати $x = -1$-ро ба муодила мегузорем: $\sqrt{(-1)^2 - 3} = \sqrt{2 \cdot (-1)}$. Ҳарду қисми баробарӣ муайян нестанд, пас $x_1 = -1$ решаи муодила шуда наметавонад. Агар дар муодила решаи $x_2 = 3$-ро гузорем, баробарии дуруст ҳосил мешавад: $\sqrt{3^2 - 3} = \sqrt{2 \cdot 3}$ ё $\sqrt{6} = \sqrt{6}$. Пас, $x = 3$ решаи муодила мебошад.

Ҷавоб: $x = 3$.

Маълум мешавад, ки ҳангоми ҳалли муодилаҳои ирратсионалӣ решаҳои бегона пайдо шуданашон мумкин аст. Бинобар ин, ҳар яке аз решаҳои ёфташударо аввал санҷида баъд ҷавоби муодилаи додашударо навиштан лозим аст. Решаҳои бегона бошад, ҳангоми ду тарафи муодиларо ба квадрат бардоштан пайдо мешавад, яъне $(-a)^2 = a^2$, аммо $-a \ne a$ мебошад.

4) $\sqrt{x-5} = \sqrt{3-x}$. Соҳаи қиматҳои имконпазири муодиларо маълум мекунем:

$$\begin{cases} x - 5 \ge 0, \\ 3 - x \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 5, \\ x \le 3. \end{cases}$$

Аз ин ҷо дидан душвор нест, ки муодилаи дода шуда ҳал надорад, зеро буриши маҷмӯи ҳалҳои нобаробариҳои система холӣ аст.

Ҳамин тавр муодиларо ҳал накарда аз рӯи соҳаи қиматҳои имконпазири муодила муқаррар намудем, ки муодила дорои реша нест.

Ҷавоб: муодила ҳал надорад.

5) $\sqrt{x-2}=x-8$. Муодилаи дода шуда ба системаи

$$\begin{cases} x-2=(x-8)^2, \\ x-8\ge 0 \end{cases}$$ баробарқувва аст.

Муодилаи якуми системаро ҳал мекунем.

$$x-2=(x-8)^2 \Rightarrow x^2-17x+66=0.$$

Ҳалли он: $x_1=6$ ва $x_2=11$

Санҷиш. Шарти $x-8\ge 0$ барои $x=6$ ҷой надорад. Бинобар ин, муодила як реша дорад: $x=11$.

Ҷавоб: $x=11$.

6) $\sqrt{x-3}-6=\sqrt[4]{x-3}$. Гузориши $u=\sqrt[4]{x-3}$-ро истифода бурда, ҳосил мекунем: $u^2-u-6=0$. Ин муодила дорои ҳалҳои $u_1=2$ ва $u_2=3$ мебошад. Акнун қиматҳои x-ро меёбем:

$$\sqrt[4]{x-3}=-2,\ \ x-3=(-2)^4,\ \ x=19$$

$$\sqrt[4]{x-3}=3,\ \ x-3=3^4,\ \ x=84$$

Месанҷем. Решаи $x=19$ ҳалли муодила шуда наметавонад, чунки $\sqrt{19-3}-6=\sqrt[4]{19-3}$, $4-6=2$ ва $-2\ne 2$.

Пас, $x=84$ ҳалли муодила мебошад.

Ҷавоб: $x=84$.

7) $\sqrt{3x}=-2$. Қимати решаи арифметикӣ адади манфӣ шуда наметавонад, бинобар ин муодила ҳал надорад.

?

1. Ба ибораи муодилаи ирратсионалӣ ва рамзи $\sqrt{x}$ эътибор диҳед.
2. Муодилаи ирратсионалӣ чист?
3. Ҳалҳои бегонаи муодилаи ирратсионалӣ чӣ маъно дорад?

Машқҳо

Муодилаҳоро ҳал намоед (9°–21^{*}):

9°. (Шифоҳӣ) а) $\sqrt{x}=3$; б) $\sqrt{x}=7$; в) $\sqrt{x+2}=3$; г) $\sqrt{x-1}=2$.

10°. а) $\sqrt{x^2-7}=3$; б) $\sqrt[3]{x+3}=2$; в) $\sqrt[4]{x-3}=2$; г) $\sqrt{x+3}=2$.

11°. а) $\sqrt[3]{x+2}=3$; б) $\sqrt{x-1}=7$; в) $\sqrt{20-x^2}=16$; г) $\sqrt{x^2+36}=10$.

12. а) $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}$; б) $\sqrt{x}=x-2$; в) $\sqrt{x-2}=\dfrac{x}{3}$; г) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+3}=0$.

13. а) $x-\sqrt{x+1}=1$; б) $\sqrt{x+1}=x-5$; в) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x-2}$; г) $\sqrt{x-1}=3-x$.

14. а) $\sqrt{x^2+5x-3}=\sqrt{x}$; б) $\sqrt{2x-1}=x-2$; в) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$; г) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$.

15. а) $\sqrt{5-x}=x-5$; б) $1+\sqrt{4x+5}=2x+2$; в) $x-2=\sqrt{4-2x}$; г) $\sqrt[3]{x+\sqrt{x-1}}=1$.

16. а) $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$; б) $x+1=\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}$; в) $3+\sqrt{3x+1}=x$; г) $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{x+9}$.

17. а) $21+\sqrt{2x-7}=x$; б) $\sqrt{16-\sqrt{x+1}}=4$; в) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=2$; г) $\sqrt{x-15}-\sqrt{12-x}=3$.

18. а) $\sqrt{11x-2}+3\sqrt{x}=6$; б) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1}$; в) $\sqrt{x+5}=\sqrt{4x+9}-\sqrt{x}$; г) $\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1$.

19. а) $\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4;$ б) $2+\sqrt{10-x}=\sqrt{22-x};$

в) $\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-3};$ г) $\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}=\dfrac{2-x}{2+x}.$

20*. а) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=27-x;$ б) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1;$

в) $3\sqrt[10]{x^2-3}+\sqrt[5]{x^2-3}=4;$ г) $\sqrt{x-3}-6=\sqrt[4]{x-3}.$

21*. а) $x\sqrt{3x^2+13}-\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{3x^2+13}=2;$ б) $\dfrac{x+6}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x+2};$

в) $\sqrt[3]{x+44}-\sqrt[3]{x-19}=3;$ г) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$

§ 3. Системаи муодилаҳои ирратсионалӣ

Акнун тарзҳои ҳалли системаи муодилаҳои ирратсионалиро дида мебароем.

Ҳалли системаи муодилаҳои ирратсионалӣ – маънои ёфтани ҷуфти ададҳоеро дорад, ки ҳангоми дар муодилаҳои система ба ҷои тағйирёбандаҳои *x* ва *y* гузоштани онҳо баробарии ададии дуруст ҳосил шавад.

Мисол. Системаи муодилаҳои ирратсионалии зеринро ҳал мекунем:

$$\textbf{1.}\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}, \\ x-y=6. \end{cases}$$

Ҳал: Муодилаи якуми системаро бо махраҷи умумӣ оварда ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=\dfrac{3}{2}\sqrt{xy}, \\ x-y=6. \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} 2(x-y)=3\sqrt{xy}, \\ x-y=6. \end{cases}$$

Дар муодилаи якум ба ҷои $x-y$ адади 6-ро гузошта меёбем:

$$2\cdot 6=3\sqrt{xy} \text{ ё ки } \sqrt{xy}=4, \quad xy=16$$

Тарзи гузоришро истифода мебарем. Аз муодилаи дуюми система $x=6+y$ -ро дар муодилаи ҳосилшуда мегузорем:

$$(6+y)\cdot y=16 \text{ ё ин ки } y^2+6y-16=0.$$

Аз ин ҷо:

$$y_{1,2}=-3\pm\sqrt{9+16}=-3\pm5; \quad y_1=2 \text{ ва } y_2=-8.$$

Пас,

$$x_1=6+2=8 \text{ ва } x_2=6+(-8)=-2.$$

Санчиш нишон медиҳад, ки $x_1=8$ ва $y_1=2$ системаи муодилаҳоро қаноат мекунонанд.

Ҷавоб: $x=8$ ва $y=2$.

2. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ x\cdot y=8.\end{cases}$

Ҳ а л: Тағйирёбандаҳои нав дохил мекунем:

$$u=\sqrt[3]{x} \quad \text{ва} \quad v=\sqrt[3]{y} \qquad (u\geq0,\ v\geq0)$$

Он гоҳ система намуди зеринро мегирад:

$$\begin{cases}u+v=3,\\ u^3\cdot v^3=8.\end{cases} \qquad \text{ё} \qquad \begin{cases}u+v=3,\\ u\cdot v=2.\end{cases}$$

Системаро бо тарзи гузориш ҳал мекунем. Аз муодилаи якуми система меёбем: $u=3-v$. Баъди гузоштани қимати u дар муодилаи дуюми система ва иҷрои табдилдиҳиҳои муайян ҳосил мекунем:

$$v^2-3v+2=0.$$

Аз ин ҷо

$$v_1=2 \text{ ва } v_2=1.$$

Решаҳои мувофиқи u: $u_1=1$ ва $u_2=2$ мебошанд.

киматҳои $u=2$ ва $\vartheta=1$ - ро дар баробариҳои $u=\sqrt[3]{x}$ ва $v=\sqrt[3]{y}$ гузошта пайдо мекунем:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2, \\ \sqrt[3]{y} = 1. \end{cases}$$

Агар ҳар ду тарафи муодилаҳои системаро ба куб бардорем, он гоҳ ҳосил мешавад:

$$\begin{cases} x = 8, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ҳамин тавр, қиматҳои $u = 1$ ва $v = 2$ -ро дар баробариҳои $u = \sqrt[3]{x}$ ва $\vartheta = \sqrt[3]{y}$ гузошта соҳиб мешавем:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1, \\ \sqrt[3]{y} = 2. \end{cases}$$

Баъди ба куб бардоштани ду тарафи муодилаҳо ҳосил мешавад: $x = 1$ ва $y = 8$;

Ҷавоб: $x = 8$ ва $y = 1$; $x = 1$ ва $y = 8$.

3. $\begin{cases} \sqrt{2x + y + 2} = 3, \\ \sqrt{x + 2y + 5} = y - x. \end{cases}$

Ҳ а л. Ҳар ду тарафи муодилаҳои системаро ба квадрат бардошта ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 9, \\ x + 2y + 5 = y^2 - 2xy + x^2. \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} 2x + y = 7, \\ x + 2y + 5 = y^2 - 2xy + x^2. \end{cases}$$

Аз муодилаи якуми система $y = 7 - 2x$ мешавад. Онро дар муодилаи дуюми система гузошта ҳосил мекунем:

$$x + 2(7 - 2x) + 5 = (7 - 2x)^2 - 2x(7 - 2x) + x^2 \quad \text{ё ки}$$

$$x + 14 - 4x + 5 = 49 - 28x + 4x^2 - 14x + 4x^2 + x^2.$$

Баъди ислоҳ намудани аъзоҳои монанд муодилаи квадратии $3x^2 - 13x + 10 = 0$ ҳосил мешавад. Решаҳои он:

$x_1 = 1$ ва $x_2 = 3\frac{1}{3}$ мебошанд.

Ин қиматҳоро дар баробарии $y = 7 - 2x$ гузошта пайдо мекунем: $y_1 = 5$ ва $y_2 = \frac{1}{3}$.

Месанҷем. Системаро танҳо ҷуфти $x_1 = 1$ ва $y_1 = 5$ қаноат мекунонад.

Ҷавоб: $x_1 = 1$, $y_1 = 5$.

?

1. Ҳалли системаи муодилаҳои ирратсионалиро баён кунед.
2. Тарзҳои ҳалли системаи муодилаҳои ирратсионалиро номбар кунед.

Машқҳо

Системаи муодилаҳоро ҳал намоед (22°–28*):

22°. а) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ 4\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{y} = 1, \\ 3\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{y} = 4, \\ 3\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 2. \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ x + y = 35; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ x \cdot y = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1 \\ x - y = 7. \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, \\ x - 2y + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8, \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=3. \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=5, \\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\dfrac{15}{4}, \\ x\cdot y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x\cdot y}=56, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4, \\ x-y=32. \end{cases}$

26. а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1, \\ xy=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{2x+y+2}=3, \\ \sqrt{x+2y+5}=y-x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8, \\ x-y=16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5, \\ xy=216. \end{cases}$

27*. а) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=4, \\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3}, \\ x\cdot y=9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\sqrt{5y+1}=8, \\ 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{5y+1}=-2. \end{cases}$

28*. а) $\begin{cases} \sqrt{xy}=12, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7, \\ x\cdot y=9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x\cdot y=64, \\ x-y+\sqrt{xy}=20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2, \\ x\cdot y=27. \end{cases}$

Маълумотҳои таърихӣ

Мафҳуми дараҷаи нишондиҳандааш натуралиро юнониҳои қадим медонистанд. Барои онҳо ифодаи квадрати адад ҳангоми ҳисоб кардани масоҳати квадрат ва куби адад ҳангоми ёфтани ҳаҷми куб маълум буд.

Дар давлатҳои қадимаи Шумеру Бобулистон (асри XIX пеш аз милод) бошад аз ҷадвалҳои квадрати ададҳо a^2 ва кубҳо a^3 истифода менамуданд.

Рамзҳои ҳозиразамони дараҷаро дар намуди a^4, a^5,... олими фаронсавӣ Декарт (1596-1650) дар «Геометрия» ном асараш (1637) дохил намудааст.

Таълимот дар бораи дараҷаҳои нишондиҳандаашон касрӣ дар асарҳои математики фаронсавӣ Никола Орем (1323-1382) баён ёфтааст. Маълум аст, ки математики дигари фаронсавӣ Никола Шюке (1445-1500) дар рисолаи «Илм оид ба адад» (1484) аввалин шуда дараҷаҳои нишондиҳандаашон манфӣ ва сифриро истифода бурдааст. Математики ҳолландӣ Симон Стевин (1548-1620) дар «Тафсирҳои математикӣ» ном асари худ (1605-1608) пешниҳод намуд, ки $a^{\frac{1}{n}}$ решаи $\sqrt[n]{a}$ фаҳмида мешавад.

Олими англис Исаак Ниютон (1643-1727) дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалиро муттасил истифода бурда, нишондиҳандаҳои решаҳоро низ нишон додаст: $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$ ва ғайра.

Математики олмонӣ М.Штифел (1487-1567) бошад таърифи дараҷаи нишондиҳандааш сифрӣ ва касриро баён кард. Дохил намудани истилоҳи «нишондиҳанда» (олмонӣ – Exponent) ба ӯ тааллуқ дорад.

Дар асари математики итолиёвӣ Никколо Тарталя (тақ. солҳои 1500-1557) «Рисола оид ба адад ва андоза» (1556) муодилаи намуди $x + \sqrt[3]{x} = 6$ вомехӯрад, ки он бо сухан ифода ёфтааст. Навишти муодилаҳои ирратсионалӣ, ки ба рамзҳои имрӯза мувофиқанд дар асари математики англис Вилям

Оутред (1575-1660) «Калиди математика» (1631) дучор меоянд. Ин асар ба инкишофи минбаъдаи алгебра таъсири калон расонидааст.

Худро санҷед !

1. Дар байни ифодаҳо кадом аломатро бояд гузошт?

Ба ифодаҳо бодиққат назар кунед. Тахмин кунед, ки дар байни онҳо чигуна муносибат ҷой дорад ва аломати мувофиқро гузошта адади номаълум «?»-ро ёбед.

$$3^{3\sqrt{3}} \quad 9^{\sqrt{3}} \quad 3^{\sqrt{3}}$$

$$25^{\sqrt{2}} \quad 5^{\sqrt{2}} \quad ?$$

2. Муодиларо ҳал накарда, исбот кунед, ки онҳо решаҳои ҳақиқӣ надоранд:

$$\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}=1; \quad \sqrt{x^2-81}=\sqrt{x-8+\sqrt{8-x}}.$$

Оё ин муодилаҳоро муодилаҳои баробарқувва номидан мумкин аст?

Кори амалии № 1

МАҚСАДИ КОР. Ёфтани қимати тақрибии дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ ва муқоисаи онҳо.

СУПОРИШ. Аз компютер (ё калкулятор) истифода карда қимати ифодаҳои $3^{\sqrt{5}}$ ва $5^{\sqrt{3}}$-ро ба саҳеҳии то 0,001 ҳисоб кунед ва онҳоро муқоиса намоед.

ТАРТИБИ ИҶРОИ КОР

1. Аз компютер (ё калкулятор) истифода бурда қимати тақрибии ададҳои $\sqrt{3}$ ва $\sqrt{5}$-ро ёбед.

2. Якчанд наздикшавиҳои даҳии $\sqrt{3}$ ва $\sqrt{5}$-ро бо норасоӣ ва бо зиёдатӣ тартиб диҳед.

3. Мувофиқан қиматҳои тақрибии ифодаҳои $3^{\sqrt{5}}$ ва $5^{\sqrt{3}}$-ро пай дар пай ҳисоб кунед.

4. Қимати ифодаҳои $3^{\sqrt{5}}$ ва $5^{\sqrt{3}}$-ро бо саҳеҳии то 0,001 нависед.

5. Қиматҳои ҳосилшударо муқоиса намоед.

Супориши мустақилона доир ба боби I

Варианти 1°

1. Ҳисоб кунед:

а) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; б) $16^{\sqrt{3}}:2^{4\sqrt{3}}$; в) $\left(2^{\sqrt[3]{3}}\right)^{\sqrt[3]{9}}$

2. Муодилаҳоро ҳал намоед:

а) $\sqrt{7-x}=x-7$; б) $\sqrt{x}=2-x$;

в) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+3}=0$; г) $\sqrt[3]{x+3}=2$.

3. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\\ 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=18;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=15.\end{cases}$

Варианти 2

1. Ҳисоб кунед:

а) $2^{1-2\sqrt{5}}\cdot 4^{1+\sqrt{5}}$; б) $125^{\sqrt{3}}:5^{2\sqrt{3}}$; в) $(8^{\sqrt[5]{16}})^{\sqrt[5]{2}}$.

2. Муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $2\sqrt{x+5}=x+2$; б) $21+\sqrt{2x-7}=x$;

в) $\sqrt{16-\sqrt{x+1}}=4$; г) $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$.

3. Системаи муодилаҳоро ҳал намоед:

а) $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6,\\ x-y=12.\end{cases}$

Варианти 3*

1. Ҳисоб кунед:

а) $343^{1-2\sqrt{5}}\cdot 49^{3\sqrt{5}-2}$; б) $3^{\sqrt{2}+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}-1}$;

в) $\left(2^{3+\sqrt{5}}\right)^{3-\sqrt{5}}:\left(3^{3-2\sqrt{2}}\right)^{3+2\sqrt{2}}$.

2. Муодилаҳоро ҳал намоед:

а) $1+\sqrt{4x+5}=2x+2$; б) $5\sqrt[4]{x}+2=3\sqrt{x}$;

в) $\sqrt{11x-2}+3\sqrt{x}=6$; г) $\sqrt{x-9}+\sqrt{x}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}$.

3. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=-1.\end{cases}$

МАШҚҲОИ ИЛОВА ОИД БА БОБИ I

Ба параграфи 1

29. Ҳисоб кунед:

а) $(4^{\sqrt{5}-2})^{\sqrt{5}+2}$; б) $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{3}}$;

в) $8^{1+2\sqrt{2}}\cdot 4^{1-3\sqrt{3}}$; г) $49^{\sqrt{7}}:7^{2\sqrt{7}}$.

30. Ададҳои зеринро бо адади 1 муқоиса кунед:

а) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\sqrt{3}}$; б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt{3}}$;

в) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; г) $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{10}}$.

31*. Аз компютер истифода карда қимати ифодаи $3^{\sqrt{5}}$-ро бо саҳеҳии то 0,01 ҳисоб кунед.

Ба параграфҳои 2 – 3

Муодилаҳоро ҳал намоед (32–34*):

32. а) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$; б) $\sqrt[5]{25x-7}-\sqrt[5]{7x-25}=0$;

в) $\sqrt{3x-18}=3\sqrt{2}$; г) $(x^2-4)(\sqrt{x+5})=0$.

33. а) $(x^2-9)\sqrt{2-x}=0;$ б) $\sqrt[3]{5-\sqrt{x+15}}=1;$

в) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3;$ г) $\sqrt{x-9}-\sqrt{x-18}=1.$

34*. а) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3;$ б) $\sqrt[5]{\dfrac{x-3}{5-x}}+\sqrt[5]{\dfrac{5-x}{x-3}}=2;$

в) $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x;$ г) $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42.$

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (35–36*):

35. а) $\begin{cases}\sqrt{x}+3\sqrt{y}=10,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=26,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3,\\ x\cdot y=8;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\sqrt{xy-2x}=4,\\ \sqrt{\dfrac{y}{x-2}}=1.\end{cases}$

36*. а) $\begin{cases}\sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10,\\ 4\sqrt{3y+4}-5\sqrt{6+x}=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=1{,}5\\ x-y=6;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x-\sqrt{xy}+y=7,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10,\\ \sqrt{x^2-y^2}=9.\end{cases}$

БОБИ II. ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Мо ба омӯзиши функцияҳои намуди махсус **функсияҳои тригонометрӣ** машғул мешавем. Бо ёрии онҳо ҳодисаҳои гуногуни даврӣ баён карда мешаванд. Аз замонҳои қадим олимон мушоҳида менамуданд, ки ҳодисаҳои зиёди табиат даврӣ ба амал меоянд. Падари илмҳои юнонӣ **Фалес** (625-547 пеш аз милод) такроршавии фаслҳои солро омӯхта, дарозии солро 365 рӯз муқаррар кард. Ӯро пайравӣ намуда нуҷумшиноси намоёни Александрӣ – **Клавдии Птоломей** (асри II милодӣ) давраро ба 360 қисми баробар тақсим кард. **Анаксагор** (асри V пеш аз милод) сабабҳои ба вуҷуд омадани дигаргуншавии моҳро медонист. Донишманди дигари Юнони қадим **Гераклит** нишон медиҳад, ки ҳама чиз дар табиат ба мисли мадду ҷазри оби баҳр бо ҳам алоқаманданд. Кам шудан ва аз соҳил дур рафтани оби баҳр, ки бо таъсири қувваи кашиши офтобу моҳ ба амал меояд, дар ҳар шабонарӯз ду бор такрор мешавад. Ингуна мисолҳоро аз таърих хеле зиёд овардан мумкин аст.

Қайд кардан лозим аст, ки ба ҳодисаҳои зиёди табиат мо аз овони хурдӣ одат кардаем. Мо медонем, ки бадалшавии шаб ва рӯз дар натиҷаи даврзании шабонарӯзии Замин дар атрофии меҳвари худ ба амал меояд. Вақте ки моҳтоб комилан зери сояи замин мемонад, ҳар сол гирифтани он рӯй медиҳад.

Мадохилу махориҷи энергияе, ки замин аз офтоб ва баръакс, офтоб аз замин мегирад барои дар сайёраи мо нигоҳ доштани ҳарорати доимӣ басанда аст. Ва ин раванд даврӣ такрор меёбад. Ҳамин тавр, тапиши дил, гардиши чарх, паҳншавии зукком ва ғайраҳо равандҳои даврианд.

Дар замони ҳозира равандҳои гуногуни даврӣ, чунончӣ, ҳаракатҳои лапишдор, паҳншавии мавҷ, ҳаракати механизмҳо, лапиши ҷараёни тағйирёбандаи электрикӣ, ки дар физика, механика ва техника омӯхта мешаванд, ба функсияҳои тригонометрӣ асос меёбанд.

Ба сифати аргументи функсияи даврӣ бештар кунҷ хизмат мекунад. Пас, **кунҷ чист?** Онро чӣ тавр чен мекунанд? Шумо ба ин мафҳум дар алгебраи синфи 9 шинос шуда будед.

§ 1. Формулаҳои тригонометрии ҷамъ ва натиҷаҳои онҳо

Бо ёрии давраи воҳидӣ (дар синфи 9, боби IV, §§11-12) ду гурӯҳи формулаҳои тригонометриро ҳосил карда будем:

гурӯҳи I – айниятҳои тригонометрие, ки вобастагии байни ҳамон як аргументро ифода мекунанд;

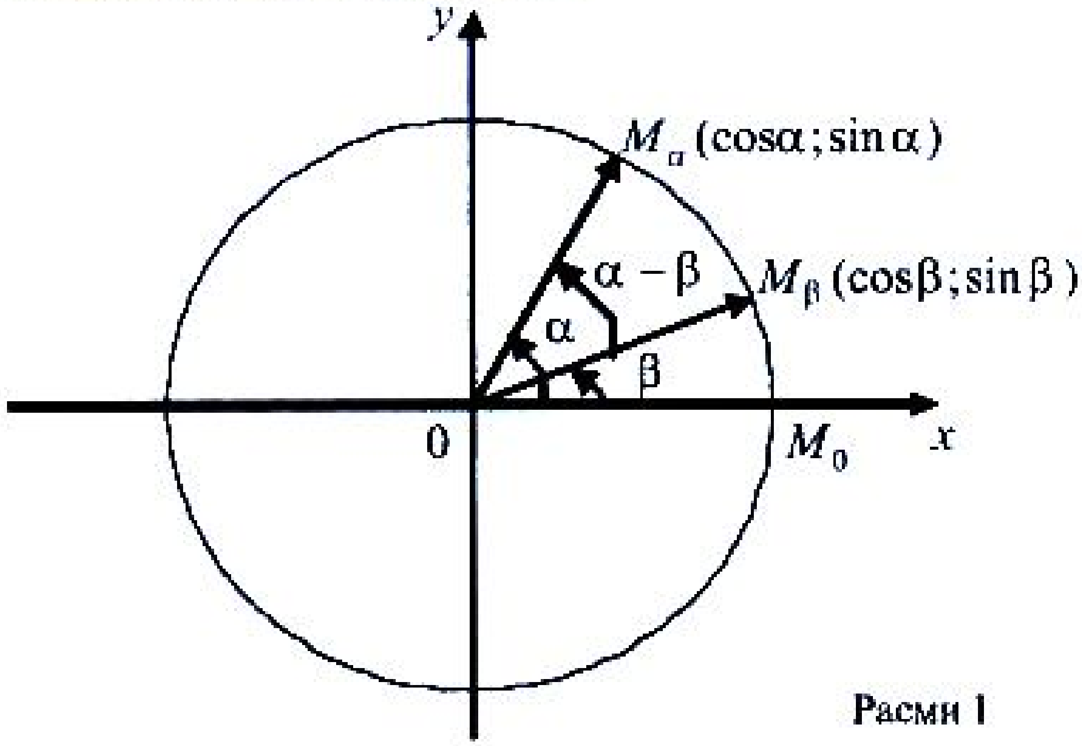
гурӯҳи II – айниятҳои тригонометрие, ки формулаҳои мувофиқояндаро муқаррар менамуданд.

Акнун мақсад мегузорем, ки формулаҳои гурӯҳи III – суммаи функсияҳои тригонометриро ҳосил намоем.

Ибтидо формулаи фарқи косинусҳоро исбот мекунем.

***Теорема.* Косинуси фарқи ду кунҷ ба ҳосили зарби косинусҳо плюс ба ҳосили зарби синусҳои онҳо баробар аст.**

Исбот. Дар давраи воҳидӣ кунҷҳои α ва β-ро месозем. Фарз мекунем, ки нуқта аз ҳолати ибтидоии M_0 ба равиши мусбат ҳаракат карда, мавқеи M_β ва M_α-ро гирад, дар он сурат ин нуқтаҳо бо ёрии векторҳои $\overrightarrow{OM_\alpha}$ ва $\overrightarrow{OM_\beta}$ ба равиши мусбати тири абсисса мувофиқан кунҷҳои α ва β-ро ташкил медиҳанд (расми 1).



Расми 1

Векторҳои $\overrightarrow{OM_\alpha}$ ва $\overrightarrow{OM_\beta}$ - ғайрисифрианд: $\left|\overrightarrow{OM_\alpha}\right| = \left|\overrightarrow{OM_\beta}\right| = 1$. Ба Шумо аз курси геометрияи синфи 9 ҳосили зарби скалярии ин векторҳо маълум аст:

$$\overrightarrow{OM_\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_\beta} = \left|\overrightarrow{OM_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OM_\beta}\right| \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

Аз ин ҷо: $$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\overrightarrow{OM_\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_\beta}}{\left|\overrightarrow{OM_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OM_\beta}\right|}$$

Ҳосили зарби скалярии векторҳои $\overrightarrow{OM_\alpha}\{\cos\alpha; \sin\alpha\}$ ва $\overrightarrow{OM_\beta}\{\cos\beta; \sin\beta\}$ бо формулаи

$\overrightarrow{OM_\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_\beta} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$ ифода меёбад.

Он гоҳ:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

Теорема исбот шуд.

Натиҷаҳо.

Косинуси сумма. Суммаи ду кунҷро ҳамчун фарқ ифода кардан мумкин аст: $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$

Аз ин рӯ, $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta)$

Азбаски косинус функсияи ҷуфт ва синус функсияи тоқ аст, бинобар ин

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

Синуси сумма. Яке аз формулаҳои мувофиқовариро истифода мебарем:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Ба ҳамин тариқ,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (3)$$

Синуси фарқ. Дар формулаи охирин β–ро ба $(-\beta)$ иваз намуда ҳосил мекунем:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

Яъне, $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha \qquad (4)$$

Мисолҳо меорем.

1. $\cos 75^\circ$ хисоб карда шавад.

Ҳал. Кунчи 75° -ро ҳамчун суммаи $30^\circ+45^\circ$ тасвир мекунем. Он гох,

$$\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)=\cos 30^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\cdot\sin 45^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)\approx 0{,}259.$$

2. $\sin 105^\circ$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳал. $\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\cdot\sin 45^\circ=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

Тангенси сумма. Мувофиқи таърифи тангенс навишта метавонем:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

Ба ҳамин тариқ,

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta} \qquad (5)$$

Тангенси фарқ. Дар формулаи (5) кунчи β-ро ба $(-\beta)$ иваз намуда ҳосил мекунем:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta} \qquad (6)$$

Исбот ва ба хотир гирифтани формулаи котангенси сумма ва фарқи ду кунҷ ҳеҷ зарурате надорад. Бо ин мақсад кифоя аст, ки $ctg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{1}{tg(\alpha\pm\beta)}$ истифода бурда шавад.

Ҳамин тавр, маълум гардид, ки формулаҳои ҷамъкунӣ асосан аз шаш формула иборат будааст. Аз ин формулаҳо истифода бурда ҳамаи формулаҳои мувофиқовариро ҳосил кардан мумкин аст. Масалан, агар $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ бошад,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\beta+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\beta=\sin\beta,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\beta+\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\beta=\cos\beta$$

мешаванд. Формулаҳои боқимондаро мустақилона санҷед.

?

1. Формулаҳои косинуси сумма ва фарқи ду кунҷро нависед. Онҳоро бо сухан баён кунед.
2. Формулаҳои тангенси сумма ва фарқи ду кунҷро нависед.
3. Аз формулаҳои тангенси сумма ва фарқи ду кунҷ чӣ тавр формулаҳои котангенси сумма ва фарқро ҳосил мекунанд?

Машқҳо

Бе ҷадвал ҳисоб кунед (1°–3):

1°. а) $\cos 75^\circ$; б) $\cos 120^\circ$; в) $\sin 105^\circ$;

г) $tg 15^\circ$; д) $\sin 285^\circ$.

2. $\cos(\alpha+\beta)$ ва $\cos(\alpha-\beta)$, агар $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{8}{17}$,

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ва $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ бошанд.

3. $tg(\alpha+\beta)$ ва $tg(\alpha-\beta)$, агар $ctg\alpha = \frac{1}{4}$ ва $ctg\beta = \frac{5}{6}$ бошанд.

Қимати ифодаҳоро ёбед (4°–6):

4°. а) $\cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ$;

б) $\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$;

в) $\sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ$;

г) $\cos 90^\circ \cos 30^\circ + \sin 90^\circ \sin 30^\circ$.

5. а) $\cos 107^\circ \cos 17^\circ + \sin 107^\circ \sin 17^\circ$;

б) $\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \cos 63^\circ \sin 27^\circ$;

в) $\sin 51^\circ \cos 21^\circ - \cos 51^\circ \sin 21^\circ$;

г) $\cos 16^\circ \cos 14^\circ - \sin 16^\circ \sin 14^\circ$.

6. а) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\alpha - \sin\alpha$;

б) $2\cos(60^\circ - \alpha) - \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$;

в) $\sqrt{2}\sin(\alpha - 45^\circ) - \sin\alpha + \cos\alpha$;

г) $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos(\alpha - 30^\circ) + \sin\alpha$.

Содда кунед (7°–10*):

7°. а) $\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$; б) $\cos(\alpha-\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$.

8. а) $\sin(15^\circ + \alpha)\cos(5^\circ - \alpha) + \cos(15^\circ + \alpha)\sin(5^\circ - \alpha)$;

б) $\sin 3\alpha \cos\alpha - \cos 3\alpha \sin\alpha$;

в) $\cos(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta$;

9. а) $\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha + \cos(\alpha+\beta)\cos\alpha$;

б) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$;

в) $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}$;

10*. а) $\sin^2(30+\alpha)+\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin^2\alpha$;

б) $\cos(120^\circ+\alpha)+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos\alpha$.

Ҳисоб кунед (11°–14*):

11°. а) $\dfrac{tg19^\circ+tg26^\circ}{1-tg19^\circ tg26^\circ}$; б) $\dfrac{tg84^\circ-tg24}{1+tg84^\circ tg24^\circ}$.

12. а) $\dfrac{tg93^\circ-ctg57^\circ}{1+tg93^\circ ctg57^\circ}$; б) $\dfrac{1+tg2^\circ tg152^\circ}{tg152^\circ-tg2^\circ}$.

13. а) $\dfrac{ctg78^\circ-ctg303^\circ}{1+tg(-192^\circ)ctg237^\circ}$; б) $\dfrac{tg225^\circ-ctg81^\circ ctg69^\circ}{ctg261^\circ+tg201^\circ}$.

14*. $\cos(\alpha-\beta)$-ро ҳисоб кунед, агар $\sin\alpha+\sin\beta=0$ ва $\cos\alpha+\cos\beta=b$ бошад.

Нишондод. Ҳар як баробариро ба квадрат бардошта натиҷаҳоро ҷамъ кунед.

Ёбед (15°–17):

15°. а) $\sin(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)$, агар $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha\in(0;\dfrac{\pi}{2})$ бошад;

б) $\cos(45^\circ-\beta)-\cos(45^\circ+\beta)$, агар $\sin\beta=\dfrac{1}{2}$, $\alpha\in(0;\dfrac{\pi}{2})$ бошад.

16. а) $\cos(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)$, агар $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\alpha\in(\dfrac{3\pi}{2};2\pi)$ бошад;

б) $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$, агар $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha \in (0;\frac{\pi}{2})$ бошад.

17. а) $\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) - \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3})$, агар $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ бошад;

б) $tg\alpha$, $tg\beta$, агар $tg\alpha + tg\beta = 2$ ва $tg(\alpha+\beta) = 4$ бошад.

§ 2. Формулаҳои кунҷи дучанда ва нисфи кунҷ

Формулаҳои кунҷи дучанда ҳолати хусусии формулаҳои ҷамъкунӣ мебошанд. Онҳо функсияҳои тригонометрии кунҷи дучанда 2α -ро ба воситаи функсияҳои тригонометрии кунҷи α ифода мекунанд.

Дар формулаи косинуси сумма $\alpha = \beta$ гузошта ҳосил мекунем:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad (1)$$

Агар тарафи рости баробарии (1)-ро ба воситаи синус ё косинуси кунҷи додашуда ифода намоем, формулаҳои зерин ҳосил мешаванд:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \text{ва ё} \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Косинуси кунҷи дучанда ба фарқи квадратҳои косинус ва синуси кунҷи дода шуда баробар аст.

Ҳамин тавр, аз рӯи формулаи ҷамъи синусҳо пайдо мекунем:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (2)$$

Ин формуларо бо сухан баён кунед!

Айнан ҳамин тавр, барои тангенси кунҷи дучанда меёбем:

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \qquad (3)$$

Ба ҳамин тариқ, **гурӯҳи IV** айниятҳое мебошанд, ки онҳо формулаҳои кунҷи дучандаро ифода карда, аз се формулаи асосӣ иборатанд.

Аз формулаҳои кунҷи дучанда айниятҳое ҳосил кардан мумкин аст, ки онҳо ба функсияҳои тригонометрии нисфи кунҷ вобастаанд.

Дар формулаҳои $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ва ё $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ кунҷи α-ро ба $\frac{\alpha}{2}$ иваз намуда ҳосил мекунем:

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \quad \text{ва} \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Аз ин ҷо: $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ ва $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

Ва ё
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (1)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (2)$$

Агар баробарии дуюмро ба якум тақсим кунем, формулаи тангенси нисфи кунҷ пайдо мешавад:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad (3)$$

Ҳангоми истифодабарии формулаҳои (1-3) дар кадом чоряк ба охир расидани кунҷи $\frac{\alpha}{2}$-ро ба эътибор гирифта, дар назди радикал аломати мувофиқ гузошта мешавад.

Барои тангенси нисфи кунҷ боз формулаҳои

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (4)$$

ҷой доранд (онҳоро мустақилона исбот кунед).

Формулаи (4) аз он сабаб писандида аст, ки радикал надорад.

Ҳамин тавр, **гурӯҳи V** – айниятҳое мебошанд, ки онҳо функсияҳои тригонометрии нисфи кунҷро ифода намуда, аз се формулаи асосӣ иборат аст.

Мисолҳо.

1. $\sin\frac{\pi}{8}$ бе ҷадвал ҳисоб карда шавад.

Ҳал. Кунҷи $\frac{\pi}{8}$ нисфи кунҷи $\frac{\pi}{4}$ аст.

Пас, $$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Азбаски $\frac{\pi}{8}$-кунҷи тез аст, пеш аз радикал аломати (+) гузоштем.

2. Дода шудааст: $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Ёбед: $\sin\frac{\alpha}{2}$ ва $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Ҳал. Аз шарт меёбем, ки $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$. Кунҷи α ба чораки сеюм тааллуқ дорад. Дар он $\cos\alpha$ манфӣ аст:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{8}{17}\right)^2} = -\frac{15}{17}.$$

Инак, $$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{15}{17}\right)}{2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{15}{17}\right)}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

1. Формулаҳои функсияҳои тригонометрии кунҷи дучандаро нависед. Онҳоро бо сухан баён кунед.
2. Нишон диҳед, ки айниятҳои тригонометрии нисфи кунҷ аз формулаҳои кунҷи дучанда ба амал меоянд.
3. Тангенси нисфи кунҷро ба воситаи синус ва косинуси кунҷ ифода намоед.

Машқҳо

18. Ҳисоб кунед (шифоҳӣ):

а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; б) $2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$; в) $1 - 2\sin^2 15^\circ$.

Ёбед (19° – 21):

19°. а) $\frac{2\sin 15^\circ \sin 75^\circ}{\cos 15^\circ \cos 75^\circ}$; б) $\frac{1-2\sin^2 30^\circ}{2\cos^2 15^\circ - 1}$;

в) $\frac{2tg\frac{\pi}{12}}{1+tg^2\frac{\pi}{12}}$; г) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $ctg 2\alpha$,

агар $\sin\alpha = \frac{5}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ бошад.

20. а) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{1-2\sin^2 22^\circ 30'}{2\cos^2 15^\circ - 1}$;

в) $\cos 2\alpha$, агар $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

г) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $tg 2\alpha$, $ctg 2\alpha$,

агар $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ бошад.

21. а) $\frac{1-tg^2 15^\circ}{1+tg^2 15^\circ}$; б) $\frac{\cos 12^\circ \cos 78^\circ}{\cos 66^\circ}$; в) $\frac{3-tg^2 15^\circ}{3tg^2 15^\circ - 1}$;

г) $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$, агар $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

Нишон диҳед, ки:

22. 1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; 3) $tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$.

Содда кунед (23° – 25):

23°. а) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; б) $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$; в) $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

г) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$; д) $\frac{\sin 80^\circ}{2\cos 40^\circ}$; е) $\frac{\cos 40^\circ + \sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}$.

24. а) $\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)$; б) $\frac{(1+\cos 2\alpha)^2}{\sin^2 2\alpha}$;

в) $\frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}{1-\sin 2\alpha}$; г) $ctg\alpha(1-\cos 2\alpha)$.

25. а) $(\sin\alpha - \sin 2\alpha)^2 + (\cos\alpha - \cos 2\alpha)^2$; б) $\frac{tg2\alpha - tg\alpha}{tg2\alpha\cdot tg\alpha}$.

Айниятҳоро исбот кунед (26° – 28):

26°. а) $\sin 30^\circ\cdot\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\alpha}{2}}{1-2\sin^2\frac{3\alpha}{2}} = \frac{1}{2}tg3\alpha$.

27. а) $\frac{tg\alpha\cdot tg2\alpha}{tg2\alpha - tg\alpha} = \sin 2\alpha$; б) $\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \cos 2\alpha$.

28. а) $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$; б) $1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \cos 4\alpha$.

Нишондод. а) Ба $2\sin\frac{\pi}{5}$ сурат ва махраҷи касрро зарб ва тақсим кунед.

Ҳисоб кунед ($29^\circ - 32^*$):

29°. а) $\sin 15^\circ$; б) $\cos 15^\circ$; в) $tg\,22^\circ 30'$;

г) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$, агар $\cos\alpha = \frac{2}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ бошад;

30. а) $\sin\frac{5\pi}{12}$; б) $\cos\frac{5\pi}{12}$; в) $tg\frac{5\pi}{12}$;

г) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$, агар $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ бошад.

31. а) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$, агар $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\alpha \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$;

б) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, агар $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ бошад.

32*. а) $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$.

33. (Айниятҳои Берунӣ). Исбот кунед, ки:

а) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos\alpha}$; б) $\sin\frac{\alpha}{4} = \sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\alpha}}$;

в) $\sin\frac{\alpha}{8} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\alpha}}}$.

§ 3. Ифодаи функсияҳои тригонометрӣ ба воситаи тангенси нисфи кунҷ

Ҳангоми ҳисоб намудани қимати функсияҳои тригонометрии кунҷи x дар бисёр мавридҳо лозим меояд, ки решаи квадратӣ бароварда шавад. Ин ҳолат барои ҳалли муодилаҳо ва исботи айниятҳои тригонометрӣ чандон муфид нест. Бинобар ин, мувофиқи мақсад аст, ки функсияҳои тригонометрӣ ба воситаи яке аз онҳо ратсионалӣ ифода карда шавад. Ин вазифаро тангенси нисфи кунҷ иҷро карда метавонад.

Теорема. Агар $x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$ бошад, онгоҳ $\sin x$, $\cos x$ ва tgx ба воситаи $tg\frac{x}{2}$ бо ёрии формулаҳои зерин ратсионалӣ ифода меёбанд:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad (1) \qquad\qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad (2)$$

ва

$$tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} \qquad (3)$$

Исбот. Мувофиқи формулаҳои дучанда навишта метавонем:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} \qquad \text{ва} \qquad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

Тарафи рости ин баробариҳоро ба $1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$ тақсим мекунем:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

Агар сурат ва махраҷи касрҳои ҳосилшударо ба $\cos^2\frac{x}{2}$ тақсим кунем ифодаҳои матлуб барои синус ва косинус ҳосил мешаванд:

$$\sin x = \frac{\dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}} = \frac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}};$$

$$\cos x = \frac{\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}} = \frac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}.$$

ва $$tgx = tg2\cdot\frac{x}{2} = \frac{2tg\dfrac{x}{2}}{1-tg^2\dfrac{x}{2}}.$$

Маълум аст, ки ҳамаи ин формулаҳо ҳангоми $\alpha = \pi(2k+1)$ будан маъно надоранд.

Теорема исбот шуд.

Ин формулаҳоро бо сухан баён кунед.

Гурӯҳи VI ҳам аз се формулаи асосӣ иборат буда, айниятҳое мебошанд, ки синус, косинус ва тангенсро ратсионалӣ ифода мекунанд.

М и с о л. Ёбед: $\sin x+\cos x$, агар $tg\dfrac{x}{2}=3$ бошад.

Ҳ а л. $$\sin x+\cos x = \frac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}+\frac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}} =$$

$$=\frac{2tg\frac{x}{2}-tg^2\frac{x}{2}+1}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2\cdot3-9+1}{1+9}=-0{,}2.$$

? 1. $sinx$-ро бо ёрии тангенси нисфи кунҷ чӣ тавр ифода кардан мумкин аст? – Косинуси кунҷро чӣ?
2. Формулаи тангенси кунҷро, ки ба воситаи тангенси нисфи кунҷ ифода ёфтааст, нависед.

Машқҳо

Ёбед ($34^\circ - 36^*$):

34°. 1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $tg\alpha$;

4) $\sin2\alpha$, агар $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ бошад.

35. 1) $\cos2\alpha$; 2) $tg2\alpha$, агар $tg\alpha=\frac{3}{4}$ бошад;

3) $\sin4\alpha$, агар $tg\alpha=3$ бошад;

4) $\cos4\alpha$, агар $tg2\alpha=8$ бошад.

36^*. 1) $\frac{3+2\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$, агар $tg\frac{\alpha}{2}=2$ бошад.

2) $\cos^2 2\alpha$, агар $tg\alpha=\sqrt{3}$ бошад.

3) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$, агар $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ бошад.

4) $\frac{\sin\alpha}{2-5\cos\alpha}$, агар $tg\frac{\alpha}{2}=2$ бошад.

§ 4. Табдилдиҳии суммаи функсияҳои тригонометрӣ ба ҳосили зарб

Айниятҳои гурӯҳи III имконият медиҳанд, ки суммаи функсияҳои тригонометрӣ ба ҳосили зарб табдил дода шаванд.

Фарз мекунем, ки $\sin x + \sin y$ -ро ба ҳосили зарб табдил додан лозим аст. Формулаҳои сумма ва фарқи синуси ду аргументро менависем:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

Баробариҳои якум ва дуюмро аввал ҷамъ ва баъд аз якум баробариҳои дуюмро тарҳ карда ҳосил мекунем:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta \qquad (4)$$

Акнун н о м а ъ л у м и н а в дохил мекунем:

$$\alpha + \beta = x, \qquad \alpha - \beta = y \qquad (5)$$

Баробарихои (5)-ро ҷамъ ва баъд тарҳ карда меёбем:

$$\alpha = \frac{x+y}{2}, \qquad \beta = \frac{x-y}{2}$$

Аз рӯи ин номаълумҳо баробариҳои (3) ва (4) намуди зеринро мегиранд:

$$\boxed{\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} \qquad (6)$$

$$\boxed{\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}} \qquad (7)$$

Формулаи шашро ин тавр шарҳ медиҳем: **суммаи синусҳои ду кунҷ ба дучандаи ҳосили зарби синуси нимсумма ба косинуси нимфарқи ин кунҷҳо баробар аст.**

Ба монанди ҳамин, формулаи ҳафтум хонда мешавад (баён кунед!)

Айнан ҳамин тавр, аз айниятҳои

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (8)$$

формулаҳои сумма ва фарқи ду косинусҳоро меёбем:

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \qquad (9)\\ &\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \qquad (10)\end{aligned}}$$

Тафсири шифоҳии формулаҳои нуҳум ва даҳумро аз ёд набароред!

Мисолҳо. Ифодаҳои зеринро ба ҳосили зарб табдил диҳед:

1. $\sin 40^\circ+\sin 16^\circ=$(мувофиқи формулаи (6))=

$$=2\sin\frac{40^\circ+16^\circ}{2}\cdot\cos\frac{40^\circ-16^\circ}{2}=2\sin 28^\circ\cos 12^\circ.$$

2. $\cos\alpha-\sin\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\sin\alpha=$(аз рӯи формулаи (7))=

$$=2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\alpha}{2}=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha).$$

3. $\underbrace{\sin x+\sin 2x}+\underbrace{\sin 3x+\sin 4x}=2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=$

$$=2\cos\frac{x}{2}(\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{7x}{2})=4\sin 2{,}5x\cos x\cos 0{,}5x.$$

4. Айниятро исбот кунед: $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=tg3\alpha$

Тарафи чапро мувофиқи формулаҳои (6) ва (9) табдил медиҳем: $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\dfrac{2\sin 3\alpha\cdot\cos 2\alpha}{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha}=tg3\alpha.$

?

1. Бо ёрии кадом айниятҳо суммаи функсияҳои тригонометрӣ ба ҳосили зарб табдил дода мешаванд?
2. Тарзи ба хотиргирии айниятҳои ҳосилшударо фаҳмонед.

Машқҳо

37. Ёбед (шифоҳӣ): а) Дар кадом қимати α баробарии

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{1-\cos\alpha}$$ дуруст аст?

б) Оё дуруст аст, ки $\sin\frac{2\pi}{16} + \sin^2\frac{7\pi}{16} = 1$ аст?

Ба ҳосили зарб табдил диҳед ($38^\circ - 40$):

38°. а) $\cos 16^\circ - \cos 36^\circ$; б) $\sin 9^\circ - \sin 7^\circ$;

в) $\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{2\pi}{9}$; г) $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha$.

39. а) $\cos 25^\circ + \sin 25^\circ$; б) $\sin 40^\circ - \cos 70^\circ$;

в) $\cos\frac{4\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{9}$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

д) $\sin\alpha + \cos\alpha$.

40. а) $\frac{\cos 38^\circ + \cos 22^\circ}{\cos 38^\circ - \cos 22^\circ}$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

в) $\sin\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha - \sin 7\alpha$;

г) $\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha$.

Айниятҳоро исбот кунед ($41^\circ - 44^*$):

41°. а) $\frac{\cos 3\alpha - \cos\alpha}{\sin 2\alpha} = -2\sin\alpha$; б) $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -ctg\frac{\alpha+\beta}{2}$;

в) $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$;

г) $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = ctg\frac{\alpha+\beta}{2}$.

42. а) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}=tg\alpha\cdot tg\beta;$

б) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}=tg3\alpha;$ в) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=tg(\dfrac{\pi}{4}+\alpha);$

43. а) $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2};$ б) $\cos\dfrac{\pi}{5}-\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{2}.$

в) $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})+\cos(2\alpha-\dfrac{\pi}{4})=2\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\alpha}{2});$

г) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot ctg\alpha=1;$ д) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=ctg\alpha.$

44*. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, агар $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ бошад.

§ 5. Табдилдиҳии ҳосили зарби функсияҳои тригонометрӣ ба сумма

Дар бисёр ҳолатҳо ҳангоми ҳалли муодилаҳо табдилдиҳиҳои айниятҳои тригонометрӣ ва ҳисоббарориҳо лозим меоянд, ки ҳосили зарби функсияҳои тригонометрӣ ба суммаи ин функсияҳо табдил дода шаванд. Ба ин мақсад чор формулаи аввалини гурӯҳи III –ро менависем:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (4)$$

Баробариҳои якум ва дуюмро ҷамъ карда ҳосил мекунем:

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)} \qquad (5)$$

Аз баробарии якум баробарии дуюмро тарҳ карда меёбем:

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)} \qquad (6)$$

Ду баробарии охиринро ҷамъ карда пайдо мекунем:

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))} \qquad (7)$$

Гурӯҳи VII формулаҳои айниятҳоеро ифода мекунанд, ки онҳо суммаи функсияҳои тригонометриро ба зарб ва баръакс зарбро ба сумма табдил медиҳанд.

Хулоса, мо ҳафт гурӯҳи айниятҳо (табдилдиҳиҳо)-ро дида баромадем, ки онҳо функсияҳои тригонометриро бо ҳам алоқаманд менамоянд. Ба ин табдилдиҳиҳо ва сохти муайянкунандаи онҳо **табдилдиҳиҳои маълум** ном медиҳем. Ба хотир гирифтани ҳамаи онҳо зарурате надоранд ва бинобар ин лозим меояд, ки аз ҷадвалҳо ва маълумотномаҳо истифода бурда тавонем.

Ҳангоми табдилдиҳиҳои айниятҳои тригонометрӣ интихоби тарзи ба амал овардани онҳо аз ҳама муҳим ҳисоб мешавад.

Акнун истифодаи **методи табдилдиҳиҳои маълумро** дар ҳалли мисолҳо дида мебароем.

1. Ифодаи $\cos^2 x\cos 3x$ -ро дар намуди суммаи функсияҳои тригонометрӣ нависед.

Ҳ а л. Ин тавр муҳокима меронем. Ифодаи дода шуда аз **табдилдиҳии маълум** (формулаи панҷум, § 5) бо чӣ фарқ мекунад? Дар ин ҷо $\cos x$ ба квадрат бардошта шудааст. Ин фарқиятро аз байн бардоштан лозим. Вале чӣ тавр? Мувофиқи табдилдиҳии маълум (§ 2) $\cos^2 x$ -ро ба ифодаи $\frac{1+\cos 2x}{2}$ иваз намуда ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\cdot\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos 2x\cos 3x$$

Ба ҷамъшавандаи дуюми ифода айнияти маълумро татбиқ карда меёбем:

$$\cos^2 x\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{4}(\cos x+\cos 5x)=\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 5x.$$

2. Содда намоед: $\cos^2 5^\circ+\cos^2 1^\circ-\cos 6^\circ\cos 4^\circ$

Ҳал. Оё ифодаи додашуда дар намуди умумӣ маълум аст? – Не. - Оё аъзоҳои маълум дорад? – Бале, якто: $\cos 6^\circ \cos 4^\circ$.

$$\cos 6^\circ \cos 4^\circ = \frac{1}{2}(\cos 2^\circ + \cos 10^\circ).$$

- Ду аъзои аввала чӣ? – Онхо табдилдиҳиҳои маълуми гурӯҳи IV-ро баён мекунанд:

$$\cos^2 5^\circ = \frac{1+\cos 10^\circ}{2}; \qquad \cos^2 1^\circ = \frac{1+\cos 2^\circ}{2}.$$

Пас,
$$\cos^2 5^\circ + \cos^2 1^\circ - \cos 6^\circ \cos 4^\circ = \frac{1}{2}(1+\cos 10^\circ) +$$
$$+\frac{1}{2}(1+\cos 2^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 2^\circ + \cos 10^\circ) = 1.$$

?

1. Ба воситаи кадом айниятхо ҳосили зарби функсияҳои тригонометрӣ ба сумма табдил дода мешаванд?
2. Ҳафт гурӯҳи айниятҳои тригонометрӣ табдилдиҳиҳои маълум ном гирифтанд. Дар зери ин мафҳум чиро мефаҳмед? Шарҳ диҳед.

Машқҳо

45. Ҳисоб кунед (шифоҳӣ):

а) $(a\sin\pi + b\cos\pi + m\,tg\,\pi)^3$; б) $\dfrac{tg^2 60^\circ - tg\,45^\circ}{\sin^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ}$

Ба сумма табдил диҳед (46° – 49^*):

46°. а) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; б) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$;

в) $\sin 17^\circ \sin 43^\circ$; г) $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$.

47. а) $\dfrac{2\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}$; б) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$;

в) $\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$.

48. а) $4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)$;

б) $\cos55^\circ\cdot\cos65^\circ\cos175^\circ$.

49*. а) $\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\cos8\alpha\cos16\alpha$;

б) $\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ\cos 96^\circ$.

Нишондод. Аз формулаи $\cos\alpha=\dfrac{\sin2\alpha}{2\sin\alpha}$ истифода баред.

§ 6. Табдилдиҳиҳои айниятии ифодаҳои тригонометрӣ

Масъалаи **табдилдиҳиҳои айниятиро** ба масъалаи муайян кардани **мавқеи маҳал** муқоиса кардан мумкин аст.

Шахсе, ки хоҳиши рафтани ягон ҷой дорад, одатан ӯ ҳамаи роҳҳои маҳалро намедонад. Тасодуфҳои зиёде пеш омаданаш мумкин аст. Вале ба ӯ муяссар мегардад, ки аввал як нишонаи муайянкунанда A-ро маълум созад. Баъди ин, то ба нишонаи дигар B роҳ паймудан ба ӯ имконият пайдо мешавад. Ин нишона ба ӯ ёфтани роҳи сеюм C-ро муайян мекунад то он даме, ки ба мақсад ноил гардад.

Ба монанди он ки ҳамаи гуногуншаклии нишонаҳои роҳро баён кардан мумкин нест, айнан ҳамон тавр ҳамаи табдилдиҳиҳои айниятҳои тригонометриро низ ифода кардан имконнопазир аст.

Бо вуҷуди он, баъзе аз предметҳо ва дар маҳал ҷойгиршавии онҳоро аниқ тасвир намуда, ин ашёҳоро ба сифати **аломатҳои муайянкунанда** қабул кардан мумкин аст.

Ба ҳамин монанд, лозим меояд, ки баъзе ифодаҳои тригонометрӣ ва табдилдиҳии айниятии онҳоро ҳамчун **нишонаҳои муайянкунанда** интихоб карда, баҳри мукаммал аз худ намудани онҳо саъю кӯшиш намоем.

Инак, татбиқи ҳафт гурӯҳи айниятҳои тригонометриро, ки онҳо методи табдилдиҳиҳои маълум ном гирифтаанд, ҳангоми содда намудани ифодаҳои тригонометрӣ дида мебароем.

Мисоли 1. Ифодаро содда кунед: $\cos(60^\circ-\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)$

Ҳал. Мувофиқи формулаҳои косинуси фарқи ду кунҷ ва косинуси сумма навишта метавонем:

$$\cos(60^\circ-\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)=$$

$$=\cos 60^\circ\cdot\cos\alpha+\sin 60^\circ\cdot\sin\alpha+\cos 60^\circ\cdot\cos\alpha-\sin 60^\circ\cdot\sin\alpha=$$

аъзоҳои монандро ислоҳ намуда ҳосил мекунем:

$$=2\cos 60^\circ\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha=\cdot\cos\alpha$$

Мисоли 2. Содда кунед: $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$

Ҳал. Дар сурати ифода формулаи синуси кунҷи дучандаро татбиқ мекунем:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=$$

баробарии $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ -ро дар назар дошта, навишта метавонем:

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=1.$$

Мисоли 3. Айниятро исбот кунед: $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=tg^2\dfrac{\alpha}{2}$

Исбот. Т а р з и 1. Тарафи чапи айниятро гирифта, аз формулаи синуси кунҷи дучанда истифода мебарем:

$$\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=$$

зарбкунандаи умумиро аз қавс бароварда, баъди ихтисоркунӣ пайдо мекунем:

$$=\frac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Ба сурат ва махраҷи ифодаи охирин айниятҳои маълум

$1=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}$ ва $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$-ро истифода намуда ҳосил мекунем:

$$=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=tg^2\frac{\alpha}{2}$$

Т а р з и 2. Сурат ва махраҷи ифодаро ба $\sin\alpha$ тақсим мекунем:

$$\frac{2\sin\alpha-\sin2\alpha}{2\sin\alpha+\sin2\alpha}=\frac{\frac{2\sin\alpha}{\sin\alpha}-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{2\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2(1-\cos\alpha)}{2(1+\cos\alpha)}=$$

Мувофиқи айниятҳои тригонометрии нисфи кунҷ $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ ва $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ навишта метавонем:

$$=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=tg^2\frac{\alpha}{2}$$

Мисоли 4. Ифодаро ба намуди ҳосили зарб нависед:

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

Ҳал. Аз рӯи формулаи $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ифодаро табдил медиҳем: $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=$ ифодаҳои дар қавс буда табдилдиҳиҳои маълуманд, ба онҳо формулаҳои фарқ ва суммаи синуси ду кунҷро, ки ба зарб табдил дода шудаанд, татбиқ мекунем:

$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

Аз формулаи синуси кунҷи дучанда истифода мебарем:

$$= \sin 2 \cdot \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin 2 \cdot \frac{\alpha-\beta}{2} = \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta)$$

Ба ҳамин тариқ, $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta)$ будааст.

Мисоли 5. Айниятро исбот кунед:

$$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Исбот. Қавсҳоро мекушоем. Гурӯҳбандӣ намуда, формулаи фарқи синуси ду аргументро истифода мебарем:

$$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = \sin\alpha^2 + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta +$$

$$+ \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) +$$

$$+ (\sin^2\beta + \cos^2\beta) + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) =$$

$$= 2 + 2\cos(\alpha-\beta) = 2(1+\cos(\alpha-\beta)) = 2 \cdot 2 \cdot \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

?

1. Чӣ гуна табдилдиҳиро табдилдиҳии айниятии тригонометрӣ меноманд?
2. Табдилдиҳиҳои маълуми тригонометрӣ барои табдилдиҳиҳои айниятии ифодаҳои тригонометрӣ ҳамчун нишонаҳои муайянкунанда хизмат мекунанд. Шумо инро чӣ тавр маънидод мекунед?

Машқҳо

Ҳисоб кунед ($50^\circ - 52^*$)

50°. а) $\sin 135^\circ$; б) $\cos 135^\circ$; в) $\cos 105^\circ$; г) $\sin 75^\circ$.

51. а) $\sin\frac{13\pi}{12}$; б) $\cos\frac{5\pi}{12}$;

в) $\sin 21^\circ \cdot \cos 9^\circ + \cos 21^\circ \cdot \sin 9^\circ$;

г) $\cos 32^\circ \cdot \cos 58^\circ - \sin 32^\circ \cdot \sin 58^\circ$.

52^*. а) $\cos 105^\circ + \cos 75^\circ$;

б) $\sin 278^\circ \cdot \cos 68^\circ - \cos 278^\circ \cdot \sin 68^\circ$;

в) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$; г) $\cos^2 \frac{7\pi}{12} - \sin^2 \frac{7\pi}{12}$.

Содда кунед (53°–55*):

53°. а) $\sin 12^\circ \cdot \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cdot \cos 12^\circ$; б) $2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$;

в) $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot tg\alpha$;

г) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

54. а) $\dfrac{\cos^2 \alpha - ctg^2\alpha}{tg^2\alpha - \sin^2 \alpha}$; б) $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha} - tg^2\alpha - \sin^2 \alpha$;

в) $\dfrac{tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \cdot \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{ctg\alpha}$; г) $\dfrac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos\alpha} - \cos\alpha$.

55*. а) $\sin^2 26^\circ - \sin^2 64^\circ$; б) $2\sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ$;

в) $\cos^4 \alpha - 6\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$;

г) $\cos 4\alpha + \sin 4\alpha \cdot tg 2\alpha$.

Айниятҳоро исбот кунед (56°–58*):

56°. а) $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot tg\alpha = tg\alpha$;

б) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$;

в) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha = 1$;

г) $4\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$.

57. а) $\sin 2\alpha - tg\alpha = \cos 2\alpha \cdot tg\alpha$; б) $(tg\alpha + ctg\alpha) \cdot \sin 2\alpha = 2$;

в) $1 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin 2\alpha$; г) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$.

58*. а) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3 \alpha$; б) $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos\alpha$;

в) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = 2$; г) $\dfrac{\cos^3 \alpha - \sin 3\alpha}{1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$.

§ 7. Функсияҳои тригонометрии аргументаш ададӣ

Дар системаи координатаи декартӣ давраи воҳидиеро мекашем, ки маркази он дар ибтидои координат воқеъ бошад.

Нуқтаи сарҳисобро бо M_0 ишорат мекунем. Ба он координатаи (1;0) мувофиқ меояд (расми 2). Бигузор нуқтаи M аз рӯи давра ҳаракат кунад. Ҳангоми дар атрофии марказ 0 ба кунҷи α давр задан ин нуқта ҳолати M_α-ро мегирад. Координатаи онро бо x ва y ишорат мекунем:

Таъриф. Синуси адади α гуфта ординатаи нуқтаи M_α ва косинуси адади α абсциссаи нуқтаи M_α-ро меноманд, ки дар давра ба ин адад мувофиқ меоянд.

Менависанд: $\sin\alpha = y;\ \cos\alpha = x.$ (1)

Нуқтаи M_α бошад намуди зеринро мегирад: $M_\alpha(\cos\alpha;\sin\alpha)$. Аз расм айён аст, ки барои координатаҳои нуқтаи дилхоҳи давраи воҳидӣ $M_\alpha(x;y)$ муодилаи $x^2+y^2=1$ ҷой дорад.

Агар муносибатҳои (1)-ро ба назар гирем

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \quad (2)$$

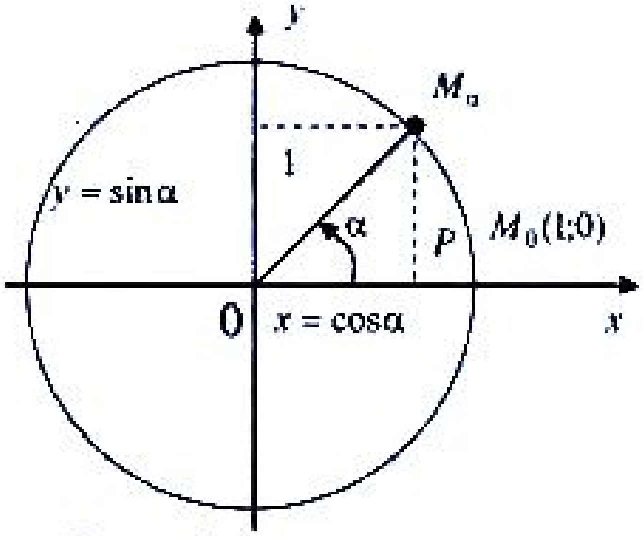
мешавад. Формулаи (2)-ро **айнияти асосии тригонометрӣ** меноманд.

Таъриф. Тангенси адади α гуфта нисбати ордината ба абсциссаро меноманд.

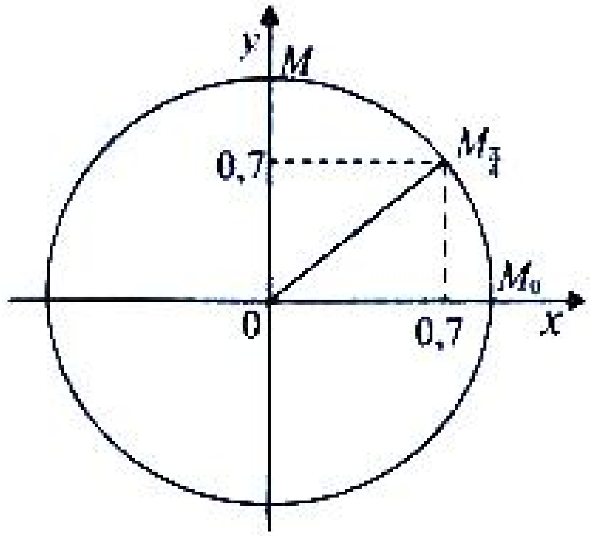
Мувофиқи таъриф $tg\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\right).$

Котангенси адади α гуфта нисбати абсцисса ба ординатаро меноманд.

Аз рӯи таъриф $ctg\alpha=\dfrac{x}{y}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad(\alpha\neq\pi n, n\in Z).$



Расми 2



Расми 3

Аз ин таърифҳо **қоида** (алгоритм)-и зерини дода шудани функсияҳои тригонометрӣ бармеояд:

1. ба адади α нуқтаи мувофиқи давраро меёбем;
2. координатаҳои нуқтаро чен мекунем;
3. нисбатҳои матлубро маълум месозем.

Мисол меорем.

Қимати функсияҳои тригонометриро барои адади $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ёбед.

Ҳал. Давраи воҳидӣ месозем (расми 3). Камони $M_0M = \frac{\pi}{2}$ аст. Аз нуқтаи сарҳисоб M_0 ба равиши мусбат ҳаракат карда адади $\frac{\pi}{4}$-ро қайд мекунем ки ба он нуқтаи $M_{\frac{\pi}{4}}$ рост меояд ва дар нисфи камони MM_0 ҷойгир мешавад. Координатаҳои онро чен карда меёбем: $x \approx 0{,}7$; $y \approx 0{,}7$.

Он гоҳ, навишта метавонем: $M_{\frac{\pi}{4}}(0{,}7; 0{,}7)$.

Пас, $\cos\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7$; $\sin\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7$; $tg\frac{\pi}{4} = ctg\frac{\pi}{4} = 1$.

$$tg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}:0{,}86\approx 0{,}58;\;\; ctg\frac{\pi}{6}=0{,}86:\frac{1}{2}\approx 1{,}72.$$

Қимати тақрибии функсияҳои тригонометрӣ аз рӯи микрокалкуляторҳо ва ҷадвалҳои махсус (В.М.Брадис. Ҷадвалҳои чоррақамаи математикӣ) муайян карда мешаванд.

Оё қиматҳои функсияҳои тригонометриро донистан зарур аст? Бале, лозиманд. Ҳангоми муайян намудани нишебии обдави бом, нишебиҳои роҳ, моилии зинапояи хонаҳои истиқоматӣ, моилии пахлӯи хандақ, баландии предметҳои дастнорас ва ғ. лозим меояд, ки кунҷҳои моилӣ ҳисоб карда шаванд. Ин корро танҳо бо ёрии ҳисоб намудани қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ ба ҷо овардан мумкин аст.

Бо кунҷҳои $0°(0)$, $30°(\frac{\pi}{6})$, $45°(\frac{\pi}{4})$, $60°(\frac{\pi}{3})$, $90°(\frac{\pi}{2})$, $180°(\pi)$, $270°(\frac{3\pi}{2})$, $360°(2\pi)$ минбаъд ҳар лаҳза вомехӯрем. Аммо барои ин кунҷҳо қиматҳои ҳамаи функсияҳои тригонометриро ба хотир гирифтан шарт нест.

Дар ин бобат, фаромӯш набояд кард, ки:

1. аз рӯи формулаҳои мувофиқоварӣ кимати функсияи тригонометрии адади дилхоҳро бо ёрии функсияи кунҷе, ки дар ҳамон як чоряк мехобанд, табдил дода ҳисоб кардан мумкин аст;

2. агар қимати яке аз функсияҳои тригонометрӣ маълум бошад, аз рӯи айниятҳои асосӣ ва чоряке, ки дар он қимати аргумент шомил аст, қимати функсияҳои тригонометрии боқимондаро муайян кардан душвор нест;

3. донистани қимати функсияҳои тригонометрӣ барои кунҷҳои $30°(\frac{\pi}{6})$, $45°(\frac{\pi}{4})$ ва $60°(\frac{\pi}{3})$ ҳалли аксарияти масъалаҳои амалиро осон мегардонад.

Қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ дар ҷадвали зерин дода шудаанд (Ҷадвали 1):

Ҷадвали 1

Кунҷ α / Номи функсия	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Вуҷуд надорад	0	Вуҷуд надорад	0
$ctg\alpha$	Вуҷуд надорад	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Вуҷуд надорад	0	Вуҷуд надорад

Шарҳ медиҳем, ки ададҳои ҷадвал чӣ тавр ҳосил шудаанд. Фарз мекунем, ки $\alpha = \frac{\pi}{6}$ бошад (нигар ба расми 3). Он гоҳ нуқтаи ҳаракаткунанда ба равиши мусбат бо тири Ox кунҷи $30°\, (\frac{\pi}{6})$ -ро ташкил медиҳад. Дар секунҷаи росткунҷа катете, ки ба муқобили кунҷи $30°$ меҳобад, ба нисфи гипотенуза баробар аст, яъне $y = \frac{1}{2}$.

Аз айнияти $x^2 + y^2 = 1$ меёбем, ки $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пас, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\frac{\pi}{6} = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $ctg\frac{\pi}{6} = \frac{x}{y} = \sqrt{3}$.

Ба ҳамин монанд қиматҳои функсияҳои тригонометрии дигар кунҷҳо ҳисоб карда мешаванд. Тавсия медиҳем, ки Шумо онҳоро ҳисоб кунед.

Мисолҳо.

1. Дода шудааст: $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Қимати функсияҳои $\sin\alpha$, $tg\alpha$ ва $ctg\alpha$-ро ҳисоб кунед.

Ҳ а л. Кунҷи α дар чоряки чорум воқеъ аст; Дар ин чоряк синус манфӣ мебошад. Аз айнияти $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ меёбем:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \quad \text{ва} \quad \sin\alpha=-\frac{4}{5};$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}; \qquad ctg\alpha=-\frac{3}{4}.$$

2. Дода шудааст: $tg\alpha=-2$, $\alpha\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$. Қимати *sina*, *cosa* ва *ctga* -ро ёбед:

Ҳ а л. Айнияти $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$-ро табдил дода $\cos\alpha$-ро ба воситаи $tg\alpha$ ифода мекунем:

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\Rightarrow 1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

Кунҷ ба чоряки сеюм тааллуқ дорад. Косинус, синус дар ин чоряк манфианд.

Пас, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $ctg\alpha=-\frac{1}{2}$.

?

1. Таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенси ададро диҳед.
2. Қоидаи дода шудани функсияҳои тригонометриро баён кунед.
3. Аз рӯи формулаҳои мувофиқоварӣ қимати функсияи тригонометрии дилхоҳро чӣ тавр ёфтан мумкин аст?
4. Ба Шумо таърифи тригонометрии кунҷи тез аз геометрияи синфи 8 маълум аст. Нишон диҳед, ки онҳо ҳолати хусусии таърифҳои дар § 7 баён гардида ҳисоб мешаванд.

Машқҳо

Ҳисоб кунед ($59^{\circ}-61^{*}$):

59°. а) $\sin 150^{\circ}$; б) $\cos\frac{2\pi}{3}$; в) $tg120^{\circ}$;

г) $ctg135^{\circ}$; д) $5\sin 90^{\circ}+2\cos 0^{\circ}-2\sin 270^{\circ}+10\cos 180^{\circ}$;

60. а) $\cos 2\frac{2}{3}\pi$; б) $\sin(7\pi+\frac{\pi}{6})$; в) $tg\frac{4\pi}{3}$;

г) $ctg\frac{11\pi}{6}$; д) $4\sin\pi-2\cos\frac{3\pi}{2}-tg\pi+\cos\pi-\cos 0$;

61*. а) $\cos^2\frac{77\pi}{4}$; б) $\sin 930^{\circ}-\cos^2(-675^{\circ})+tg^2 855^{\circ}$;

в) $a^3tg\frac{\pi}{4}+a^2btg^2\frac{\pi}{3}+9ab^2ctg^2\frac{\pi}{3}-2b^2\cos\frac{\pi}{6}$.

62. (Шифоҳӣ). қиматҳои функсияи $y=\frac{8}{x-2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}$-ро ҳисоб кунед, агар $x=1, 2, 3, 4$ бошад.

Аз рӯи қимати яке аз функсияҳо қимати се функсияи боқимондаро ёбед ($63^{\circ}-66^{*}$):

63°. $\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \alpha\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$;

64. $tg\alpha=-\frac{1}{3},\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

65. $\cos\alpha=\frac{12}{13},\ \alpha\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$;

66*. $ctg\alpha=-\frac{5}{12},\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Оё ҳамингуна адади α вуҷуд дорад, ки барои он баробариҳои зерин ҷой дошта бошанд? ($67^{\circ}-69^{*}$):

67*. а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; б) $tg\alpha = \frac{1}{3}$, $ctg\alpha = 3$.

68. а) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = 0,5$; б) $tg\alpha = 1+\sqrt{2}$, $ctg\,\alpha = -1$.

69*. а) $\sin\alpha = \frac{36}{85}$, $\cos\alpha = -\frac{77}{85}$; б) $tg\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, $ctg\alpha = 3\sqrt{2}-4$.

§ 8. Функсияҳои даврӣ

Функсияҳои тригонометрӣ – функсияҳои даврианд.

Таъриф. Функсия даврӣ ном дорад, агар ҳамингуна ададӣ $T \neq 0$ вучуд дошта бошад, ки илова ва ё кам намудани он ба қимати дилхоҳи аргумент қимати функсияро тағйир надиҳад.

Менависанд: $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$.

Т е о р е м а. Адади 2π даври синус ва косинус аст.

Исбот. Нишон медиҳем, ки $\cos(x+2\pi) = \cos x$ ва $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

Дар ҳақиқат, ҳангоми ҳаракат кардани нуқта аз рӯи давра ба ҳар як нуқтаи M_x нуқтаи $M_{x+2\pi}$ рост меояд (ба монанди расми 2). Ин нуқтаҳо бо координатаҳояшон намуди зайлро мегиранд:

$$M_x(\cos x; \sin x) \text{ ва } M_{x+2\pi}(\cos(x+2\pi); \sin(x+2\pi)).$$

Азбаски ин нуқтаҳо болои ҳам меафтанд, координатаҳои низ бо ҳам мувофиқанд, яъне:

$$\cos x = \cos(x+2\pi); \quad \sin x = \sin(x+2\pi).$$

Теорема исбот шуд.

Қайд кардан лозим аст, ки қимати косинус (синус) барои нуқтаи дилхоҳи давра такрор шуда меистад, агар он ба адади бутуни гардишҳо давр занад, яъне

$$\cos x = \cos(x+2\pi n), \quad \sin x = \sin(x+2\pi n), \quad n \in Z.$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки адади $2\pi n (n \in Z)$ ҳам даври косинус (синус) будааст.

Н а т и ҷ а. Косинус ва синус даври беохир доранд. Дар байни ин даврҳо адади 2π мақоми махсус дорад, зеро он даври хурдтарини мусбати косинус (синус) мебошад. Дар воқеъ, қимати хурдтарини мусбати Т бояд кадом адад бошад, то ки $\cos x = \cos(x+T)$ шавад?

Фарз мекунем, ки нуқта дар ҳолати $M_{\frac{\pi}{2}}(x=\frac{\pi}{2})$ воқеъ аст, онгоҳ $\cos\frac{\pi}{2}=0$. Ғайр аз ин $\cos\frac{\pi}{2}=\cos(\frac{\pi}{2}+T)=0$. Ин вазъият ҳамон вақт имкон дорад, ки агар T аз 2π хурд набошад, яъне $T=2\pi$. Пас, адади 2π - даври хурдтарини мусбати косинус будааст.

Агар ҳаракати нуқта ба равиши манфӣ сурат гирад, он гоҳ $\cos x = \cos(x-2\pi)$, яъне адади -2π даври хурдтарини манфии косинус аст.

Ба ҳамин монанд муқаррар кардан мумкин аст, ки даври хурдтарини мусбати синус адади 2π мебошад.

Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки:

$$tgx=\frac{\sin(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)}=\frac{\sin x}{\cos x}; \quad ctgx=\frac{\cos(x+2\pi)}{\sin(x+2\pi)}=\frac{\cos x}{\sin x},$$

яъне, яке аз даврҳои тангенс (котангенс) адади 2π аст.

М и с о л ҳ о.

1. Исбот намоед, ки функсияҳои зерин даврӣ буда, даври мусбати хурдтаринашон Т аст:

а) $f(x)=\cos(x+\frac{2\pi}{3}), \quad T=2\pi.$

б) $f(x)=\sin\frac{4x}{5}, \quad T=\frac{5}{2}\pi.$

Ҳ а л. а) $f(x+2\pi)=\cos\left((x+2\pi)+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+2\pi\right)=$

$$= \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$$

пас, даври функсия 2π будааст.

б) $f\left(x + \frac{5}{2}\pi\right) = \sin\frac{4}{5}\left(x + \frac{5}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{4}{5}x + \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}\pi\right) =$

$= \sin\left(\frac{4}{5}x + 2\pi\right) = \sin\frac{4}{5}x.$

Шарти $f(x+T) = f(x)$-ро қаноат кард, бинобар ин даври функсия $T = \frac{5}{2}\pi$ будааст.

2. Даври мусбати хурдтарини функсияҳоро ёбед:

а) $f(x) = \sin\frac{3}{2}x;$ б) $f(x) = \sin\frac{x}{4} + 5\cos\frac{2x}{3}.$

Ҳ а л. а) Мувофиқи шарти даврӣ будани функсия менависем:

$$f(x+T) = \sin\frac{3}{2}(x+T) = \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{3T}{2}\right) = \sin\left(\frac{3x}{2} + 2\pi\right) = f(x).$$

Аз ин ҷо: $\frac{3T}{2} = 2\pi$ ва $T = \frac{4\pi}{3}$-даври функсия будааст.

б) Аввал даври ҳар як ҷамъшавандаҳоро меёбем:

$$f_1(x+T) = \sin\frac{1}{4}(x+T) = \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{T}{4}\right) = \sin\left(\frac{x}{4} + 2\pi\right) = f_1(x).$$

Аз ин ҷо: $\frac{T}{4} = 2\pi,\ T = 8\pi$ даври $f_1(x)$.

$$f_2(x+T) = 5\cos\frac{2}{3}(x+T) = 5\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{2T}{3}\right) = 5\cos\left(\frac{2}{3}x + 2\pi\right) = f_2(x);$$

$\frac{2T}{3} = 2\pi,\quad T = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$ даври $f_2(x)$.

Даври функсияи додашуда хурдтарин каратии умумии ададҳои 8π ва 3π мешавад, ки он ба 24π баробар аст.

Ба хотир мегирем:

Агар функсия аз суммаи функсияҳои бефосила ва даврӣ иборат бошад, даври он ба хурдтарин каратии умумии даврҳои ҷамъшавандаҳо баробар аст.

Дар китоби дарсии алгебраи синфи 9 хосиятҳои дигари функсияҳои тригонометрӣ – аломатҳо, ҷуфту тоқ будани онҳо нишон дода шуда, формулаҳои мувофиқоварӣ исбот гардида буданд.

Онҳоро хотирнишон мекунем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha;$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha, \quad ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha, \quad ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha;$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha, \quad \cos(\pi-\alpha)=\cos\alpha;$$

$$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha, \quad ctg(\pi-\alpha)=-ctg\alpha;$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha, \quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha;$$

$$tg(\pi+\alpha)=tg\alpha, \quad ctg(\pi+\alpha)=ctg\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha, \quad ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha;$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha, \qquad ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha.$$

Доир ба татбиқи ин формулаҳо якчанд мисол меорем.

1. Дар намуди функсияи тригонометрии кунҷи тез нависед: $\cos 1914^\circ$

Ҳ а л. Табдил медиҳем:

$$\cos 1914^\circ=\cos(5\cdot 360^\circ+114^\circ)=\cos 114^\circ=\cos(90^\circ+24^\circ).$$

Кунҷи $90^\circ+24^\circ$ ба чоряки II ворид буда, дар ин чоряк косинус аломати манфӣ дорад ва мувофиқи формулаи $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ меёбем:

$$\cos 1914^\circ=\cos(90^\circ+24^\circ)=-\sin 24^\circ.$$

2. Ҳисоб кунед: $3\sin\frac{25\pi}{6}$.

Ҳ а л. $\frac{25\pi}{6}$-ро ин тавр менависем: $\frac{25\pi}{6}=4\pi+\frac{\pi}{6}$.

Он гоҳ, $3\sin\frac{25\pi}{6}=3\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\frac{\pi}{6}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

3. Ифодаро содда кунед: $\dfrac{\sin^2(\pi-\alpha)}{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}-\cos(2\pi-\alpha)$.

Ҳ а л. Мувофиқи формулаҳои $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$,

$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$ ва $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$ навишта метавонем:

$$\frac{\sin^2(\pi-\alpha)}{1+\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}-\cos(2\pi-\alpha)=\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}-\cos\alpha=$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=1.$$

?

1. Даври функсияҳои синус ва косинус кадом адад аст?
2. Оё адади 2π даври функсияҳои тангенс ва котангенс ҳисоб шуда метавонанд?
3. Даври мусбати хурдтарини функсияҳои тригонометриро чӣ тавр муайян мекунанд?

Машқҳо

Дурустии баробариҳоро нишон диҳед (70° – 72):

70°. а) $\sin(2\pi+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}$; б) $\cos(4\pi+\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6}$.

71. а) $\sin\frac{38\pi}{9}=\sin\frac{2\pi}{9}$; б) $\cos(-\frac{50\pi}{9})=\cos\frac{4\pi}{9}$.

72. а) $\cos\frac{57\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}$; б) $\sin\frac{22\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}$.

Айниятҳоро исбот кунед (73° – 75):

73°. а) $\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$; б) $\sin(\alpha+\pi)=\sin(\alpha-\pi)$;

в) $tg(3\alpha+2\pi)=tg3\alpha$; г) $ctg(\alpha+\pi)=ctg(\alpha-\pi)$.

74. а) $\sin(\alpha+\frac{5\pi}{3})=\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})$; б) $\cos(5\pi-\alpha)=\cos(3\pi-\alpha)$;

в) $tg(4\alpha-3\pi)=tg(4\alpha+3\pi)$; г) $ctg(\alpha+\frac{3\pi}{2})=ctg(\alpha-\frac{3\pi}{2})$.

75. а) $3\sin4\alpha+6\sin\alpha+\sin(\alpha-\pi)+5\sin(\alpha+\pi)=3\sin4\alpha$;

б) $\sin(-\frac{41\pi}{6})\cdot\sin\frac{19\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Даври функсияҳоро ёбед ($76^\circ - 78$):

76°. а) $y=\sin 2\alpha$; б) $y=2\cos\alpha$; в) $y=tg3\alpha$; г) $y=ctg\alpha$.

77. а) $y=\cos\frac{\alpha}{2}$; б) $y=2\sin 5\alpha$; в) $y=2tg3\alpha$; г) $y=ctg\frac{1}{2}\alpha$.

78. а) $y=\sin\alpha+\cos\alpha$; б) $y=\sin 2\alpha+\cos 4\alpha$; в) $y=\sin\alpha+tg\alpha$.

Аломати қиматҳои функсияҳои тригонометриро муайян кунед ($79^\circ - 81$):

79°. а) $\sin\frac{\pi}{2}$; б) $\cos 0$; в) $tg\frac{3\pi}{2}$; г) $ctg\pi$.

80. а) $\sin\frac{5\pi}{3}$; б) $\cos(-\frac{3\pi}{4})$; в) $tg\frac{7\pi}{5}$; г) $tg\frac{3\pi}{5}$.

81. а) $\cos(-\frac{4\pi}{8})$; б) $\sin(-\frac{7\pi}{12})$; в) $tg(-\frac{7\pi}{5})$; г) $ctg2$.

Кадомаш калон аст (шифоҳӣ):

82. а) $\cos 20^\circ$ ё ин ки $\cos^2 20^\circ$? б) $tg46^\circ$ ё ин ки $tg^2 46^\circ$?

в) $tg\frac{4\pi}{15}+tg(-\frac{4\pi}{15})$ ё ин ки $3\cos 25^\circ-3\cos(-25^\circ)$?

г) $2\cos(-\frac{\pi}{2})-2\cos\frac{\pi}{2}$ ё ин ки $\sin\frac{3\pi}{10}+\sin(-\frac{3\pi}{10})$?

Аломати функсияҳоро маълум кунед ($83^\circ - 85$):

83°. а) $\cos 179^\circ$; б) $\sin(-272^\circ)$; в) $tg200^\circ$; г) $ctg185^\circ$.

84. а) $\sin 2012^\circ$; б) $\cos 10\pi$; в) $tg512^\circ$; г) $ctg(-5{,}6\pi)$.

85. а) $\cos(-0{,}5)\cdot tg2{,}4\cdot\sin(-\pi)$; б) $\sin(-4{,}2)\cdot\cos(-5{,}6)\cdot\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Кадомаш калон аст?

86*. а) $\sin\frac{2\pi}{9}$ ё ин ки $\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$?;

б) $\sin\frac{11\pi}{36}$ ё ин ки $\sin^2(\frac{11\pi}{36})$?.

в) $\cos\frac{7\pi}{9}$ ё ин ки $ctg\frac{27\pi}{9}$?; г) $\sin\frac{17\pi}{9}$ ё ин ки $tg\frac{17\pi}{9}$?.

Муайян кунед, ки кадоме аз функсияҳои зерин ҷуфт ва кадомашон тоқанд (87^{0} – 89):

87^{0}. а) $y = 2\sin\alpha$; б) $y = -\cos\alpha$; в) $y = -tg\alpha$; г) $y = \frac{1}{2}ctg\alpha$.

88. а) $y = a^2 - \cos\alpha$; б) $y = a\cdot\sin\alpha$;

в) $y = \frac{\cos\alpha}{tg\alpha}$; г) $y = tg\alpha + ctg\alpha$.

89. а) $y = \frac{a^3}{\cos\alpha}$; б) $y = a + \frac{a^2}{\sin\alpha}$;

в) $y = \sin\alpha + \cos\alpha$; г) $y = \sin(\cos\alpha)$.

§ 9. Тадқиқи функсияҳои тригонометрӣ

1. Функсияи $y = sinx$, хосиятҳо ва графики он

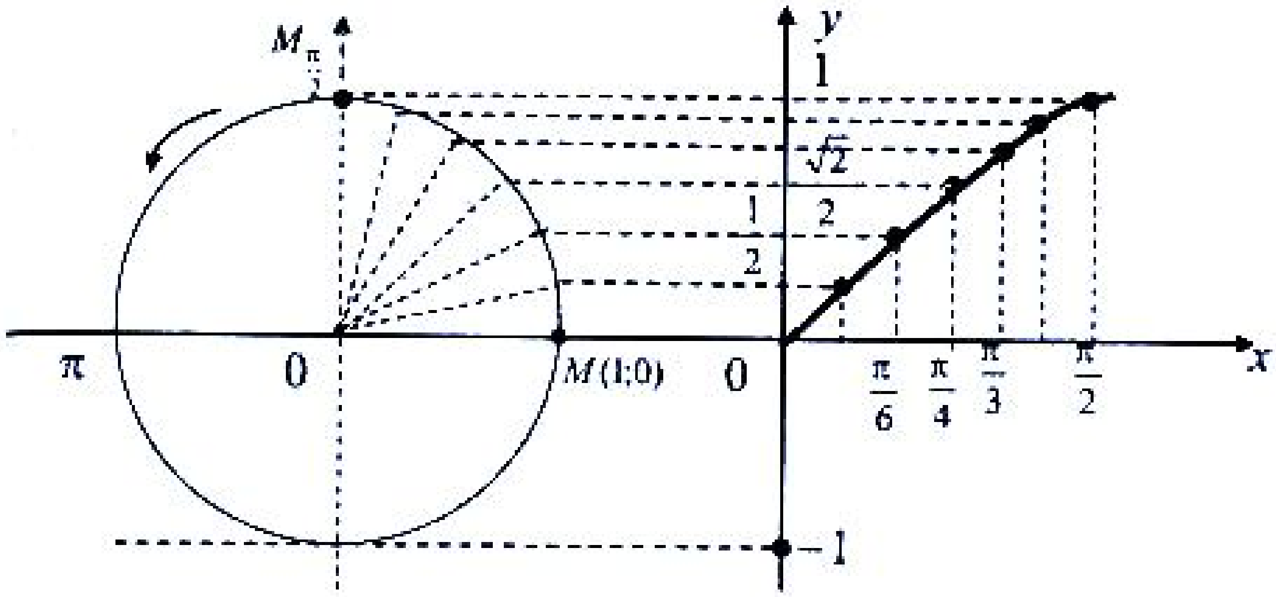
Функсияи $y = sinx$-ро дида мебароем.

Аз таърифи синус истифода намуда, графики онро месозем. Дар тарафи чапи системаи координати декартӣ давраи воҳидӣ мекашем.

Ба ин мақсад чоряки давра ва порчаи $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-и тири абсциссаро ба шаш қисми баробар тақсим мекунем (расми 4).

Аз нуқтаҳои тақсимот ба тири абсцисса хатҳои параллелӣ мегузаронем. Дар тири Ox кунҷҳои $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ -ро қайд мекунем. Аз ин нуқтаҳо то ба буриши хатҳои параллелии гузаронидашуда перпендикулярҳо мефарорем.

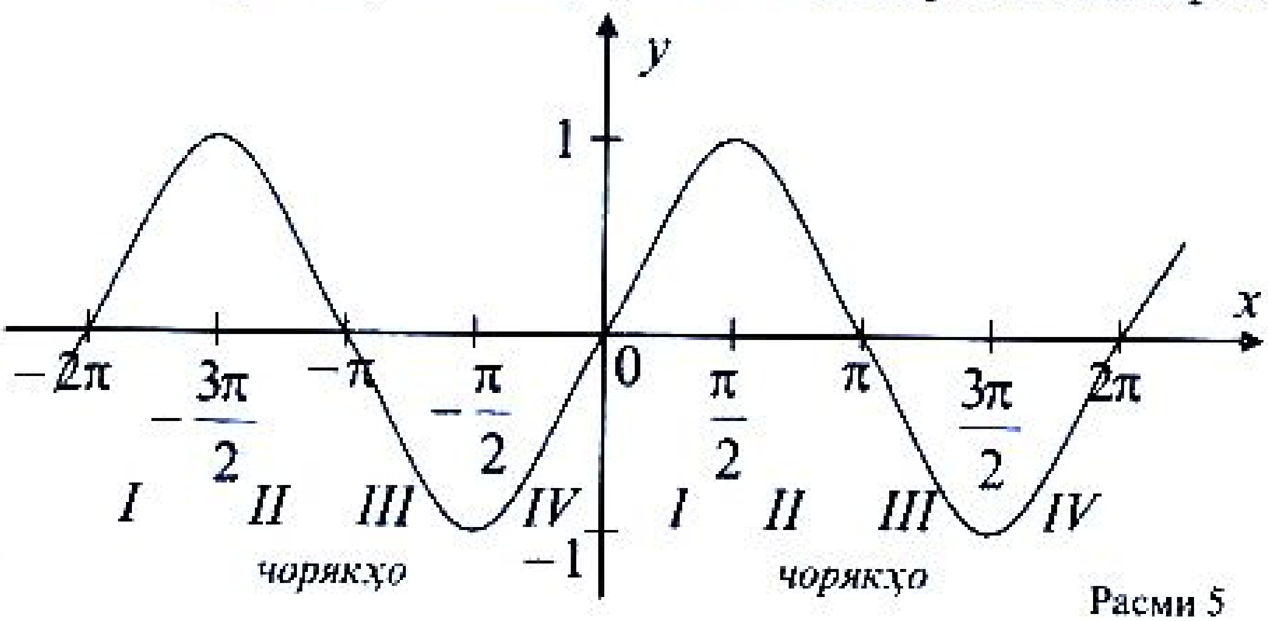
Агар ин нуқтаҳоро паи ҳам пайваст намоем графики синус дар фосилаи $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ҳосил мешавад. Азбаски нуқтаҳои тарафи рост (чоряки I) ва чапи давра (чоряки II) бо ҳам симметрианд, бинобар ин графики синус нисбат ба хати



рости $x = \frac{\pi}{2}$ симметрӣ мебошанд. Ин имконият медиҳад, ки графики синусро дар фосилаи $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ созем. Ҳамин тавр, симметрӣ ҷойгиршавии нуқтаҳои давра дар чорякҳои III ва IV графики синусро дар фосилаи $[\pi;2\pi]$ ба вуҷуд меорад.

Мо танҳо як қисми графики $y = \sin x$-ро, ки ба фосилаи $[0;2\pi]$ рост меояд сохтем. Бо сабаби даври будани функсияи синус қисми дуюми график, дар фосилаи $[2\pi;4\pi]$, ки бо якум якхела аст, сохта мешавад.

Агар тоқ будани синусро ба инобат гирем ва пиндорем,



Расми 5

ки нуқта M_α ба муқобили равиши ақрабаки соат ҳаракат мекунад, онгоҳ дар фосилаи $[0;-2\pi]$ қиматҳои синус ҳамон тавр такрор меёбанд, ки ба тағйирёбии қиматҳои он дар фосилаи $[0;2\pi]$ баръакс мебошанд (расми 5).

Хати каҷи ҳосилшударо соли 1639 математики фаронсавӣ Ф а б р ӣ синусоида номида буд.

Акнун графики сохташударо мехонем ва мувофиқи тартиби умумии тадқиқи функсия хосиятҳои асосии функсияи синусро муқаррар мекунем.

1. Соҳаи муайянӣ – маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ R.

2. Соҳаи қиматҳо – порчаи $[-1;1]$, зеро проексияҳои нуқтаҳои график ба тири ордината пурра ба ин порча тааллуқ доранд.

3. Сифрҳо (решаҳо)-и функсия - $x = \pi k,\ k \in Z$. Ин нуқтаҳои буриши синусоида бо тири абсисса мебошанд.

4. Фосилаҳои аломати доимӣ дошта:

- дар фосилаи $[2\pi k;\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$ функсия мусбат $(\sin x > 0)$ аст; ба он чоракҳои I-II рост меояд;

- дар фосилаи $[-\pi + 2\pi k;2\pi k]$, $k \in Z$ синус манфӣ $(\sin x < 0)$ мебошад; ба он чоракҳои III-IV мувофиқ аст.

! **Ба он эътибор медиҳем, ки дар наздикии нуқтаи x = 0 синусоида ба биссектрисаи кунҷҳои координатии I ва III тақрибан мувофиқанд. Бинобар ин, дар сурати хурд будани қиматҳои ададии x аз рӯи бузургии мутлақ $\sin x \approx x$ мешавад.**

5. Нуқтаҳои экстремуми функсия:

- қимати калонтарини синус баробари 1 аст, агар

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\quad k \in Z;$$

- қимати хурдтарини синус баробари – 1 аст, агар

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\quad k \in Z.$$

6. Фосилаҳои монотонӣ:

- дар фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, ки он ба чорякҳои IV-I давраи воҳидӣ мувофиқ меоянд, функсияи синус меафзояд;

- дар фосилаи $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, ки он ба чорякҳои II-III мувофиқ аст, функсияи $y = \sin x$ кам мешавад.

7. Функсияи $y = sinx$ тоқ аст, яъне графики синусоида нисбат ба ибтидои координата симметрӣ мебошад.

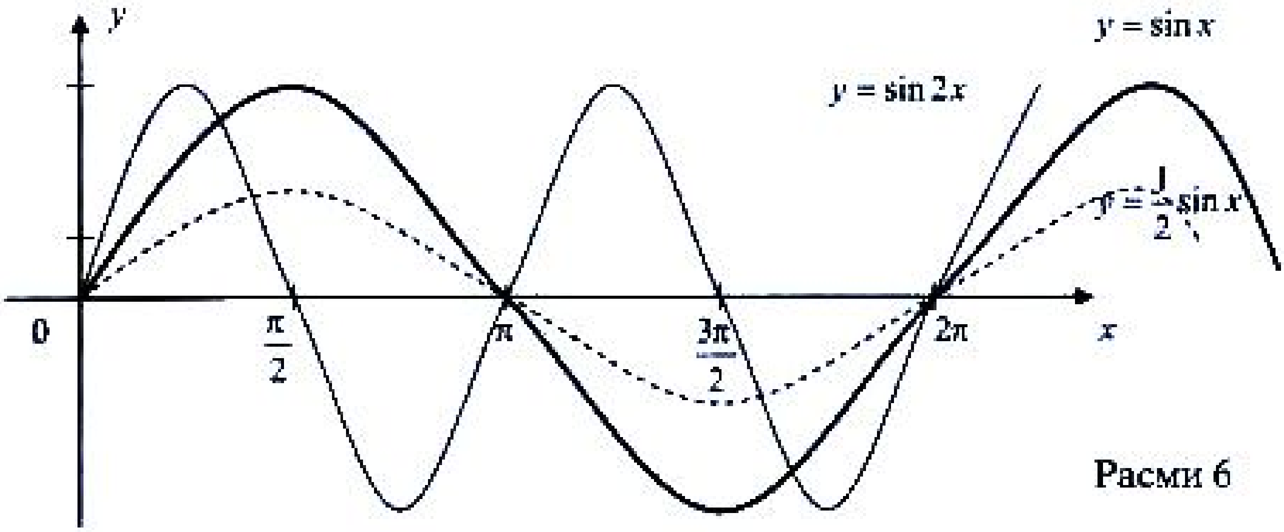
8. Функсияи $y = sinx$ - функсияи даврӣ аст. Аз график бармеоянд, ки агар тири x-ро бо порчаҳои дарозиашон ба 2π баробар (онҳоро нуқтаҳои $...-4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, ...$ ифода мекунад) тақсим кунем, онгоҳ тамоми график ба қисмҳои яккхела ҷудо мешавад. Ва ин қисмҳо аз ҳамдигар дар натиҷаи параллелкӯчонӣ аз рӯи тири абсисса ба амал меоянд. Адади 2π бошад – даври хурдтарини мусбати синус аст.

Агар қимати синус ба ягон адад зарб карда шавад ($y = a\sin x$), онгоҳ графики он ба графики $y = \sin x$ мувофиқ меояд. Ҳангоми $a > 1$ будан, графики $y = a\sin x$ дар натиҷаи a маротиба дароз кардани графики функсияи синус қад-қади тири y ҳосил мешавад. Дар сурати $0 < a < 1$ будан, графики синусро ба дарозии тири ордината $\frac{1}{a}$ маротиба фишурда графики $y = a\sin x$-ро ҳосил мекунем.

Ҳамин тавр, агар синусоида (ба мисли асбоби мусиқии гармон) аз рӯи тири x фишурда ва ё дароз карда шавад, графики $y = \sin ax$ ҳосил мегардад.

Мисолҳои табдилдиҳии оддитарини синусоидаҳо дар расми 6 оварда шудаанд.

Синусоида татбиқи амалии зиёд дорад. Дар физика қонуни ҳаракати лапанда, ки номи **лапиши гармоники** (аз



Расми 6

юнонӣ – мувофик) – ро дорад бо формулаи $y = A\sin(\omega x + \alpha)$ муайян карда мешавад. Бузургиҳои доимӣ A, ω, α - маънои физикии муайян доранд: A-амплитудаи лапиш, ω-зудии лапиш, $(\omega x + \alpha)$ - фазаи лапиш ва α -фазаи ибтидоӣ.

2. Функсияи $y = cosx$, хосиятҳо ва графики он

Графики функсияи $y = cosx$-ро ба монанди графики $y = sinx$ сохтан мумкин аст. Аммо айни ҳол беҳтар аст, ки аз формулаи мувофиқоварии $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ истифода барем, зеро графики $y = sinx$ ба мо маълум аст.

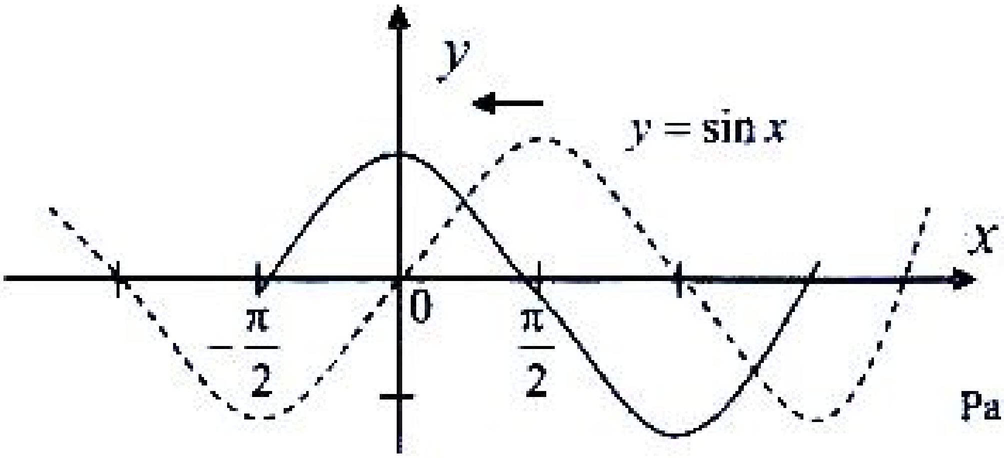
Агар синусоидаро аз рӯи тири Ox ба адади $\frac{\pi}{2}$ ба тарафи чап кӯчонем, графики $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ҳосил мешавад. Ин графики $y = \cos x$ аст (расми 7).

Графики пурраи функсияи $y = \cos x$ дар расми 8 тасвир ёфтааст.

Хосиятҳои асосии функсияи $y = \cos x$ -ро баён мекунем:

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. $E(f) = [-1; 1]$.



Расми 7

3. $\cos x = 0$, агар $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ бошад.

4. Фосилаҳои аломати доими дошта:

$\cos x > 0$, агар $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$

$\cos x < 0$, агар $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$ бошад.

5. Нуқтаҳои экстремуми функсия:

$\cos x = 1$, агар $x = 2\pi k$, $k \in Z$ ва

$\cos x = -1$, агар $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$ бошад.

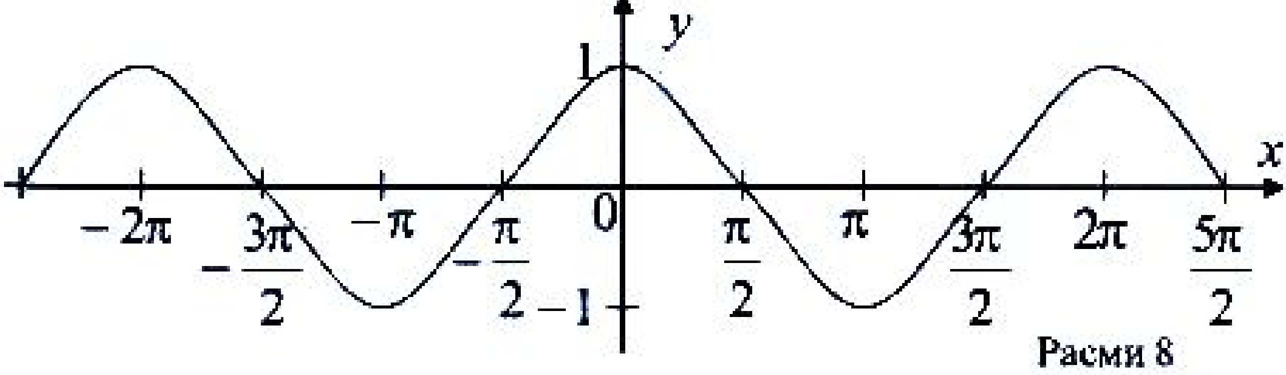
6. Фосилаи монотонӣ

- дар фосилаи $[-\pi + 2\pi k; 0 + 2\pi k]$, $k \in Z$, ки ба чоряқҳои сеюм – чорум рост меояд, функсия меафзояд;

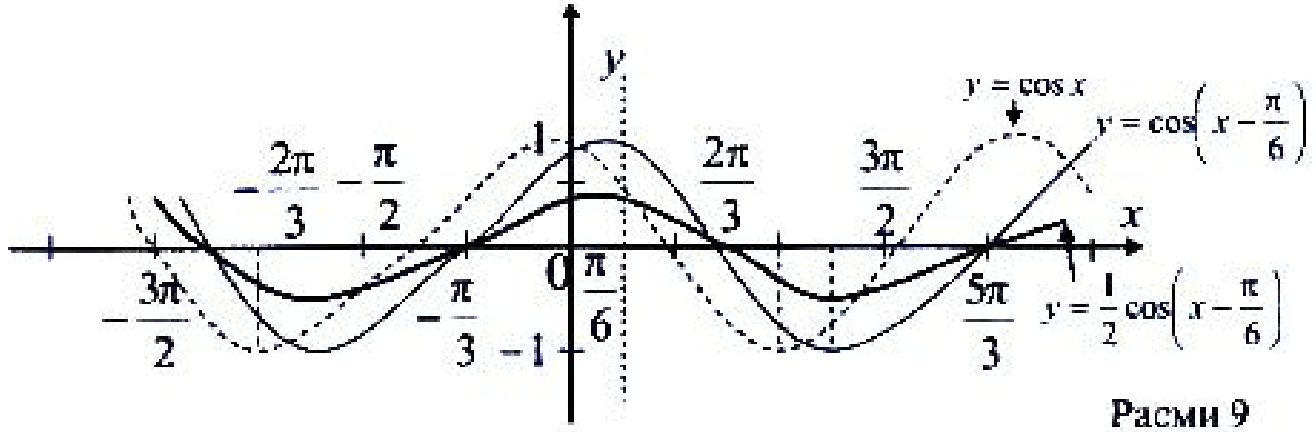
- дар фосилаи $[0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$, ки ба чоряқҳои якум – дуюм мувофиқ аст, функсия кам мешавад;

7. $\cos x = \cos(-x)$.

8. $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$.



Расми 8



Расми 9

Мисол.

1. Функсияи $y = \frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{6})$ -ро тадқиқ карда, графики онро созед.

Ҳал. Методи созиш:

- графики косинусро ба тарафи рост ба адади $\frac{\pi}{6}$ кӯчонида (дар расм ба хати борик тасвир ёфтааст), графики $y = \cos(x - \frac{\pi}{6})$ -ро ҳосил мекунем:

- графики $y = \cos(x - \frac{\pi}{6})$ -ро аз рӯи тири ордината 2 маротиба фишурда, графики матлубро пайдо мекунем (расми 9);

- барои ёфтани сифрҳои функсия муодилаи $\frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{6}) = 0$ -ро ҳал мекунем: $\frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$$x = \frac{2\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

3. Функсияи $tg\, x$, хосиятҳо ва графики он

Мувофиқи таъриф нисбати $\frac{\sin x}{\cos x}$ тангенси адади x -ро маълум мекунад.

Аз рӯи тартиби умумии тадқиқи функсия хосиятҳои онро баён мекунем.

1. **Соҳаи муайянӣ** – маҷмӯи R, бидуни ададҳое, ки дар онҳо $\cos x = 0$ аст, яъне $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

2. **Соҳаи қиматҳо** – маҷмӯи R. Инро нишон медиҳем. Бо ҳамон тарзе, ки графики $y = \sin x$-ро сохта будем, графики тангенсро дар фосилаи $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ месозем (расми 10). Аз ҷадвалҳои В.М.Брадис истифода бурда, ҷадвали зеринро тартиб медиҳем (ҷадвали 2).

Ҳангоми афзудани x аз 0 то $\frac{\pi}{2}$ тангенс меафзояд. Ба замми ин, ҳар қадаре, ки x ба $\frac{\pi}{2}$ наздик шавад, ҳамон қадар $\sin x$ ба 1 ва $\cos x$ ба 0 наздик мешавад. Аз ин рӯ, нисбати $\frac{\sin x}{\cos x}$ ҳамон қадар калон шудан мегирад. Ва графики тангенс бошад ба хати вертикалии $x = \frac{\pi}{2}$ наздик мешавад.

Акнун нишон медиҳем, ки қимати тангенс адади дилхоҳи ҳақиқӣ шуда метавонад. Тиреро месозем, ки ибтидои он дар нуқтаи M_0 воқеъ буда, ба тири ордината параллел мебошад (расми 11). Ин тирро – **тири тангенсҳо** меноманд. Дар он нуқтаи ихтиёрии B-ро мегирем, ки ба адади дилхоҳи a мувофиқояд. Нуқтаи $O(0;0)$-ро ба B пайваст мекунем. Хати

Ҷадвали 2

Қиматҳои аргумент x	0	$\frac{\pi}{12} = 15^\circ$	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{5\pi}{12} = 75^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
Қиматҳои $y = tgx$	0	0,27	0,58	1,73	3,73	Вуҷуд надорад
Афзуншавии tgx	-	0,27	0,31	0,73	2,00	Вуҷуд надорад

рости *OM* аз рӯи нуқтаҳои $O(0;0)$ ва $M(cosx; sinx)$ мегузарад. Ба Шумо аз геометрия (синфи 9) муодилаи хати росте, ки аз болои ду нуқта мегузарад, муаълум аст. Муодилаи он намуди зеринро мегирад: $y = xtgx$. Абсиссаи нуқтаи *B*, ки дар ин хати рост меҳобад ба 1 баробар аст. Пас, ординатаи нуқтаи *B* ба tgx баробар мешавад, яъне:

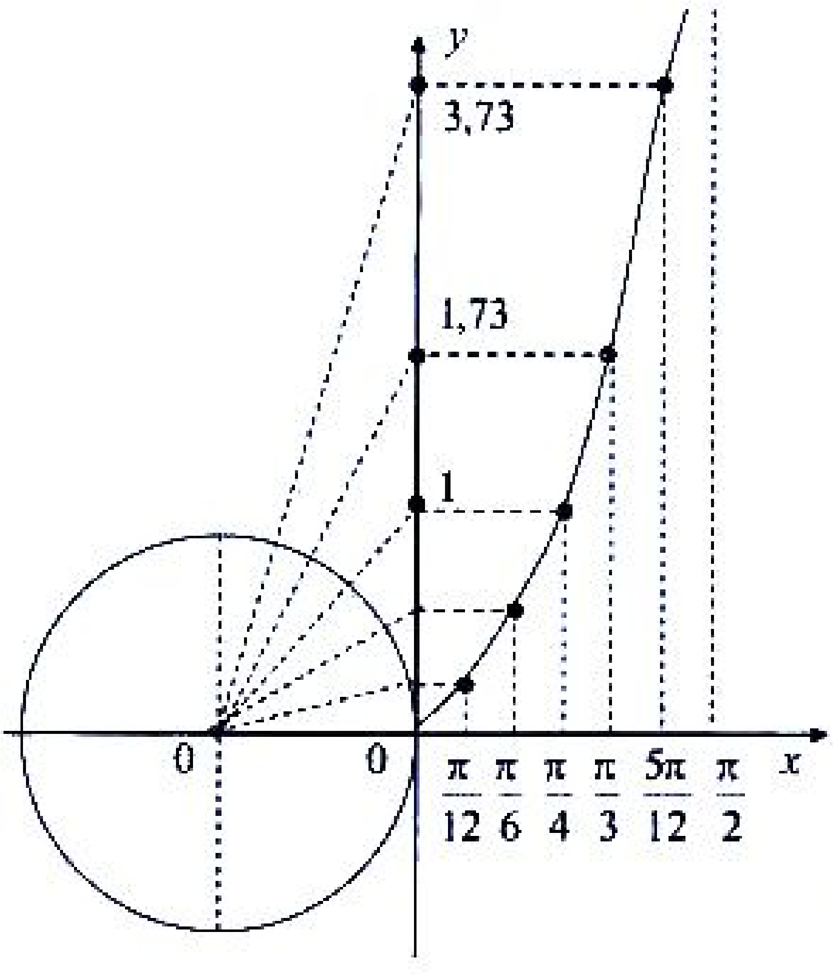
$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{a}{1} = a$$

Бо ҳамин тариқ, соҳаи қиматҳои тангенс ҳамаи ададҳои ҳақиқии *R* будааст.

3. Сифрхои функсия - $x = \pi k,\ k \in Z$, зеро дар ин нуқтаҳо синус ба сифр баробар аст.

4. Фосилаҳои аломати доимӣ дошта:

- дар фосилаи $(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k),\ k \in Z$, ки бо чоряқҳои якум ва сеюм рост меоянд, $tgx > 0$ аст.



Расми 10

- дар фосилаи $(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi k)$, $k\in Z$, ки бо чорякҳои дуюму чорум мувофиқ аст, функсияи $y=tgx$ манфӣ мебошад.

5. Нуқтаҳои экстремуми функсия – қимати калонтарин ва хурдтарин надорад.

6. Тангенс функсияи даврӣ буда, даври хурдтарини он ба π баробар аст:

$$tg(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=tgx.$$

7. Тангенс функсияи тоқ аст, яъне $tg(-x)=-tgx$.

8. Фосилаҳои монотонӣ.

Дар фосилаи $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ ва $\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$, ки ба чорякҳои I ва IV мувофиқ меоянд, функсияи тангенс меафзояд. Дарвоқеъ, агар $0\le x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ бошад, онгоҳ дар ин фосила синус афзуда, косинус кам мешавад, яъне $\sin x_1<\sin x_2$ ва $\cos x_1>\cos x_2$. Аз нобаробарии охирин мебароянд,

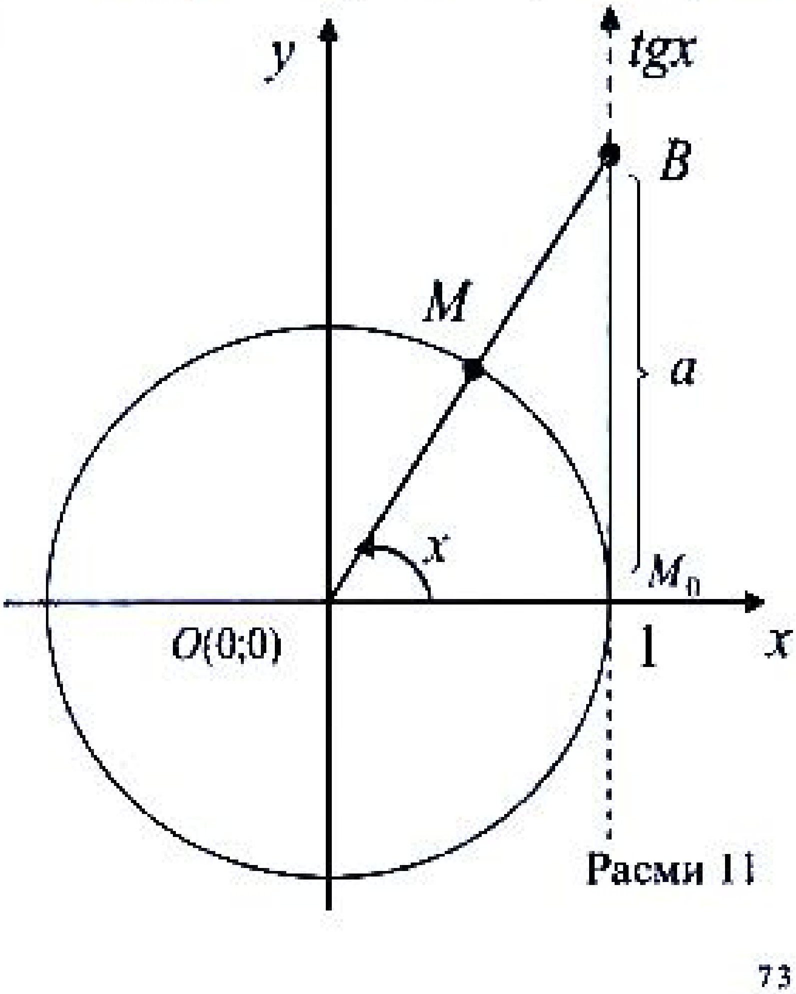
ки $\frac{1}{\cos x_1}<\frac{1}{\cos x_2}$.

Ин нобаробариро бо $\sin x_1<\sin x_2$ зарб карда ҳосил мекунем:

$$tgx_1<tgx_2.$$

Агар $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2\le 0$ бошад, онро дар намуди

$$0\le -x_2<-x_1<\frac{\pi}{2}$$



Расми 11

навишта метавонем. Ин навишт маънои онро дорад, ки ададҳои $(-x_2)$ ва $(-x_1)$ ба чоряки якум таалluқ доранд. Дар ин чоряк тангенс афзуншаванда аст.

Азбаски тангенс функсияи тоқ аст, он гоҳ навишта метавонем:

$$tg(-x_2) < tg(-x_1) \Rightarrow -tgx_2 < -tgx_1 \Rightarrow tgx_1 < tgx_2$$

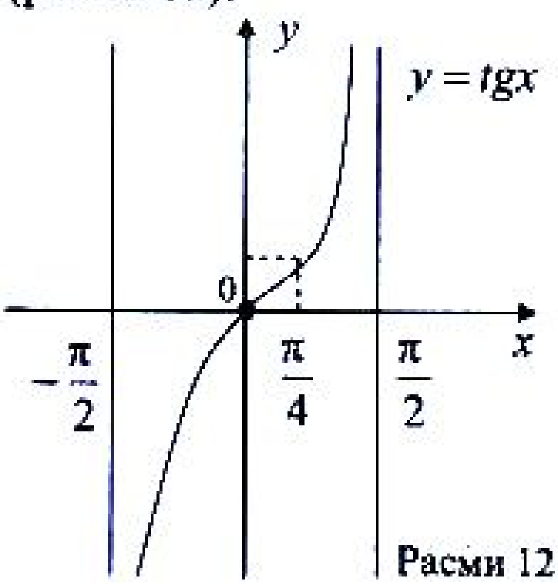
Ба ҳамин тариқ, тангенс ҳам дар чоряки якум (аломати мусбат дорад) ва ҳам дар чоряки чорум (аломати манфӣ дорад) афзуншаванда мебошад.

Умуман дар фосилаи $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in Z$ функсияи $y = tgx$ афзуншаванда аст.

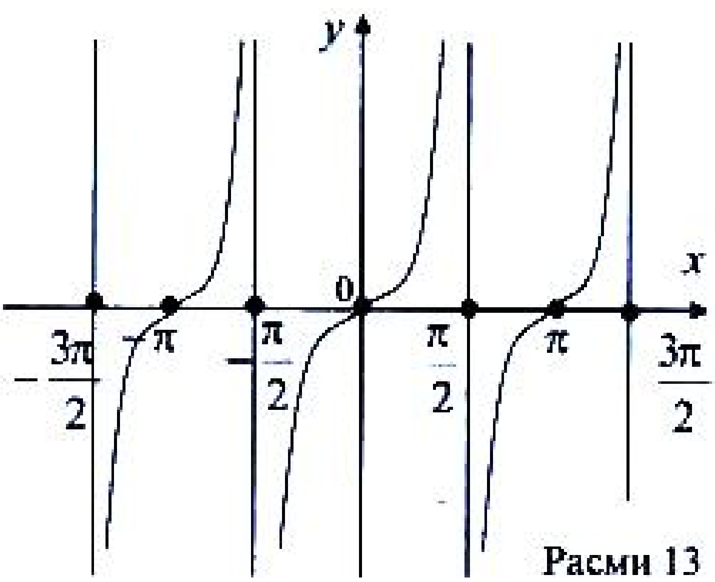
Пас, фосилаҳои монотонии тангенс ба соҳаи муайянии он мувофиқ будааст.

9. Графики $y = tgx$-ро месозем. Барои фосилаи $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ графики функсияро аз рӯи нуқтаҳо сохтем. Хосияти тоқ будани функсияро ба инобат гирифта, ин қисми графикро нисбат ба ибтидои координат симметрӣ инъикос менамоем.

Дар натиҷа графики $y = tgx$ дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ки дарозии он ба даври функсия π баробар аст, ҳосил мешавад (расми 12).



Расми 12



Расми 13

Агар графики дар ин фосила ҳосилшударо ба дарозии тири абсисса (ба тарафи чап ва рост) ба $\pi, 2\pi, 3\pi$ ва ғ. кӯчонем, графики тангенс дар **ҳамаи тири ададӣ** R пайдо мешавад (расми 13).

Қайд кардан лозим аст, ки аз рӯи ин график ҳамаи хосиятҳои тангенсро низ шарҳ додан мумкин аст.

Мисол.

Графики $y = tg2x$ сохта шавад.

Созишро бо ду тарз: аз рӯи тартиби умумии тадқиқи функсия ва бо ёрии табдилдиҳии графики $y = tgx$ иҷро кардан мумкин аст.

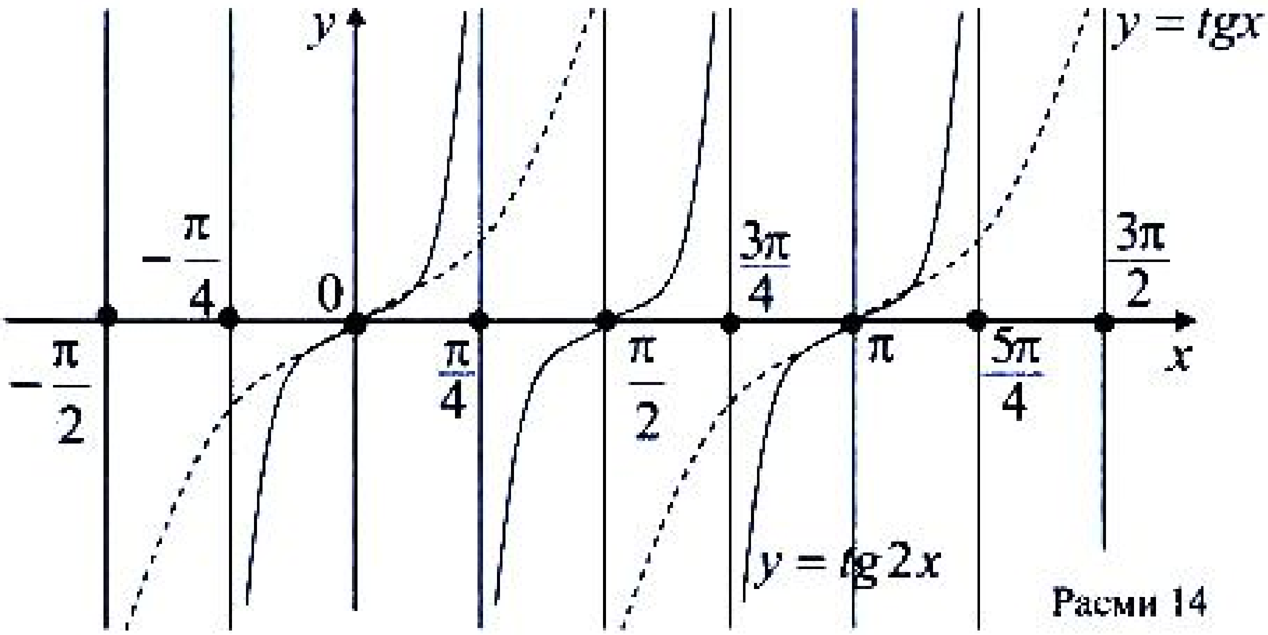
Ҳал. Графики функсияро ба воситаи табдилдиҳӣ месозем.

Агар графики функсияи тангенсро аз рӯи тири абсисса 2 маротиба фишурем, графики $y = tg2x$ ҳосил мешавад, зеро даври функсияи додашуда $T = \dfrac{\pi}{2}$ аз даври тангенс 2 маротиба хурд аст (расми 14).

? 1. Сифрҳои синус, косинус, тангенс ва котангес кадом нуқтаҳоянд?

2. Оид ба фосилаҳои монотонии синус ва косинус чӣ гуфта метавонед? Роҷеъ ба тангенс ва котангенс чӣ?

3. Фосилаҳое, ки дар онҳо синусу косинус, тангенсу котангенс аломатҳои доимӣ доранд номбар кунед.



Расми 14

4. Чаро графики тангенс ба қисмҳои алоҳидае, ки онҳо бо ҳам алоқаманд нестанд, ҷудо мешаванд?

5. Оё тангенс дар ҳамаи соҳаи муайянӣ афзуншаванда аст? Ҷавобро асоснок намоед.

6. Даври хурдтарини мусбати синус, косинус, тангенс ва котангенс кадом ададҳоянд?

Машқҳо

90°. Шифоҳӣ.

Ба таври схематикӣ графики функсияҳоро тасвир кунед:

а) $y = \sin x$, дар фосилаи $\left[-180°;0°\right]$;

б) $y = \cos x$, дар фосилаи $\left[-90°;90°\right]$;

в) $y = tgx$, дар фосилаи $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$;

г) $y = |\sin x|$, дар фосилаи $[0;2\pi]$.

Графики функсияҳоро созед ва муайян намоед, ки онҳо бо ёрии кадом табдилдиҳӣ (параллелкӯчонӣ ва ё фишурдашавӣ) сохта мешаванд ($91° - 94^*$):

91°. а) $y = 2\sin x$; б) $y = -3\cos x$;

в) $y = \sin(-x)$; г) $y = \cos x - 1$;

д) $y = tg3x$; е) $y = ctg2x$; ё) $y = 3\sin x + 1$; и) $y = \cos|x|$.

92. а) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$; б) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$;

в) $y = 2\cos(x + \frac{\pi}{3})$; г) $y = -3\cos(\frac{x}{2} - 1)$;

д) $y = tgx + 1$; е) $y = ctg(x - \frac{\pi}{2})$.

93. а) $y = |\sin x|$; б) $y = 1 + |\cos x|$; в) $y = \cos^2 x$;

г) $y = 3\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$; д) $y = 1 + 0{,}5\sin(2x + 60^\circ)$; е) $y = 2tg3x - 2$.

94*. а) $y = \sin x + 2\cos x$; б) $y = |\sin x| + \sin x$;

в) $y = (\sin x - \cos x)^2$; г) $y = \frac{1}{3}tg(2x + 60^\circ)$; д) $y = ctg|x|$.

Соҳаи муайянии функсияҳоро ёбед ($95^\circ - 97$):

95°. а) $y = \sqrt{\sin x}$; б) $y = \frac{1}{\cos x}$; в) $y = tg\frac{x}{2}$; г) $y = 2ctgx$.

96. а) $y = \frac{2}{1 - \cos x}$; б) $y = \frac{2}{\sin x + \cos x}$;

в) $y = \sqrt{tgx}$; г) $y = 1 + ctgx$.

97. а) $y = \sqrt{\sin 2x}$; б) $y = \sqrt{1 - \cos x}$;

в) $y = tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$; г) $y = 2 - ctg0{,}5x$.

Соҳаи қиматҳои функсияҳоро ёбед ($98^\circ - 100$):

98°. а) $y = 1 + \sin x$; б) $y = 1 - \cos x$;

в) $y = 3 + 2\sin x$; г) $y = tgx$.

99. а) $y = 4 - 3\cos x$; б) $y = 1 - |\sin x|$;

в) $y = \frac{3\sin x - 2}{4}$; г) $y = tg^2 x$.

100. а) $y = -3\cos^2 x - 1$; б) $y = (1 + \cos x)^2$;

в) $y = \sqrt{5 - \sin x}$; г) $y = 1 - ctg^2 x$.

101°. Аз рӯи графики функсияҳои $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ фосилаҳоеро нишон диҳед, ки дар онҳо функсияи синус ва косинус: а) қиматҳои мусбат қабул мекунанд;
б) соҳиби қиматҳои манфӣ мешаванд.

102. Дар порчаи $[0;2\pi]$ фосилаҳоеро маълум кунед, ки дар онҳо функсияҳои синус ва косинус дар як вақт: а) меафзоянд ва б) кам мешаванд.

Фосилаҳои монотонии функсияҳоро ёбед ($103^\circ - 105$):

103°. а) $y = \frac{1}{2}\sin x$; б) $y = \cos\frac{x}{2}$;

104. а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \cos 2x$.

105. а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \cos(\frac{x}{3} + 2)$; в) $y = tg(2x - \frac{\pi}{4})$.

Ададҳоро бо тартиби афзуншавиашон ҷойгир кунед (106°-108):

106°. а) $\sin\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{3}$;

б) $\cos 20^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\cos 30^\circ$.

107. а) $\sin\frac{4\pi}{3}$, $\sin\frac{5\pi}{6}$, $\sin\frac{11\pi}{12}$, $\sin\frac{13\pi}{7}$;

б) $\cos 31^\circ$, $\cos 24^\circ$, $\cos 63^\circ$, $\cos 51^\circ$, $\cos 107^\circ$;

в) $\sin 1$, $\cos 1$, $tg 1$, $ctg 2$.

108. а) $\sin 7\pi$, $\sin(-7\frac{5}{6}\pi)$, $\sin\frac{25\pi}{12}$, $\sin(-\frac{17\pi}{12})$;

б) $\cos 1$, $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 4$; в) $\sin 2$, $\cos 2$, $tg 2$, $ctg 3$.

109°. (Шифоҳӣ). Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияҳоро ёбед:

а) $y = \frac{1}{2 - \sin x}$; б) $y = \frac{1}{\cos x - 1}$.

Экстремумҳои функсияҳоро ёбед ($110^\circ - 112$):

110°. а) $y = \frac{1}{2}\sin x$; б) $y = \cos\frac{x}{4}$;

в) $y = 2tg\frac{x}{2}$; г) $y = \frac{1}{2}ctg\frac{x}{4}$;

111. а) $y = \frac{1}{3}\sin x - 1$; б) $y = \frac{1}{5}\cos x + 1$;

в) $y = 1 + 2tgx$; г) $y = ctgx - 1$.

112. а) $y = 3\sin x + 2$; б) $y = 3\cos x - 2$;

в) $y = 3\cos(x - \frac{2\pi}{7})$; г) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{7})$.

Аз таърихи инкишофи маълумотҳои тригонометрӣ

Мафҳумҳои аввалини тригонометрӣ ва астрономӣ дар мамлакатҳои Шарқ – Ҳиндустон, Миср, Бобулистон ва Хитой ба вуҷуд омадаанд. Дар Бобулистони қадим гирифтани офтоб ва моҳтобро пешакӣ гуфта метавонистанд. Соли 585-и милодӣ олими Юнони қадим **Фалес** гирифтани офтобро пешгӯи кард. **Гиппарх** (тақ. 180-125 пеш аз милод) дар 12 китоб ҷадвали хордаҳо (юнонӣ-«тор»)-и давраро тартиб дод. Баъди 400 сол ҳамингуна ҷадвалҳоро барои камонҳои аз 0° то 180° **Клавдий Птоломей** (тақ. 100-178) дар «Куллиёти математикӣ» (иборат аз 13 китоб) ҷой дод. Градус (лотинӣ - «қадам»)-ро ба дақиқаҳо (хурдшуда) ва сонияҳо (дуюм хурдшуда) тақсим кард.

Дар асрҳои V-XII ҳисоббарориҳои тригонометрӣ дар асарҳои математикони ҳинд **Ариабхата** (тақ. 476-550), **Брахмагупта** (598-660) ва **Бхаскара** (1114-1178) инкишоф ёфт.

Ҳиндуҳо ба мисли Птоломей давраро ба 360 қисм тақсим мекарданд. Онҳо «хорда»-ро «ҷива» (тори камон) номидаанд. Арабҳо онро баъдтар «ҷайб» (маъноаш «бағал»), ном мебурданд. Дар асри XII ин калима аз тарафи олими итолиёӣ **Герарди Кремони** (1114-1187) ба забони лотинӣ sinus тарҷума гардид.

Аз охири асри VIII сар карда, мафҳумҳои асосии тригонометрӣ дар байни арабҳо паҳн гардид.

Бо фармони халифаи Бағдод **Ал-Мансур** асарҳои олимони Ҳинд ба арабӣ тарҷума шудаанд. Олими бузурги Осиёи миёна **Ал-Хоразмӣ** (780-847), ки дар Бағдод кор мекард ба ҷадвалҳои хордаҳои тартиб додаи юнониҳо ва ҳиндуҳо шинос шуда, ҷадвалҳои боз ҳам саҳеҳтарро сохт. Математик ва астрономи намоёни сурияги **Ҷобир ал-Баттонӣ** (858-929) барои муайян кардани баландии **офтоб** мафҳуми нави тригонометрӣ ворид намуда, онро «соя» (аз рӯи истилоҳи имрӯза тангенс) номид. Дар қатори ҷадвалҳои синусу тангенс боз ҷадвалҳои котангенсро амалӣ гардонд. Ҷадвалҳои тартиб додаи ӯ на фақат дар Шарқ, балки дар Аврупо низ маълум буданд.

Бо тағйиротҳои сиёсӣ, иқтисодӣ, иҷтимоӣ ва маънавии асрҳои IX-X нигоҳ накарда дар замони давлатдории Оли Сомон дар Осиёи Миёна як зумра математикони номвар фаъолият мекарданд, ки онҳо дар рушду нумӯи маълумотҳои тригонометрӣ саҳми босазо гузоштаанд. Асарҳои илмии Форобӣ, Абулвафо, Хуҷандӣ, Сино, Берунӣ ва садҳо дигар математикони намоён беҳамто ва такрорнашавандаанд. **Абунаср ал-Форобӣ** (870-950) ба корҳои Птоломей пайравӣ карда, хатти тангенс ва котангенсро дохил кард ва хордаҳоро ба синус иваз намуд. Олими машҳури форсу тоҷик **Муҳаммад Абулвафо** (940-998) дар таърихи илм аввалин шуда **радиуси давраи тригонометриро ба воҳид** баробар қабул кард. Ин кашфиёт дар илм табаддулоти куллиро ба вуҷуд овард. Онро олимони Аврупо баъд аз ӯ кашф карданд.

Абдулвафо бори нахуст тангенс ва котангенсро ҳамчун функсияи тригонометрӣ ба илм дохил кард ва барои онҳо ҷадвал тартиб дод. Мунаҷҷимон ба хотири ин марди бузург яке аз кӯҳҳои тарафи намоёни моҳро ба номи ӯ гузоштаанд.

Муҳаммад-ал-Хуҷандӣ (ваф. 1000) ба исботи теоремаи синусҳо комёб гардид. Ба ӯ ихтирои асбоби секстанта (кунҷсанҷ)-и радиусаш тақрибан 40 м тааллуқ дорад.

Донишманди барҷастатарини асри XI **Абу Райҳон Берунӣ** (973-1040) ба Абулвафо пайравӣ намуда, радиуси давраи тригонометриро ба воҳид баробар қабул кард, тарзи амалии ҳисоб намудани масофаи дастнорас ва чуқурии чоҳро бо ёрии функсияҳои тангенс ва котангенс муайян намуд. Муқаррар кард, ки радиуси Замин $R \approx 6339{,}58$ км аст (аз ҳисобҳои ҳозира 31,53 км фарқ дорад). Олими тоҷику форс **Насириддини Тӯсӣ** (1201-1274) дар ин соҳа як қатор кашфиётҳои навро ба илм ворид намуд.

Дар Осиёи Миёна ҷадвалҳои тартибдодаи олимони Самарқанд **Ғ.Кошонӣ** (ваф. 1430), **Қушчӣ** (ваф. 1474) ва **Қ.Румӣ** (1360-1437) оид ба қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ аз ҳама саҳеҳтар буданд.

Ба ҳамин тариқ, халқҳои Шарқи Наздик ва Осиёи Миёна махсусан тоҷикон пешрафти маълумотҳои тригонометрӣ саҳми муҳим гузоштаанд. Баъдтар аврупоиҳо - олими англис **Фома Брадвардин** (1290-1349), олмонӣ **Иоҳанн Мюллер** (машҳур бо номи Региомонтан) (1436-1474) ва дигарон аз ин халқҳо тригонометрияро омӯхта, онро инкишоф додаанд. Соли 1600 олими олмонӣ **Эдмунд Гентер** истилоҳи «косинус»-ро ворид намуд, ки он маънои синуси камони иловагиро дорад. Рамзҳои ***sin***, ***cos*** ва ғайраро математики швейтсарӣ **Иоҳанн Бернуллӣ** (1667-1748) дар амал ҷорӣ кард. Академики

Берунӣ (973-1048)

Энсиклопедисти бузурги асри XI. То синни 16-солагӣ ҳамаи илмҳои замонаашро аз худ намуд. Ба қалами Берунӣ 150 асар тааллуқ дорад, ки 30-тои он то ба имрӯз омада расидааст. Зиёда аз ҳафт рисолаи ӯ ба масъалаҳои математикӣ бахшида шудаанд.

Леонард Эйлер (1707-1783)

Математик ва механики швейтсарӣ, академики Академияи илмҳои Петербург. Математикаро бо роҳи худомӯзӣ аз худ карда, дар 17-солагӣ соҳиби унвони устоди илм гаштааст. Муаллифи зиёда аз 800 асари илмӣ мебошад. 18 мафҳуми математикӣ номи ӯро дорад. Кашфиётҳои таҳлили математикиро дар соҳаҳои гуногуни илм (назарияи садо, рушноӣ, топология ва г.) татбиқ кардаст.

илмҳои Петербург **Леонард Эйлер** (1707-1783) формулаҳоеро кашф кард, ки бо ёрии онҳо тригонометрияро новобаста аз геометрия сохтан мумкин аст. Эйлер аввалин шуда, тарафҳои секунҷаро бо ҳарфҳои *a*, *b* ва *c* ишорат кард. Тавассути корҳои ӯ тригонометрия ниҳоят ба давраи қуллаҳои баланди инкишофи худ расид.

Математикони машҳури рус **Н.И.Лобачевский** (1792-1856) ва В.М.Остроградский (1801-1861) ба тарзи формулавӣ сохтани тригонометрияро ба анҷом расонидаанд.

Дар асри XVIII математикони фаронсавӣ **Даниил Бернулли** (1700-1782) ва **Ж.Фуре** (1768-1830) протсессҳои лапандаро омӯхтанд.

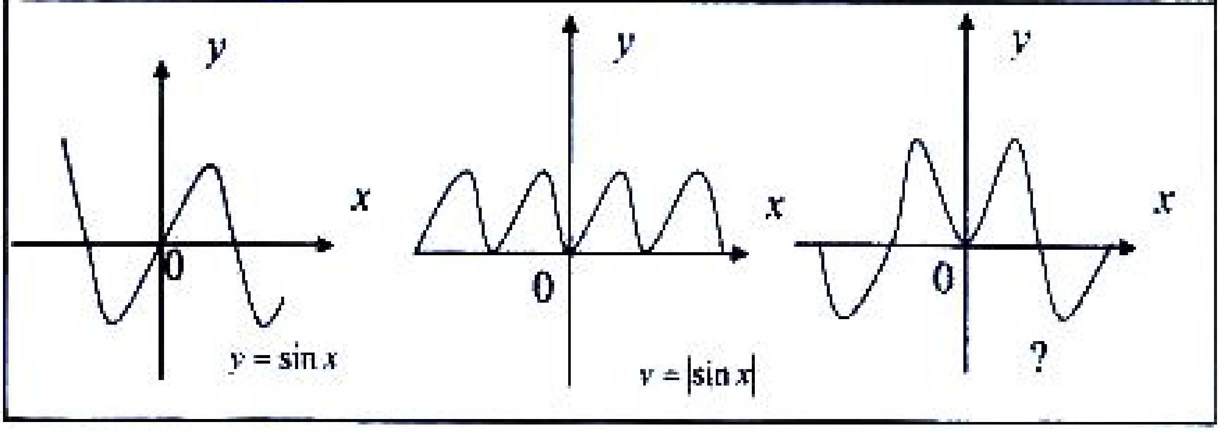
Худро санҷед !

Кадом адад, ифода ё ин ки функсия намерасад?

Ба ифодаҳо бодиққат назар кунед. Амал ва муносибати партофташудаи байни онҳоро гузоред ва аз рӯи табдилдиҳиҳои маълум ба ҷои аломати «?» ифода ё ин ки ададро барқарор кунед. Аз рӯи графикҳои дода шуда функсияро маълум намоед.

1.	$1+tg^2\alpha$	$1+ctg^2\alpha$	$\frac{4}{\sin^2 2\alpha}$
	$\sin 12^\circ \cos 18^\circ$	$\cos 12^\circ \cos 72^\circ$	$\frac{1}{2}$
	$\cos 44^\circ \cos 16^\circ$	$\cos 46^\circ \cos 74^\circ$	?
2.	$\cos 2\alpha$	1	$2\cos^2\alpha$
	$1+\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha+1$	3
	$\sin 30^\circ \cos 45^\circ$	$\cos 30^\circ \sin 45^\circ$	?

3.



Кори амалии № 2

Максади кор. Сохтани графики гузариш аз ченаки градусӣ ба радианӣ мувофиқи формулаи $a = \dfrac{\alpha\pi}{180}$.

Дар дафтарҳоятон:

1) Аз рӯи формула ҷадвали гузариш аз ченаки градуси ба радианиро тартиб диҳед:

α	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
a	$\frac{\pi}{6}$	...	...	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	...	...	$\frac{3\pi}{2}$	...

2) Системаи координатаи декартӣ кашед. Масштаб интихоб намоед.

3) Дар тири абсисса OX қимати градусии кунҷҳои α -ро гузоред. Ченаки радиании мувофиқи онҳоро дар тири ордината Oy қайд кунед.

4) Аз рӯи нуктаҳо графики гузаришро созед.

5) ба саволи: графики гузариш аз ченаки градусӣ ба радианӣ чигуна хатро медиҳад? ҷавоб диҳед.

6) Аз рӯи график ченаки радиании кунҷҳои $75°, 80°, 100°, 130°, 165°,\ \ 195°, 225°, 250°, 290°$ -ро муайян кунед.

Супориши мустақилона доир ба боби II

Варианти 1°

1. Айниятро исбот кунед: $\dfrac{\sin^2\alpha}{tg^2\alpha} + \dfrac{2\cos^2\alpha}{ctg^2\alpha} - \sin^2\alpha = 1$

2. Агар $\sin\alpha = \dfrac{3}{5},\ \alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ ва $\sin\beta = -\dfrac{7}{25},\ \beta \in \left[\pi; \dfrac{2\pi}{2}\right]$

бошад, $\cos(\alpha + \beta)$-ро ёбед.

3. Графики функсия $y = 3\sin(x + \dfrac{\pi}{6})$ -ро созед.

4. Даври хурдтарини мусбати функсияи $y = 2\sin 3x$ -ро ёбед.

5. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи

$y = \frac{1}{5}\cos x + 1$ -ро маълум кунед.

Варианти 2

1. Айниятро исбот кунед: $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{ctg\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2tg^2\alpha$

2. Ифодаро содда кунед: $\frac{\cos\alpha \cdot tg\alpha}{\sin^2\alpha} - ctg\alpha\cos\alpha$

3. Даври мусбати хурдтарини функсияро ёбед: $y = \sin 4x$

4. Соҳаи муайянии функсияро ёбед: $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$

5. Дурустии баробариро нишон диҳед:

$16\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = 1$

Варианти 3*

1. Айниятро исбот кунед: $\frac{1 + tg\alpha + tg^2\alpha}{1 + ctg\alpha \cdot ctg^2\alpha} = tg^2\alpha$.

2. Агар $\sin\alpha + \cos\alpha = p$ бошад, $\sin^6\alpha \pm \cos^6\alpha$ -ро ёбед.

3. Исбот кунед: 1. $\cos\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

4. Нобаробариро исбот намоед:

$(tg\alpha + ctg\alpha)^2 \geq 4$, агар $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бошад.

5. Даври мусбати хурдтарини функсияро ёбед.

$y = \cos 2x + 2\cos 3x$

МАШҚҲОИ ИЛОВА ОИД БА БОБИ II

Ба параграфи 1

113. Ҳисоб кунед:

а) $\cos 23^\circ \cdot \sin 7^\circ + \cos 7^\circ \cdot \sin 23^\circ$;

б) $\sin 53^\circ \cdot \cos 8^\circ - \sin 8^\circ \cdot \cos 53^\circ$;

в) $\cos 13^\circ \cdot \cos 17^\circ - \sin 13^\circ \cdot \sin 17^\circ$;

г) $\sin 33^\circ \cdot \sin 3^\circ + \cos 33^\circ \cdot \cos 3^\circ$.

114. Ифодаҳоро содда намоед:

а) $(\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta)^2 + (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta)^2$;

б) $4\sin(15^\circ + \alpha)\cdot\cos(15^\circ - \alpha) - 2\sin 2\alpha$;

в) $4\cos\alpha \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 3\alpha$;

г) $8\cos^4 x - 4\cos 2x - \cos 4x$.

115. Айниятҳоро исбот кунед:

а) $\cos^2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{3}{4}$;

б) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot tg\alpha = ctg\alpha$;

в) $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta) = \sin^2\beta$;

г) $16\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = 3$.

Ба параграфи 2

116. Ҳисоб кунед:

а) $2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$; б) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

в) $2\sin 105^\circ \cdot \cos 105^\circ$; г) $\cos^2\frac{7\pi}{12} - \sin^2\frac{7\pi}{12}$.

117. Ифодаҳоро содда кунед:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha$; б) $4\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha$;

в) $(tg\alpha + ctg\alpha)\cdot\sin 2\alpha$; г) $\frac{2\cos^2\alpha \cdot tg\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$.

118. Айниятҳоро исбот кунед:

а) $4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha$; б) $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1$;

в) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$; г) $\frac{1 - \cos^2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = tg\alpha$.

119. Қимати $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $tg\alpha$-ро ёбед, агар $\sin 2\alpha = -\frac{3}{5}$, $90^\circ < \alpha < 135^\circ$ бошад.

Ба параграфи 3

120. Агар $\cos\alpha = 0{,}6$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бошад, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ва $tg\frac{\alpha}{2}$-ро ёбед.

121. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$ -ро ёбед, агар $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ бошад.

Ба параграфҳои 4 - 5

Суммаро ба ҳосили зарб табдил диҳед (122 – 123):

122. а) $\cos 52^\circ + \cos 18^\circ$; б) $\cos 78^\circ - \cos 18^\circ$;

в) $\cos\alpha + \cos 5\alpha$; г) $\sin\alpha + \sin 7\alpha$.

123. а) $\frac{1}{2} - \cos\alpha$; б) $1 + 2\cos\alpha$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\alpha$; г) $2\sin\alpha - \sqrt{3}$.

Ҳосили зарбро ба сумма табдил диҳед (124-125):

124. а) $\cos 35^\circ \cdot \cos 5^\circ$; б) $2\cos 35^\circ \cdot \sin 5^\circ$;

в) $2\sin 35^\circ \cdot \cos 5^\circ$; г) $\sin 35^\circ \cdot \sin 5^\circ$.

125. а) $\cos 2\alpha \cdot \cos 3\beta$; б) $\cos(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)$;

в) $\sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha)$; г) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$.

Ба параграфҳои 6 - 7

126. Аломати ифодаҳои зеринро муайян намоед:

а) $\sin 110^\circ$; $ctg 220^\circ$; $tg(-95^\circ)$; $\cos 600^\circ$;

б) $\cos 200^\circ$; $\sin 280^\circ$; $ctg(-230^\circ)$; $\sin(-3^\circ)$;

в) $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; $tg 2$; $ctg\left(\frac{4\pi}{5}\right)$; $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $\sin 4$;

127. Ҳисоб кунед:

а) $tg45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot ctg30^\circ$;

б) $3\cos 180^\circ + 5 \cdot ctg270^\circ - 2\sin 360^\circ - tg60^\circ$;

в) $\cos\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot tg^2\frac{\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{4}$;

128. Қиматҳои ададии ифодаҳои зеринро ёбед:

а) $\sin\alpha + \cos\alpha$

ҳангоми: 1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; 3) $\alpha = 180^\circ$; 4) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

б) $\sin\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \sin 2\alpha$

ҳангоми: 1) $\alpha = 30^\circ$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 3) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; 4) $\alpha = 90^\circ$.

129. Ифодаҳоро содда кунед:

а) $\frac{(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)}{\sin 70^\circ}$;

б) $4\sin(15^\circ + \alpha)\cdot\cos(15^\circ - \alpha) - 2\sin 2\alpha$.

Ба параграфҳои 8 - 9

130. Даври мусбати хурдтарини функсияҳоро ёбед:

а) $y = \sin 3x$; б) $y = tg4x$; в) $y = ctg\frac{x}{4}$;

г) $y = \cos\frac{3x}{2}$; д) $y = tgx + ctg2x$; е) $y = \sin^2 x + tgx$.

131. Соҳаи муайянии функсияҳои зеринро ёбед:

а) $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$; б) $y = \cos(\lg x)$; в) $y = \sin\frac{1}{x}$; г) $y = \frac{tgx}{\cos 2x}$.

132. Соҳаи қиматҳои функсияҳоро ёбед:

а) $y = 1 + \sin^2 x$; б) $y = |\cos x|$; в) $y = 1 - 2|\sin 3x|$;

г) $y = 2^{\sin x} + 1$; е) $y = x \cdot ctgx$.

БОБИ III. МУОДИЛАҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Дар ин боб ба моҳияти муодилаҳои тригонометрӣ, баъзе усулҳои ҳалли онҳо, инчунин ба ҳалли системаҳои муодилаҳои тригонометрӣ шинос мешавем. Аммо барои амиқ ва мукаммал аз худ намудани муодилаҳои тригонометрӣ лозим меояд, ки роҷеъ ба арксинус, арккосинус ва арктангенс маълумоти комил дошта бошем.

§ 1. Арксинус ва ҳалли муодилаи $\sin x = a$

Ҳалли муодилаи $f(x) = a$ барои ҳамаи функсияҳои тригонометрӣ ба теоремаи зерин асос меёбад.

(!) ***Теорема*** (доир ба реша). **Агар функсияи f дар фосилаи I афзояд (ё кам шавад) ва адади a қимати дилхоҳи f аз ин фосила бошад, онгоҳ муодилаи $f(x) = a$ дар ин фосила I ягона решаи b-ро дорост.**

Исбот (бо методи аз баръаксӣ). Фарз мекунем, ки муодилаи $f(x) = a$ дар фосилаи I дуто реша дорад: c ва b.

- Байни c ва b чӣ гуна муносибат ҷой дошта метавонад? Ё $c < b$ ва ё $c > b$ аст. Азбаски f-функсияи афзуншаванда аст, аз ин нобаробариҳо бармеояд, ки $f(c) < f(b)$ ё ин ки $f(c) > f(b)$ ҷой доранд. Ин мухолифат нишон медиҳад, ки фарзи мо нодуруст буда, муодилаи $f(x) = a$ дар фосилаи I ғайр аз b дигар реша дошта наметавонад.

Теорема исбот шуд.

Мавриди камшавандагии функсияи f дар фосилаи I айнан нишон дода мешавад (исбот кунед!).

Мисол. Муодилаи $x^3 + 2x = 3$ ҳал карда шавад.

Функсияи $f(x) = x^3 + 2x$, ки аз суммаи ду функсияи афзуншаванда иборат аст, дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ R афзуншаванда мебошад. Бинобар ин, муодилаи $f(x) = 3$ аз як реша зиёд дошта наметавонад. Дидан душвор нест, ки решаи он $x = 1$ аст.

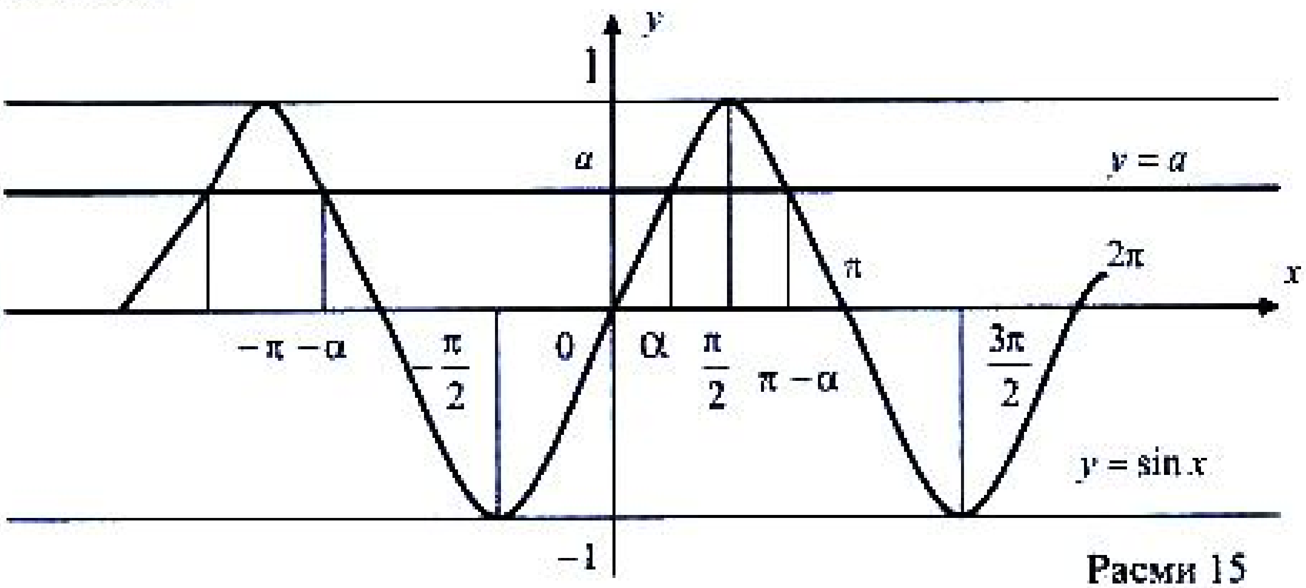
Акнун **муодилаи** $\sin x = a$ $(|a| \le 1)$-ро ҳал мекунем.

Аз методи зерин истифода мебарем. Графики $y = \sin x$

ва $y = a$ -ро дар як нақша месозем. Абсиссаи нуқтаҳои буриши онҳо ҳалли муодилаи дода шуда мебошад (расми 15).

Аз расм намоён аст, ки ингуна нуқтаҳо аз ҳад зиёданд, яъне муодила ҳалҳои бешумор дорад. Мақсад мегузорем, ки аз онҳо **якто ҳалли асосиашро** маълум карда, формула тартиб диҳем, то ки ҳалҳои боқимонда ба воситаи он ифода ёбанд. Азбаски даври синус 2π аст, кифоя мебошад, ки ҳама ҳалҳоро дар ҳудуди ин фосила маълум кунем. Аз график дида мешавад, ки дар фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ ду адад (ё ин ки кунҷ) вуҷуд доранд, ки синусашон баробари a аст.

Дар фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ функсияи синус афзуда аз -1 то 1 қимат қабул мекунад. Дар фосилаи $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ бошад монотонӣ аз 1 то -1 кам мешавад. Суммаи ин фосилаҳо ба даври синус 2π баробар мебошад. Мувофиқи теорема доир ба реша дар фосилаи якум танҳо як адад α муодилаи $\sin x = a$ $(|a| \le 1)$ -ро қаноат мекунад. Дар фосилаи дуюм бошад $\pi - \alpha$ решаи муодила аст. Агар ба ададҳои π ва $\pi - \alpha$ даври синус 2π -ро ҳамроҳ кунем, ҳалҳои боқимонда ба вуҷуд меоянд.



Расми 15

Ба ҳамин тариқ, ҳамаи ҳалҳои муодилаи $\sin x = a$ ($|a| \le 1$) аз рӯи ду формула ёфт мешаванд:

$$x = \alpha + 2\pi k, \quad x = \pi - \alpha + 2\pi k = -\alpha + \pi(2k+1), \quad k \in Z.$$

Ин формулаҳоро ҳамҷоя намуда, ҳосил мекунем:

$x = (-1)^n \alpha + \pi n, \quad n \in Z$ (n-қиматҳои ҷуфт ва тоқ қабул мекунад).

М и с о л. Муодилаи $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Ҳалли **асосии** он $x = \dfrac{\pi}{3}$ аст. Ҳалҳои боқимонда аз рӯи формулаҳои $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$ ва $x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k = -\dfrac{\pi}{3} + \pi(2k+1)$, $k \in Z$ ҳосил карда мешаванд. Онҳоро якҷоя мекунем:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z$$

Э з о ҳ. Ду варианти навишти ҳал ҷой дорад:

1) $x = (-1)^n 60^\circ + 180^\circ n, \ n \in Z$ ва 2) $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z$

Боиси қабул нест, агар дар навишт қисман аз варианти якум ва қисман аз варианти дуюм истифода барем.

Чунончӣ, $x = (-1)^n 60^\circ + \pi n$ ё $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{3} + 180^\circ n, \ n \in Z$

навиштан мумкин нест.

Ба **ҳалли асосии муодила** исми махсус – **арксинус** мондаанд ва онро бо $x = \arcsin a$ ишорат мекунанд.

Таъриф. ***arcsin a*** **- кунҷи *x*-ро меноманд, ки ба фосилаи** $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ **тааллуқ дошта, синуси он ба *a* баробар аст.**

Тарзи навишт: аломати "*arcsin a*" аз ду калимаи лотинӣ "arcus" (камон) ва "sinus" иборат буда, якҷоя навишта мешавад.

Ба хотир гиред!

arcsin a ҳамон вақт вуҷуд дорад, ки агар модули адади *a* аз воҳид калон набошад!

Мувофиқи ин гуфтаҳо ҳалли муодилаи дода шуда намуди зеринро мегирад:

$$x = \arcsin a + 2\pi k, \quad x = -\arcsin a + \pi(2k+1), \quad k \in Z.$$

Муттаҳидии онҳо формулаи умумии ҳалли муодиларо медиҳад.

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$$

Савол ба миён меояд: барои ёфтани қимати арксинус ҷаро маҳз фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$-ро интихоб намудем? Ба он мақсад, ки ин фосила ба ибтидои координат наздик аст.

Ҳолатҳои гуногуни ҳалли муодилаи $\sin x = a$ -ро дар ҷадвали зерин (ҷадвали 3) ҷойгир мекунем:

Мисолҳо:

1. $\arcsin 0 = 0;$ 2. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$

Қимати $\arcsin a$ $(a \in [0;1])$ бо ёрии ҷадвал ва ё калкулятор ҳисоб карда мешавад.

Мисолҳо:

а) $\arcsin 0{,}7815 \approx 51^\circ 24'$ (ҷадвали VIII – В.М.Брадис)

б) $\arcsin 0{,}45 \approx 26^\circ 48'$ (бо ёрии калкулятор)

Ҷадвали 3

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

№	Муодила	Ҳалли муодила ба воситаи градус	Ҳалли муодила ба воситаи радиан
1	$\sin x = 0$	$x = 180^\circ k$	$x = \pi k$
2	$\sin x = 1$	$x = 90^\circ + 360^\circ k$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(1+4k)$
3	$\sin x = -1$	$x = -90^\circ + 360^\circ k$	$x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi k = \frac{\pi}{2}(4k-1)$
4	$\sin x = \pm a$, $\lvert a \rvert < 1$	$x = \pm\alpha^\circ + 180^\circ k$, α° - кунҷи тез	$x = \pm \arcsin \lvert a \rvert + \pi k$
5	$\sin x = a$, $\lvert a \rvert > 1$	Муодила ҳал надорад	

Фишангчаи «Р/Г» (радиан/градус)-ро ба ҳолати «Р» оварда ададӣ 0,45-ро ворид мекунем ва пайи ҳам тугмачаҳои «Г», "*arcsin*"- ро зер карда дар индикатор натиҷаро мехонем.

Аз таърифи арксинус айниятҳои зерин бармеоянд:

1. $\sin(\arcsin a) = a$, агар $-1 \le a \le 1$ бошад.

Мехонем: Синуси адад аз фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ки синуси он ба a баробар аст, худи ҳамон адад a мебошад.

Мисол. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

2. $\arcsin(\sin x) = x$, агар $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ бошад.

Агар $\sin x = a$ гузорем, онгоҳ ин айният ба таърифи арксинус баробарқувва аст: $\arcsin a = x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Мисол. $\arcsin(\sin\frac{\pi}{3}) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

?

1. Ба калимаҳо ва рамзҳои асосии матн аҳамият диҳед: арксинус, *arcsin a*, *sin*(*arcsin a*), *arcsin*(*sin x*).
2. Теорема доир ба решаро баён кунед.
3. Арксинуси a чӣ маъно дорад?
4. Арксинус чӣ гуна қиматҳо қабул мекунад?
5. Дар кадом маврид арксинуси a муайян аст?

Машқҳо

Ҳисоб кунед (1° - 3):

1°. а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin 1$; в) $\arcsin\frac{1}{2}$; г) $\arcsin 2$;

д) $\arcsin(-2)$; е) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; ё) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ж) $\arcsin 0{,}3240$

2. а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

в) $-\arcsin(-1)+\arcsin 1$; г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}$.

3. а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arcsin(-0{,}4848)+\arcsin(0{,}997)+\arcsin(0{,}3240)$.

Қимати ифодаҳоро ёбед (4° – 6):

4°. а) $\arcsin(\sin 30^{\circ})$; б) $\arcsin(\sin\frac{\pi}{4})$.

5. а) $\sin(\arcsin 0{,}8)$; б) $\arcsin\left(\sin(-\frac{\pi}{7})\right)$.

6. а) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{7}\right)$; б) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

§ 2. Арксинус ва ҳалли муодилаи $\cos x = a$

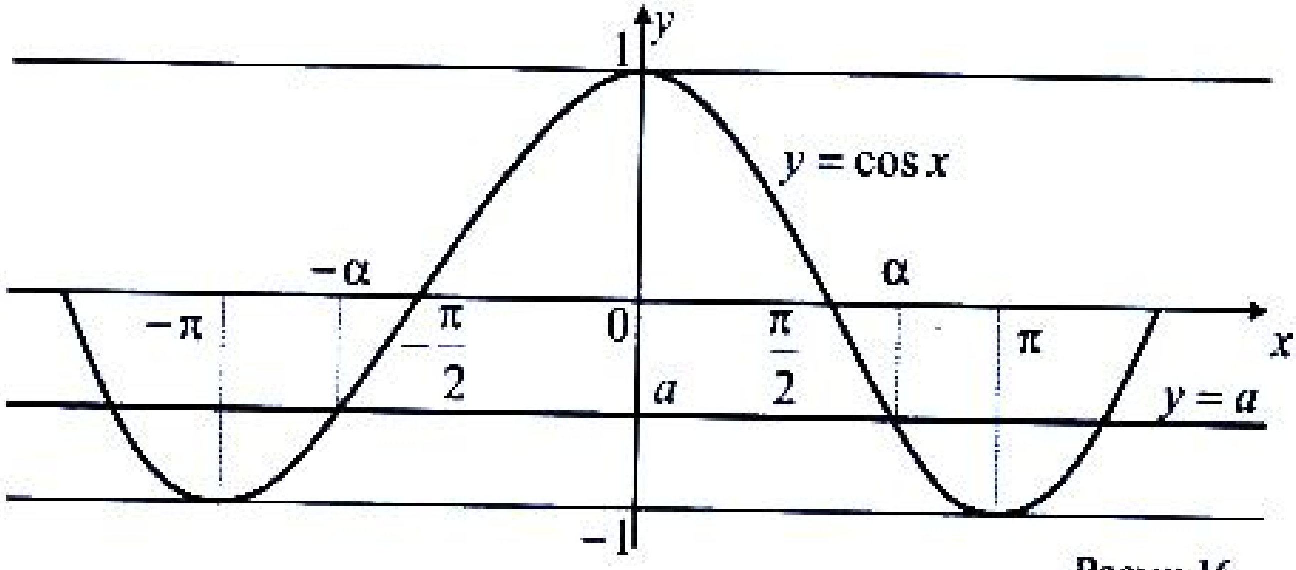
Муодилаи $\cos x = a$ $(|a|\le 1)$ -ро ҳал мекунем. Агар $a>1$ бошад муодила ҳал надорад, вале ҳангоми $-1\le a\le 1$ будан муодила ҳалҳои бешумор дорад (расми 16). Функсияи косинус дар фосилаи $[0;\pi]$ монотонӣ кам шуда, ҳамаи қиматҳоро аз 1 то -1 қабул мекунад.

Мувофиқи теорема оид ба реша дар ин фосила ягона адади α вуҷуд дорад, ки муодиларо қаноат мекунад. Аз симметрияи график айён аст, ки ҳалли дуюм $-\alpha$ ба фосилаи $[-\pi;0]$ тааллуқ дорад. Ин ҳалҳоро менависем:

$$x=\alpha+2\pi k,\ \ x=-\alpha+2\pi k,\ \ k\in Z$$

Ҳардуи ин формулаҳоро якҷоя мекунем:

$$x=\pm\alpha+2\pi k,\ \ k\in Z$$



Расми 16

М и с о л: Муодилаи $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ҳал карда шавад.

Ҳ а л. Ҳалли асосии муодила $x = \frac{\pi}{6}$ аст. Ҳалҳои боқимондаро менависем: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ҳалли асосии муодилаи $\cos x = a$ $(|a| \le 1)$ -ро **арккосинус** номидаанд ва бо $x = \arccos a$ ишорат мекунанд.

Таъриф. *arccos a* - кунҷи *x*-ро меноманд, ки ба фосилаи $[0;\pi]$ тааллуқ дошта, косинуси он ба *a* баробар аст. Мувофиқи таъриф, агар *arccos a* = α бошад, онгоҳ cos α = *a* ва $-1 \le a \le 1$ аст.

Акнун ҳалли муодилаи $\cos x = a$ $(|a| \le 1)$ -ро дар намуди умумӣ менависем:

$$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z}$$

Қиматҳои арккосинусро бо ёрии ҷадвал ва ё калкуляторҳо ҳисоб кардан мумкин аст.

Мавридҳои гуногуни ҳалли муодилаи $\cos x = a$ -ро дар ҷадвал (ҷадвали 4) ҷойгир мекунем:

Чадвали 4

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

№	Муодила	Ҳалли муодила ба воситаи градус	Ҳалли муодила ба воситаи радиан
1	$\cos x = 0$	$x = 90^\circ + 180^\circ k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(1 - 2k)$
2	$\cos x = 1$	$x = 360^\circ k$	$x = 2\pi k$
3	$\cos x = -1$	$x = 180^\circ + 360^\circ k$	$x = \pi + 2\pi k = \pi(1 + 2k)$
4	$\cos x = \pm a$, $\lvert a\rvert < 1$	$x = \pm\alpha^\circ + 180^\circ k$, α°-кунчи тез	$x = \pm\arccos\lvert a\rvert + 2\pi k$
5	$\cos x = a$, $\lvert a\rvert > 1$	Муодила ҳал надорад	

Мисолҳо:

а) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; б) $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}$

Барои арккосинус айниятҳои зерин ҷой дорад:

1. $\cos(\arccos a) = a, \quad -1 \le a \le 1.$

Ин айният аз таърифи арккосинус бармеояд.

Мисол. $\cos(\arccos\frac{1}{2}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$

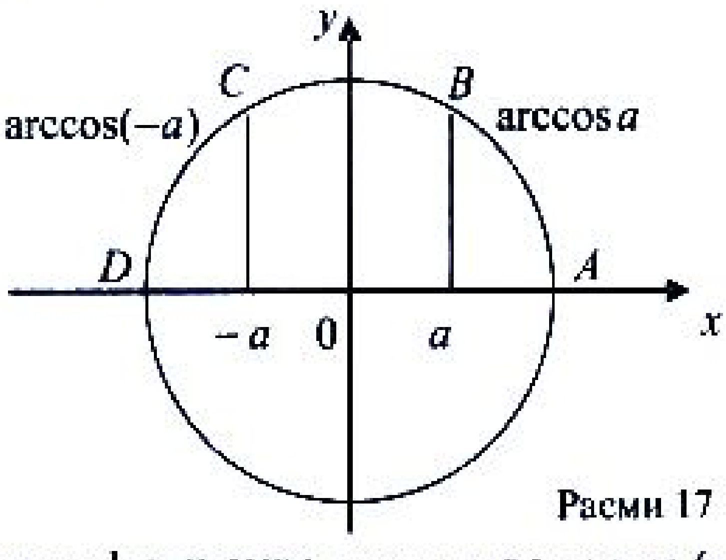
2. $\arccos(\cos x) = x, \quad 0 \le x \le \pi$

Агар $\cos x = a$ гузорем таърифи арккосинус ҳосил мешавад

$$\arccos a = x, \quad x \in [0; \pi] \text{ ва } \cos x = a$$

3. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

Дурустии ин айниятро бо **тарзҳои гуногун:** ба воситаи давраи воҳидӣ, графики косинус ва аз ду тарафи баробари гирифтани косинус нишон додан мумкин аст. Тарзи якумро мегирем. Дар давраи воҳидӣ ба ададҳои a ва $-a$ қиматҳои мувофики онҳо *arccos a* ва *arccos (-a)* рост меоянд (расми 17).



Расми 17

Аз нақша: $\cup AB = \cup CD, \quad \cup AC = \cup ACD - \cup CD = \pi - \cup AB;$

$$\cup AB = \arccos a; \quad \cup AC = \arccos(-a)$$

Пас, $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

Дидан душвор нест, ки ҳам $\arccos a$ ва ҳам $\pi - arc\cos a$ ба фосилаи $[0; \pi]$ тааллуқ доранд.

Ин формула Шуморо аз хатоҳои зиёд огаҳ месозад. Онро аз хотир набароред!

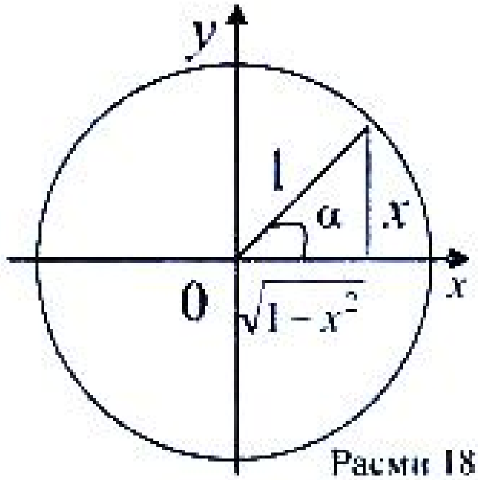
М и с о л. $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{2}{3}$.

Дар графики $y = cosx$ мустақилона нишон диҳед, ки ин айният ҷой дорад.

4. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Мегузорем: $\arcsin x = \alpha$, $\sin\alpha = x$

Дар давраи воҳидӣ (расми 18)



Расми 18

камонеро интихоб мекунем, ки синусаш x бошад, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Аз секунҷаи росткунҷа меёбем: $\cos\alpha = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

М и с о л. $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

?

1. Ба калимаҳо ва рамзҳои асосии матн эътибор диҳед: арккосинус, *arccos a*, *cos*(*arccos a*), *arccos*(*cos x*), *cos*(*arcsin x*) ва ғ.
2. Арккосинуси a чӣ маъно дорад?
3. Арккосинуси a кадом қиматҳоро қабул мекунад?
4. Арккосинуси a дар кадом маврид муайян аст?

Машқҳо

7. Ҳисоб кунед (шифоҳӣ):

а) $\arcsin 0 - \arccos 0$; б) $\arcsin(-x) + \arcsin x$;

в) $\arccos x + \arccos(-x)$; г) $\arccos 1 - \arccos(-1)$.

Ёбед ($8^{\circ} - 10$):

8°. а) $\arccos 0$; б) $\arccos 1$; в) $\arccos\frac{1}{2}$; г) $\arccos(-1)$; д) $\arccos(-3)$; е) $\arccos 0{,}3058$; ё) $\arccos 0{,}3725$.

9. а) $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) $\arccos 0 + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\arccos(-0{,}1189)$.

10. а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arccos 0{,}9397 + \arccos(-0{,}4928) + \arccos(0{,}7490)$.

Дар байни ифодаҳо яке аз аломатҳои ">", "<", ё ин ки "="-ро гузоред ($11^{\circ} - 13$):

11°. а) $\cos\left(\arccos\frac{1}{5}\right)$ ва $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$ ва $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

12. а) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ ва $\cos\left(-3\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arcsin\frac{1}{2} - 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2}$ ва $2\arcsin 1 - 2\arccos(-1)$.

13. а) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$ ва $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$;

б) $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$ ва $\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

14^{*}. Айниятҳоро исбот кунед:

а) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; б) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

§ 3. Арктангенс ва арккотангенс. Ҳалли муодилаҳои $tgx = a$ ва $ctgx = a$

Функсияи тангенс дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ҳамаи қиматҳои тири ададиро қабул мекунад. Аз ин рӯ, муодилаи $tgx = a$ дар ин фосила танҳо як реша дорад. Агар онро бо α ишора кунем ва ба назар гирем, ки даври тангенс баробари π аст, онгоҳ ҳалҳои боқимонда аз рӯи формулаи зерин ёфта мешавад:

$$x = \alpha + \pi k, \quad k \in Z$$

Мисол: Муодилаи $tgx = \sqrt{3}$ ҳал карда шавад.

Ҳал. Ҳалли асосии $tgx = \sqrt{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$ аст; ҳалҳои боқимонда: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z$. Ҳалли асосиро $\alpha = arctga$ ишора карда, ба он таъриф медиҳем:

Таъриф. ***arctg a*** **- кунҷи** $x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ **-ро меноманд, ки тангенси он ба *a* баробар аст.**

Ҳалли умумии муодилаи $tgx = a$ намуди зеринро мегирад:

$$\boxed{x = arctga + \pi k, \quad k \in Z}$$

Ҳолатҳои гуногуни ҳалли муодилаи $tgx = a$-ро дар ҷадвал (ҷадвали 5) ҷойгир мекунем:

Мисолҳо:

а) $arctg0 = 0$; б) $arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

Муодилаи $ctgx = a$ ба монанди муодилаи $tgx = a$ дида баромада мешавад. Асоснок намудани ҳалли онро ба ихтиёри Шумо ҳавола намуда, натиҷаи охиринро менависем:

№	Муодила	Ҳалли муодила ба воситаи градус	Ҳалли муодила ба воситаи радиан
1	$tgx = 0$	$x = 180^\circ k$	$x = \pi k$
2	$tgx = 1$	$x = 45^\circ + 180^\circ k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$
3	$tgx = -1$	$x = -45^\circ + 180^\circ k$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$
4	$tgx = \pm a$	$x = \pm\alpha^\circ + 180^\circ k$	$x = \pm arctg\lvert a\rvert + \pi k$

$$x = \alpha + \pi k, \qquad 0 < \alpha < \pi, \quad k \in Z.$$

Ва ё

$$\boxed{x = arcctga + \pi k, \quad k \in Z}$$

Таъриф. $arcctg\ a$ - кунҷи $x \in (0;\pi)$-ро меноманд, ки котангенси он ба a баробар аст.

Мисол. Муодилаи $ctgx = \sqrt{3}$ ҳал карда шавад.

Ҳал. $ctgx = \sqrt{3}$; $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$.

Мавридҳои гуногуни ҳалли муодилаи $ctgx = a$ -ро дар ҷадвал (ҷадвали 6) ҷой медиҳем:

Ҷадвали 6

№	Муодила	Ҳалли муодила ба воситаи градус	Ҳалли муодила ба воситаи радиан
1	$ctgx = 0$	$x = 90^\circ + 180^\circ k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
2	$ctgx = 1$	$x = 45^\circ + 180^\circ k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$
3	$ctgx = -1$	$x = -45^\circ + 180^\circ k$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$
4	$ctgx = \pm a$	$x = \pm\alpha^\circ + 180^\circ k$, α° - кунҷи тез	$x = \pm arcctg\lvert a\rvert + \pi k$

Барои арктангенс ва арккотангенс айниятҳои зерин ҷой доранд:

1. $tg(arctga) = a$; 2. $ctg(arcctga) = a$;
3. $arctg(tgx) = x$; 4. $arcctg(ctgx) = x,\ 0 < x < \pi$;
5. $arctg(-x) = -arctgx$; 6. $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$.

?

1. Ба калимаҳо ва рамзҳои манбаъвие, ки дар матн дучор меоянд, эътибор диҳед: арктангенс, арккотангенс, $arctga$, $arcctga$, $tg(arctga)$, $arctg(tgx)$, $ctg(arcctga)$, $arcctg(ctgx)$.
2. Арктангенси a чӣ маъно дорад? Кадом қиматҳоро қабул мекунад?
3. Арктангенси a дар кадом маврид муайян аст?
4. Арккотангенси a чӣ маъно дорад?
5. Арктангенс ва арккотангенс функсияҳои камшавандаанд ё афзуншаванда?
6. Муодилаҳои тригонометрии соддатарин $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$ ва $ctgx = a$ чандто ҳал доранд?

Машқҳо

Ҳисоб кунед ($15^{\circ} - 17$):

15°. а) $arctg0$; б) $arctg1$; в) $arctg(-1)$;
г) $arcctg0$; д) $arcctg1$; е) $arctg\sqrt{3}$.

16. а) $arctg0 + arctg\sqrt{3} + arcctg\sqrt{3} + arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

б) $arctg(-1) + arcctg(-1) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

17. а) $2\arccos\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} - 3arctg1$;

б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - arctg\frac{\sqrt{3}}{3} - arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

18. Айниятҳоро исбот кунед:

а) $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$; б) $tg(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $ctg(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $\cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Қимати ифодаҳоро ёбед ($19^{\circ} - 22^{*}$):

19°. а) $tg(arctg1 + arctg(-1))$; б) $tg\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg\sqrt{3}\right)$;

в) $tg\left(arctg0 + arctg\left(-\sqrt{3}\right)\right)$; г) $tg\left(arctg0 + arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$.

20. а) $tg\left(2arctg1 + 2arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$; б) $\cos(arcctg(-0{,}2839))$;

в) $tg\left(arctg\left(-\sqrt{3}\right)\right) + \sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + ctg\left(arcctg\sqrt{3}\right)$;

г) $tg(\arcsin 0{,}912)$.

21. а) $tg\left(arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{4}\right)$; б) $\sin(2arctg3)$.

22*. а) $\cos\left(arcctg\frac{3}{4} + arcctg\left(-\frac{12}{5}\right)\right)$;

б) $\sin\left(2arctg\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right)$.

Нишондод. $arctg\frac{1}{2} = \alpha$, $\arccos\frac{3}{4} = \beta$ ишорат карда аз формулаҳои $\sin(\alpha - \beta)$, $\sin 2\alpha$ ва $\cos 2\alpha$ истифода баред.

§ 4. Ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ

Ҳалли муодилаҳои мураккаби тригонометрӣ бо ёрии табдилдиҳиҳои гуногун ба ҳалли муодилаҳои оддатарин ($\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$, ва $ctgx = a$) оварда мешаванд.

Методҳои ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ хеле зиёданд. Вале дар амал **методи табдилдиҳиҳои маълум, методи ба забкунандаҳо ҷудокунӣ ва методи дохил намудани номаълуми нав бештар** истифода бурда мешавад.

1. Муодилаҳое, ки бо ёрии табдилдиҳиҳои маълум ҳал карда мешаванд

Татбиқи ин тарзро дар ҳалли муодилаҳо дида мебароем.

Мисолҳо. Муодилаҳоро ҳал кунед:

1. $\sin 5x \cos 3x = \sin x \cos x$

Ҳал. Тарафи чапи муодила табдилдиҳиҳии маълумро ифода мекунад; ҳосили зарбро ба сумма табдил медиҳем:

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \sin x \cos x.$$

Ва ё $\sin 8x + \sin 2x = 2\sin x \cos x$

Тарафи рости ин баробарӣ табдилдиҳии маълумро ифода мекунад:

$$\sin 8x + \sin 2x = \sin 2x$$

Аз ин ҷо: $\sin 8x = 0$, $8x = \pi k$, $x = \frac{\pi k}{8}$, $k \in Z$.

Ҷавоб. $x = \frac{\pi k}{8}$, $k \in Z$.

2. $\sin x + \sin 3x = 0$

Ҳал. Тарафи чап табдилдиҳии маълум аст. Суммаро ба ҳосили зарб табдил медиҳем:

$$2\sin\frac{x+3x}{2} \cdot \cos\frac{x-3x}{2} = 0 \Rightarrow 2\sin 2x \cos x = 0$$

Таваҷҷӯҳ фармоед! Агар дар муодилаи тригонометрӣ тарафи чапи он ҳамзарбҳои номаълум дошта, тарафи росташ ба сифр баробар бошад, ҳар якеи ин ҳамзарбҳоро ба сифр баробар карда, муодилаҳои ҳосилшударо ҳал кардан лозим аст.

Аз ин ҷо: $\sin 2x = 0, \quad 2x = \pi k, \quad x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z$

ва $\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$

Азбаски ҳамаи ҳалҳои муодилаи дуюм дохили ҳалҳои якум ҳастанд (санҷед!), бинобар ин **ҷ а в о б** ро кӯтоҳ $x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z$ менависем.

3. $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$

Ҳ а л. Ба ҳар се аъзои тарафи чапи муодила табдилдиҳии маълумро тадбиқ мекунем. Суммаро ба ҳосили зарб табдил медиҳем:

$$\sin 5x + \sin x = 2\sin 3x \cos 2x$$

Ғайр аз ин, $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ аст. Баъди 1-ро ба тарафи чап гузаронидан муодила намуди зеринро мегирад:

$$2\sin 3x \cos 2x + (1 - \cos 2x) - 1 = 0; \quad 2\sin 3x \cos 2x - \cos 2x = 0$$

Зарбкунандаи умумиро аз қавс мебарорем:

$$\cos 2x \cdot (2\sin 3x - 1) = 0$$

Аз ин ҷо ду муодила ҳосил мекунем:

$$\cos 2x = 0, \;\; 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \;\; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z;$$

$$2\sin 3x - 1 = 0, \quad \sin 3x = \frac{1}{2},$$

$$3x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Азбаски $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ аст, онгоҳ $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z$ мешавад.

Ба ҳамин тариқ, ҳалли муодила аз ададҳои зерин иборатанд:

Ҷ а в о б: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$.

Масъала. Координатаҳои нуқтаҳои буриши ду синусоидаро муайян кунед: $y_1=2\sin x$ ва $y_2=\sin 3x$

Ҳ а л. Муодилаи зеринро тартиб медиҳем

$$2\sin x=\sin 3x$$

Табдил медиҳем: $\sin x+\sin x=\sin 3x$

$$\sin x=\sin 3x-\sin x$$

Тарафи рости муодила табдилдиҳии маълум аст:

$$\sin x=2\sin x\cos 2x$$

Аз ин ҷо: $\sin x=0$, $x=\pi k$, $k\in Z$

$$\cos 2x=\frac{1}{2},\quad x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z.$$

Нуқтаҳои матлуби буриши синусоидаҳоро меёбем:

$(0;0)$, $(\frac{\pi}{6};1)$, $(\frac{5\pi}{6};1)$, $(\pi;0)$ ва ғайраҳо

2. Муодилаҳое, ки ба воситаи табдилдиҳиҳо ба муодилаҳои алгебравӣ оварда мешаванд

Агар муодила аз якчанд функсияҳои тригонометрии аргументи якхела дошта иборат бошад, онгоҳ ҳамаи функсияҳоро ба воситаи яке аз онҳо ифода кардан мумкин аст. Дар он сурат нисбат ба ин функсия муодилаи алгебравие ҳосил мешавад, ки онро бо **методи дохил намудани номаълуми нав** ва ё **бо зарбкунандаҳо ҷудокунӣ** ҳал мекунанд.

М и с о л ҳ о. Ҳалли муодилаҳо.

1. $2\sin^2 x+\cos x-1=0$

Ҳ а л. Агар $\sin^2 x$-ро ба воситаи косинус ифода кунем, муодилаи алгебравӣ нисбат ба функсияи косинус ҳосил мешавад:

$$2(1-\cos^2 x)+\cos x-1=0,\quad 2\cos^2 x-\cos x-1=0.$$

Номаълуми нав дохил мекунем: $\cos x=y$.

Муодилаи квадратии $2y^2 - y - 1 = 0$ ҳосил мешавад.

Ҳалли он: $y_1 = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = 1$.

Пас, $\cos x = -\frac{1}{2}, \;\; x = \pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi k = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \;\; k \in Z.$

$\cos x = 1, \quad x = 2\pi k, \quad k \in Z.$

Ҷ а в о б: $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \;\; k \in Z, \;\; x = 2\pi k, \;\; k \in Z.$

2. $\quad 3\sin x + \cos x = 1$

Ҳ а л. Муодиларо дар ин намуд менависем:

$$3\sin x - (1 - \cos x) = 0$$

$\sin x$ ва $(1 - \cos x)$ -ро бо ёрии формулаҳои нисфи кунҷ ифода карда пайдо мекунем:

$$6\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0, \;\; 3\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 0$$

Ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:

$$\sin\frac{x}{2}(3\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}) = 0$$

Аз ин ҷо:

$\sin\frac{x}{2} = 0, \;\; \frac{x}{2} = \pi k, \;\; x = 2\pi k, \;\; k \in Z$

$3\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0, \; tg\frac{x}{2} = 3,$

$\frac{x}{2} = arctg3 + \pi k, \quad x = 2arctg3 + 2\pi k, \;\; k \in Z.$

Ҷ а в о б: $x = 2\pi k, \;\; k \in Z; \;\; x = 2arctg3 + 2\pi k, \;\; k \in Z.$

3. $\quad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 1 + \cos 2x$

Ҳ а л. Ҳамаи аъзоҳои муодиларо ба тарафи чап мегузаронем:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-x)-(1+\cos 2x)=0$$

Маълум, ки $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$ ва ифодаи $1+\cos 2x$ бошад

баробари $1+\cos 2x=2\cos^2 x$ аст.

Онгоҳ, $\cos x-2\cos^2 x=0$.

Муодилаи алгебравӣ нисбат ба функсияи косинус пайдо шуд. Зурбкунандаи умумиро аз қавс мебарорем.

$$\cos x(1-2\cos x)=0$$

Аз ин ҷо: $\cos x=0,\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z$

$$1-2\cos x=0,\quad \cos x=\frac{1}{2},\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z.$$

Ҷ а в о б: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z$ ва $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z.$

3. Муодилаҳое, ки ба воситаи паст кардани дараҷа ҳал карда мешаванд

Агар муодила квадрати синусҳо ва косинусҳоро дарбар гирад, формулаҳои $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ ва

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$-ро истифода бурда, тартиби муодиларо паст мекунем. Махсусан, дар муодилаҳое, ки онҳо аз синус ва косинуси дараҷаҳои ҷуфти баланд иборатанд, татбиқи ин формулаҳо ба мақсад мувофиқ аст.

М и с о л ҳ о. Ҳалли муодилаҳо.

1. $4\sin^2 x-\cos 2x=5$

Ҳ а л. Бо ду тарз ҳал мекунем.

Т а р з и 1. Агар $\sin^2 x$-ро ба $\frac{1-\cos 2x}{2}$ иваз кунем, дараҷаи муодила паст шуда, нисбат ба $\cos 2x$ муодилаи хаттӣ пайдо мешавад.

$$4\cdot\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)-\cos 2x=5,\quad \cos 2x=-1,\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$$

Т а р з и 2. Ба эътибор мегирем, ки $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ аст. Онгох, $4\sin^2 x-(1-2\sin^2 x)=5;\quad \sin^2 x=1;$

$$x_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z \quad \text{ва} \quad x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Ҷ а в о б. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$

2. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cos x$

Ҳ а л. Муодила дар ин намуд ба ягон табдилдиҳии маълум шабоҳате надорад. Вале дида метавонем, ки:

$$(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\frac{1}{2}\sin 2x \qquad \text{мешавад.}$$

Акнун ба муодилаи ҳосилшуда **табдилдиҳиҳои маълумро** татбиқ кардан мумкин аст. Аз формулаҳои $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ ва $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\sin 2x$$

Аз ин ҷо: $\qquad 1+\cos^2 2x=\sin 2x$

Аз рӯи айнияти асосӣ $(\cos^2 2x+\sin^2 2x=1)$ $\cos^2 2x$-ро ба $1-\sin^2 2x$ иваз карда, нисбат ба функсияи $\sin 2x$ муодилаи алгебравӣ пайдо мекунем:

$$\sin^2 2x+\sin 2x-2=0$$

Гузориши $\sin 2x=y$ муодилаи квадратии зеринро медиҳад:

$$y^2 - y - 2 = 0, \quad y_1 = 2; \quad y_2 = -1.$$

$\sin 2x = 2$, ҳал надорад, зеро $-1 < \sin x < 1$ аст.

$$\sin 2x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z.$$

Ҷ а в о б. $\quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$

4. Муодилаҳои якҷинса

Муодилаҳои намуди

$$a \sin x + b \cos x = 0 \qquad (1)$$

ва $\quad a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos x = 0 \qquad$ (2)-ро дида мебароем.

Таъриф. Муодилае, ки дар он суммаи дараҷаҳои синус ва косинуси ҳар як ҷамъшавандаи тарафи чап якхела аст, муодилаи якҷинса ном дорад.

Муодилаҳои (1) ва (2) – мувофиқан муодилаҳои якҷинсаи дараҷаи якум ва дуюм мебошанд. Ҳар ду тарафи муодилаи якумро ба $\cos x (\cos x \neq 0)$ ва ҳарду қисми муодилаи дуюмро ба $\cos^2 x$ тақсим карда, нисбат ба tgx муодилаи алгебравӣ ҳосил мекунем:

$$atgx + b = 0$$

$$atg^2 x + btgx + c = 0$$

Ин муодилаҳо ба воситаи гузориши $tgx = y$ ҳал карда мешаванд:

$$ay + b = 0, \quad y = -\frac{b}{a}, \quad tgx = -\frac{b}{a};$$

$$x = -arctg\frac{b}{a} + \pi k, \quad k \in Z.$$

$$ay^2 + by + c = 0,$$

$y_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, агар $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ бошад, муодила ду решаи ҳақиқӣ дорад, ҳангоми $b^2-4ac<0$ муодила ҳал надорад.

Мисолҳо. Ҳалли муодилаҳо.

1. $2\sin x-3\cos x=0$

Ҳал. Ду тарафи муодиларо ба $\cos x(\cos x\neq 0)$ тақсим мекунем:

$$2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}-3=0,\quad 2tgx=3,\quad x=arctg\frac{3}{2}+\pi k,\quad k\in Z.$$

Ҷавоб. $x=arctg\frac{3}{2}+\pi k,\quad k\in Z.$

2. $\sin^2 x-8\sin x\cos x+7\cos^2 x=0$

Ҳал. $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{8\sin x\cos x}{\cos^2 x}+\frac{7\cos^2 x}{\cos^2 x}=0,\quad tg^2x-8tgx+7=0.$

Гузориши $y=tgx$ муодилаи квадратии $y^2-8y+7=0$-ро медиҳад. Ҳалли он: $y_1=1$ ва $y_2=7$

Решаҳои муодилаи дода шударо меёбем:

$$tgx=1,\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in Z,$$

$$tgx=7,\quad x=arctg7+\pi k,\quad k\in Z.$$

Ҷавоб: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in Z$ ва $x=arctg7+\pi k,\quad k\in Z.$

3. $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2.$

Ҳал. Ба тарафи рости муодила айнияти $2=2(\cos^2 x+\sin^2 x)$-ро татбиқ мекунем:

$$3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2(\cos^2 x+\sin^2 x),$$

$$\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0.$$

Ду тарафи муодиларо ба $\cos^2 x$ тақсим мекунем:

$$tg^2x-4tgx+3=0.$$

$tgx = y$ мугезорем: $y^2 - 4y + 3 = 0$. Решаҳои он: $y_1 = 1$ ва $y_2 = 3$.

Ҳалли муодилаи додашуда:

Ҷ а в о б: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$ ва $x = arctg3 + \pi k,\ \ k \in Z.$

?

1. Кадом тарзҳои ҳалли муодилаҳои тригонометриро медонед?
2. Моҳияти тарзи ба зарбкунандаҳо ҷудокуниро фаҳмонед.
3. Чигуна муодилаҳоро муодилаҳои якҷинса меноманд? Тарзҳои ҳалли онҳоро баён кунед.
4. Кадом намуди муодилаҳои тригонометрӣ ба воситаи паст кардани дараҷа ҳал карда мешаванд?

Машқҳо

Муодилаҳои зеринро бо тарзи ба зарбкунандаҳо ҷудокунӣ ҳал кунед ($23^\circ - 25$):

23°. а) $\cos x(\sin x - 3) = 0$; б) $\sin x(2\cos x - 1) = 0$;

в) $\cos x(2\sin x + 1) = 0$; г) $\sin^2 x = \sin x$;

д) $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos x$; е) $\sqrt{3}tgx - tg^2 x = 0$;

ё) $\cos^2 x + 3\cos x = 0$; ж) $\sqrt{3}\sin x\cos x = \sin^2 x$;

з) $3\cos^2 x + \cos x = 0$.

24. а) $\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{4}{5}x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{4}{5}x\right)$; б) $1 + \cos x = \sin^2 \frac{x}{2}$;

в) $ctg^2 \frac{x}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}} ctg \frac{x}{4} = 0$; г) $\cos^2\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$.

25. а) $\sin 2x + \cos x = 0$; б) $tg^2 x \sin^3 x = \sin^3 x$;

в) $\cos 4x \cos 5x = \cos 6x \cos 7x$.

Муодилаҳоро ҳал кунед ($26^{\circ}-29^{*}$):

26°. а) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=1$;

б) $\cos(x-30^{\circ})\cos(x+30^{\circ})-\sin(x-30^{\circ})\sin(x+30^{\circ})=0$.

27. а) $\sin x\sin 2x+\cos x\cos 2x=0$;

б) $\sin x\sin 2x=\cos x\cos 2x$;

в) $\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=0$;

г) $\sin 3x-\cos 2x\sin x=0$.

28. а) $\cos 5x\cos x=\cos 4x$; б) $\cos x\cos 2x=\cos 3x$.

29*. а) $\cos x\sin 3x-\cos 5x\sin 7x=\frac{1}{2}\sin 4x$;

б) $\sin(x+30^{\circ})\sin(x-30^{\circ})=\frac{1}{8}-\sin^2 x$.

Муодилаҳоро ҳал кунед ($30^{\circ}-33^{*}$):

30°. а) $\cos 4x+\cos 2x=0$; б) $\sin 5x-\sin x=0$.

31. а) $\sin(x+60^{\circ})-\sin(x-60^{\circ})=\sqrt{3}$;

б) $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$.

32. а) $\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\sin 4x=0$;

б) $\cos 2x+\cos 8x=1+\cos 6x$.

33*. а) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$;

б) $\cos 2x+\sin 2x+\cos x-\sin x=1$.

Муодилаҳоро бо ёрии тангенси нисфи кунҷ ҳал кунед ($34^{\circ}-36$):

34°. а) $3\sin x+4\cos x=4$; б) $2\sin x+5\cos x=-5$.

35. а) $3\sin x+4\cos x=3$; б) $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}$.

36. а) $3\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$; б) $\sin 2x-4\cos 2x=4$.

Қимати калонтарин ва хурдтарини суммаро ёбед ($37^{\circ}-39$):

37°. а) $\sin x+\cos x$; б) $1+\cos x$; в) $2\sin x+3$;

38. а) $1-4\cos 2x$; б) $\frac{1}{4}+2\cos^2 x$; в) $10-9\sin^3 3x$.

39. а) $1-8\sin^2 x\cos x$; б) $2\sin^2 x-\cos 2x$; в) $1+tgx tg2x$.

Муодилаҳоро бо методи дохил намудани номаълуми нав ҳал кунед ($40^\circ - 42$):

40°. а) $\sin^2 x+2\sin x+1=0$; б) $4\cos^2 x-4\cos x+1=0$;

в) $tg^2 2x-7tg2x+10=0$; г) $\cos^2(\pi-x)+8\cos(\pi-x)=-7$.

41. а) $tg^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)tgx+\sqrt{3}=0$;

б) $\cos^2 5x-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\cos 5x+\frac{\sqrt{2}}{4}=0$;

в) $2\sin^2 x+5\sin(1{,}5\pi-x)=2$; г) $\sin^2\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{3}=0$.

42. а) $7\sin^2 x-5\cos^2 x+2=0$; б) $tg^2 x+ctg^2 x=2$;

в) $2\cos^2 x=3\sin x$; г) $2-3tgx\cos^2 x=\cos^2 x$.

Муодилаҳоро ҳал кунед ($43^\circ - 46^*$):

43°. а) $\cos^4 x-\sin^4 x=1$; б) $\cos^4 x-\cos^2 x=0$;

в) $4\cos^2 x+\cos 2x=5$; г) $\sin 2x+2\cos^2 x=0$.

44. а) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}$; б) $\sin^2 x+\cos^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$.

45. а) $1+\cos^2 x=\sin^4 x$;

б) $\sin^4 x+\cos^4 x-3\sin 2x+\frac{5}{2}\sin^2 2x=0$.

46*. а) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}$; б) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Муодилаҳоро ҳал кунед ($47^\circ - 50^*$):

47°. а) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$; б) $3\sin^2 x-5\sin x\cos x=0$;

в) $\cos 2x+2\cos^2 x=0$; г) $\sin x ctgx+\cos x tgx=0$;

д) $\sin 3x + \cos 3x = 0$; е) $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$.

48. а) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;

б) $4\sin^2 x + \cos^2 x = 4\sin x\cos x$.

49. а) $3\sin^2 2x - 0{,}5\sin 4x = 4\cos^2 2x$;

б) $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 3$;

в) $22\cos^2 x + 4\sin 2x = 7$; б) $\cos^2 x - 3\sin x\cos x = -1$.

50*. а) $25\sin^2 x + 30\sin x\cos x + 9\cos^2 x = 25$;

б) $4\sin^2 x + 7\cos^2 x + 3\sin 2x - 6\cos 2x = 1$.

Н и ш о н д о д. Формулаҳои дучанда ва айнияти $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ -ро истифода бурда, ба муодилаи якҷинса оред.

§ 5. Системаи муодилаҳои тригонометрӣ ва ҳалли онҳо

Агар системаи муодилаҳо фақат аз муодилаҳои тригонометрӣ ва ё аз муодилаҳои тригонометрию алгебравӣ иборат бошад, онро *системаи муодилаҳои тригонометрӣ* меноманд.

Ба Шумо тарзҳои гуногуни ҳалли системаи муодилаҳои алгебравӣ: **ҷамъи алгебравӣ, гузориш, дохил намудани номаълуми нав** маълуманд.

Системаҳои муодилаҳои тригонометрӣ низ бо ҳамин тарзҳо ҳал карда мешаванд.

1. Тарзи ҳалли системаи намуди

$$\begin{cases} \sin x\cos y = a, \\ \cos x\sin y = b. \end{cases} \qquad (1)$$

-ро дар мисоли зерин дида мебароем:

М и с о л. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin y \cos x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ҳ а л. **Муодилаҳоро ҷамъ ва тарҳ карда ҳосил мекунем:**

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \sin y \cos x = 1, \\ \sin x \cos y - \sin y \cos x = 0. \end{cases}$$

Тарафи чапи муодилаҳои система табдилдиҳиҳои маълуманд:

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 1, \\ \sin(x - y) = 0. \end{cases}$$

Ҳар яке аз ин муодилаҳоро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = \pi n. \end{cases} \qquad k, n \in Z$$

Чӣ тавре ки мебинем дар ин ҷо мо ду параметр k ва n $(k, n \in Z)$ -ро дохил намудем. Агар дар ин система мо танҳо як параметр (масалан, k)-ро истифода менамудем, ин сабабгори гумшавии ҳалли системаи дода шуда мегардид.

Бинобар ин, фаромӯш набояд кард, ки:

Ҳангоми ҳалли системаи муодилаҳои тригонометрӣ ба ҳар як муодилаи дар он ворид буда як параметр (аз маҷмуи z) интихоб кардан лозим аст.

Системаи ду муодилаи дуномаълумадор ҳосил шуд. Онҳоро ҷамъ ва тарҳ карда, ҳалли системаи дода шударо меёбем:

Ҷ а в о б:
$$\begin{cases} x = \pi\left(\dfrac{\pi}{2} + k + \dfrac{1}{4}\right), \\ y = \pi\left(k - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{4}\right). \end{cases} \qquad k,\ n \in Z$$

2. Тарзи ҳалли системаи намуди

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = a, \\ \sin x - \cos y = b. \end{cases}$$

Ҳалли системаро дар мисоли зерин нишон медиҳем.
Системаи муодилаҳоро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{4}{5}, \\ \sin x - \cos y = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Ҳ а л. Муодилаҳои системаро ҷамъ ва тарҳ карда меёбем:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos y = \dfrac{3}{10}. \end{cases}$$

Ҳар яке аз ин муодилаҳоро ҳал карда, пайдо мекунем:

Ҷ а в о б: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ y = \pm \arccos\dfrac{3}{10} + 2\pi k. \end{cases}$ $k, n \in Z$

3. Тарзи ҳалли системаи намуди

$$\begin{cases} \cos x \cos y = a, \\ x + y = b. \end{cases} \qquad (1)$$

-ро дар мисоли зерин нишон медиҳем.

М и с о л. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Ҳ а л. Аз муодилаи дуюми система y -ро маълум намуда $\left(y=\frac{\pi}{3}-x\right)$, онро ба муодилаи якуми система мегузорем:

$$\begin{cases} \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2}, \\ x+y=\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Ҳосили зарби ду косинусро мувофиқи формулаҳои сумма ва фарқи косинусҳо табдил дода ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} \cos\left(x+\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}+x\right)=1, \\ x+y=\frac{\pi}{3}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1, \\ x+y=\frac{\pi}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}, \\ x+y=\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Аз системаи охирин меёбем:

$$\begin{cases} 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in Z \\ x+y=\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+\pi k, \\ y=-\pi k. \end{cases} \quad k\in Z$$

Ҷ а в о б: $x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$ ва $y=-\pi k,\ k\in Z$

?

1. Ба калимаҳо ва ибораҳои манбаъвие, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: параметр, муодилаҳои тригонометрию алгебравӣ, системаи муодилаҳои тригонометрӣ, системаи ду муодилаи дуномаълума ва г.
2. Системаи муодилаҳои тригонометриро маънидод кунед.
3. Тарзҳои ҳалли системаи муодилаҳои тригонометриро номбар кунед.

Машқҳо

51. (Шифоҳӣ). Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} \sin(x+y)=1, \\ \sin(x-y)=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos 2y=\dfrac{1}{2}, \\ \cos 2x=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Бо методи табдилдиҳиҳои маълум, ҷамъи алгебравӣ ва дохил кардани номаълуми нав системаи муодилаҳоро ҳал кунед ($52^\circ - 54^*$):

52°. а) $\begin{cases} \cos(x+y)=0, \\ \cos(x-y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x\cos y=-0{,}5, \\ \cos x\sin y=0{,}5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \cos x\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \sin x\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin x\sin y=\dfrac{1}{4}, \\ 3tgx=ctgy. \end{cases}$

53. а) $\begin{cases} \sin x\cos y=\dfrac{1}{6}, \\ \sin x+\cos y=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x\cos y=\dfrac{3}{4}, \\ \sin x\sin y=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x+\cos y=-\dfrac{1}{2}, \\ \sin x-2\cos y=1. \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin x+2\cos y=1{,}5, \\ \sin x-\cos y=0. \end{cases}$

54*. а) $\begin{cases} tgx+tgy=2, \\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} tgx+tgy=\sin x, \\ tgx-tgy=\sin(-x). \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x\sin y=0{,}75, \\ tgxtgy=3. \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin x-\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=2. \end{cases}$

Системаи муодилаҳоро бо методи гузориш ва табдилдиҳиҳои маълум ҳал кунед ($55^{\circ} - 57^{*}$):

55°. а) $\begin{cases} tgy = 0, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

56. а) $\begin{cases} tgx + tgy = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} tgx tgy = 0, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

57^{*}. а) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ x + y = 75^{\circ}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos 2x - \cos 2y = -\sqrt{3}. \end{cases}$

§ 6. Ҳалли нобаробариҳои тригонометрии оддитарин

Ҳалли ҳаргуна нобаробарии тригонометрӣ одатан ба ҳалли нобаробариҳои оддитарин $\sin x \le a$, $\cos x \le a$, $tg \le a$ ва ғ. оварда мерасонад.

Барои ҳалли нобаробариҳои тригонометрӣ зарур аст, ки:

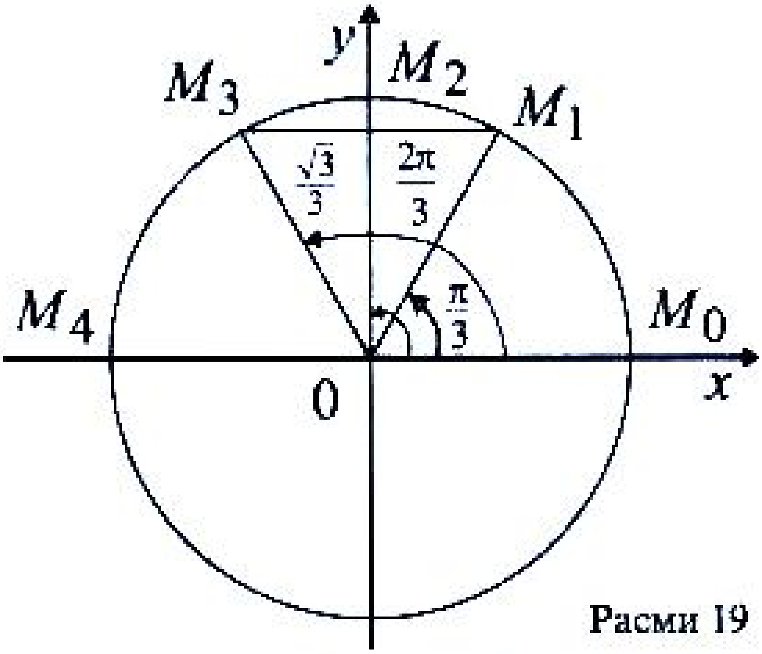
1. Графики функсияҳои тригонометрии мувофиқро созем:
2. Дар давраи воҳидӣ ҳалли нобаробариро тасвир карда тавонем;
3. Даври будани функсияро ба эътибор гирем.
4. Нобаробариро дар фосилаи дилхоҳ, ки дарозии он ба даври функсияи дода шуда баробар аст, муоина намоем.

Ин амалиёт хусусияти алгоритмӣ дорад. Онро ба инобат гирифтан шарт аст.

М и с о л и 1. Нобаробарии $\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ҳал карда шавад.

Т а р з и 1. **Давраи воҳидӣ месозем.** Адади $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$-ро дар тири синусҳо мегузорем. Хати росте, ки аз болои ин адад мегузарад, давраро дар нуқтаҳои M_1 ва M_3 мебурад. Аз расми 19 айён аст, ки камонҳои M_0M_1 ва $M_0M_1M_3$ ба $\frac{\sqrt{3}}{2}$ баробаранд.

Нобаробарии дода шударо ҳамаи камонҳо, ки ибтидои онҳо дар нуқтаи M_0 воқеъ буда, охирашон ба нуқтаҳои дилхоҳи дохилии камони $M_1M_2M_3$ марбутанд, қаноат мекунанд, яъне $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$.



Расми 19

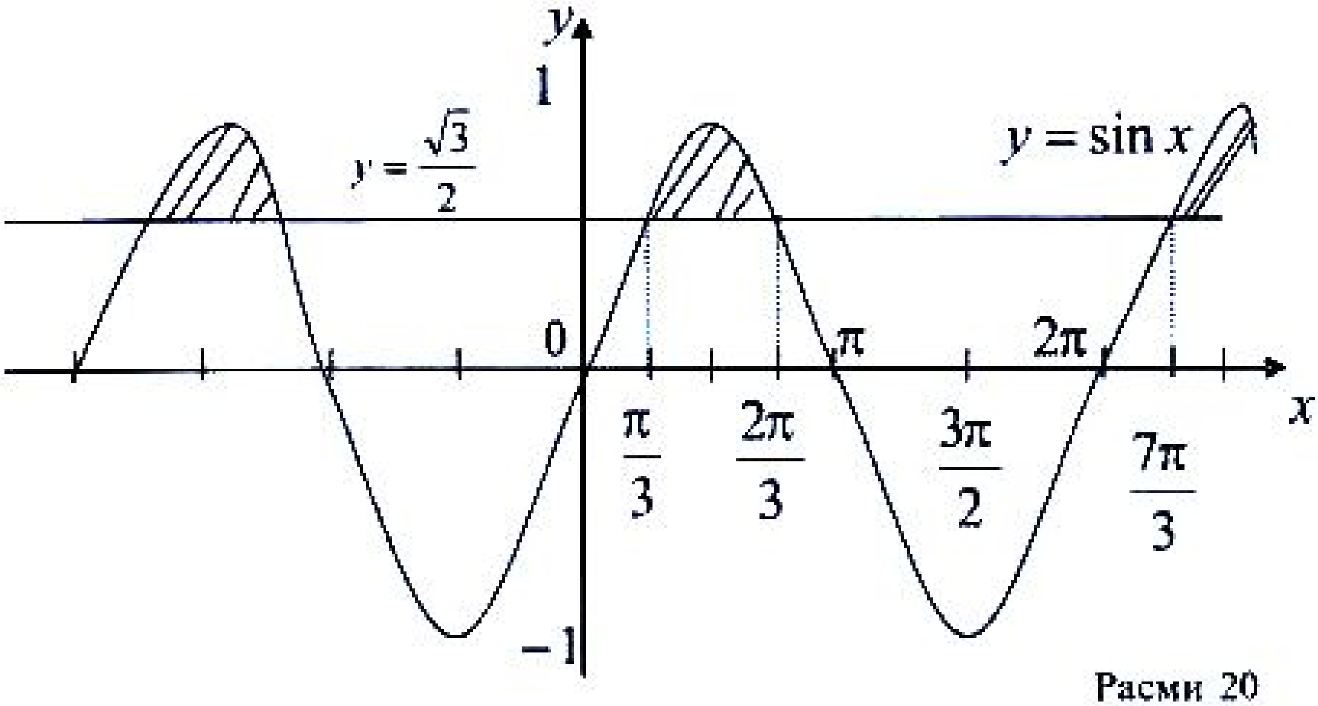
Барои пайдо кардани ҳамаи ҳалҳои нобаробарӣ ба охирҳои фосилаи $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ $2\pi k$ -ро илова мекунем (чаро?):

Ҷ а в о б: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z.$

Т а р з и 2. Графики функсияҳои $y = \sin x$ ва $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ -ро дар як нақша месозем (расми 20).

Аз расм намоён аст, ки хати рости $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ синусоидаро дар нуқтаҳои бешумор мебурад. Фосилаҳое, ки дар онҳо нобаробарӣ ҳал дорад, хеле зиёданд. Яке аз ин фосилаҳо $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ аст.

Даври будани синусро ба эътибор гирифта ҷавобро менависем:

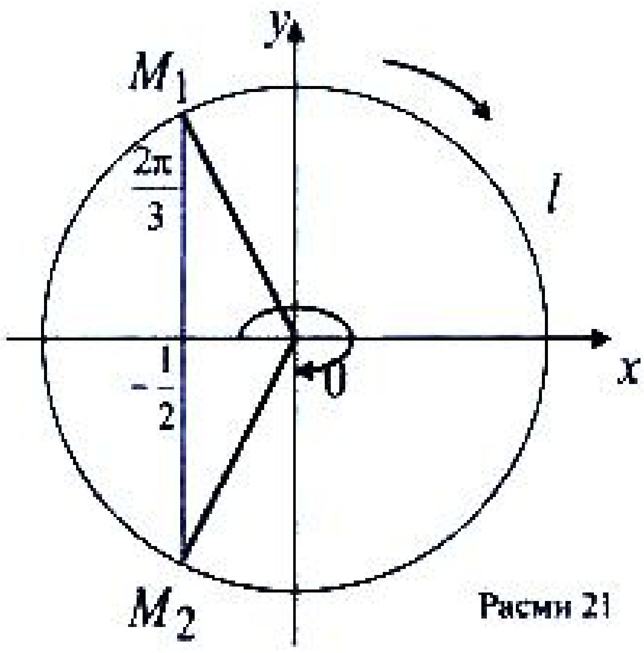


Расми 20

$$\frac{\pi}{3}+2\pi k < x < \frac{2\pi}{3}+2\pi k, \quad k \in Z.$$

М и с о л и 2. Нобаробарии $\cos x > -\frac{1}{2}$ ҳал карда шавад.

Ҳ а л. Нобаробариро ҳамаи нуқтаҳои давраи воҳидӣ, ки абсиссаашон аз $-\frac{1}{2}$ калон аст, қаноат мекунонад. Аз расми 21 дида мешавад, ки нуқтаҳои ин камон l дар тарафи рости хати рости $x=-\frac{1}{2}$ воқеъанд (онҳо ба хатти ғафс ҷудо карда шудаанд; охирҳои он ба нуқтаҳои M_1 ва M_2 дохил нестанд). Нуқтаи M_1 дар қисми



Расми 21

болоии нимдавра ҷойгир шуда абсиссааш $-\frac{1}{2}$ аст; ординатаи он $\arccos(-\frac{1}{2})=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ мебошад.

Кунҷи x ба фосилаи $(0;2\pi)$ тааллуқ дорад. Ҳамаи ҳалҳои нобаробарӣ аз ин фосила намуди зайлро мегирад.

$$-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$$

Агар даври будани косинусро ба эътибор гирем ва ба охирҳои ин фосила адади $2\pi k$-ро илова намоем, ҳалҳои боқимонда ҳосил мешаванд:

Ҷ а в о б: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z$

?

1. Ба калимаҳо ва ибораҳои манбавие, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: давраи воҳидӣ, нобаробарии тригонометрӣ, ҳалли нобаробарии тригонометрӣ, фосилаҳое, ки дар онҳо нобаробарӣ ҳал дорад.
2. Хусусияти алгоритми доштани ҳалли нобаробариҳои тригонометриро маънидод кунед.
3. Методҳои ҳалли нобаробариҳои тригонометриро баён кунед.
4. Чӣ тавр, аз рӯи як ҳалли нобаробарӣ ҳалҳои боқимондаи он муайян карда мешаванд?

Машқҳо

Нобаробариҳоро ҳал кунед (58° – 60):

58°. а) $\sin x > 0$; б) $\sin x > \frac{1}{2}$;

в) $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x > \frac{1}{2}$.

59. а) $\sin x \le \cos x$; б) $\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$;

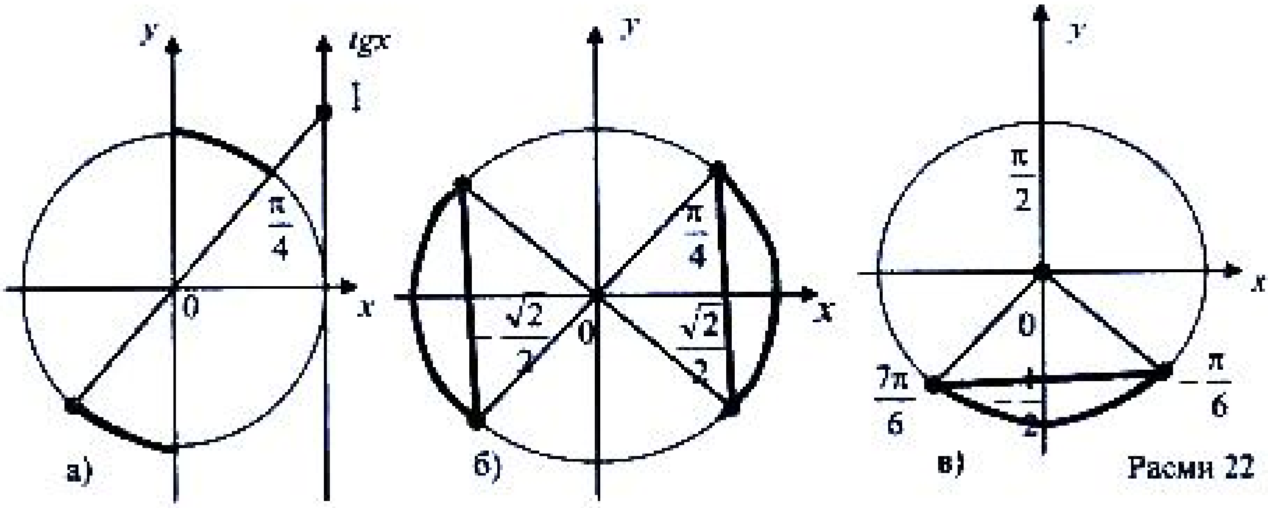
в) $\cos(-2x) \ge \frac{1}{2}$; г) $tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \ge \sqrt{3}$;

60. а) $\sin(2x - 30^\circ) < 0{,}2$;

б) $\sin x\cos\frac{x}{2}+\cos x\sin\frac{x}{2}>\frac{1}{3}$;

в) $2\cos^2 x+3\cos x-2\geq 0$; г) $\left(\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\geq 0.$

61. Дар давраи воҳидӣ ҳамаи ҳалҳои нобаробариҳои тригонометрӣ тасвир ёфтаанд (расми 22 а, б, в). Онҳо кадом нобаробариҳоанд?



Расми 22

Худро санҷед !

Иштибоҳ дар куҷост?

1. Толибилме баён намуд: «$\cos(-x)=\cos x$ аст, аз ин рӯ $\arccos(-x)=\arccos x$, яъне функсияи арккосинус – функсияи ҷуфт мебошад». Магар ин мулоҳиза дуруст аст?

2. Хонандае муодиларо ин тавр ҳал кард:

$$\sin^2 x+2\sin x-3=0;\quad \sin x=1;\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z$$

Магар ин ҳал дуруст аст?

3. Нобаробарии зерин чунин ҳал карда шудааст:

$$\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0;\qquad \sin 2x>\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \frac{\pi}{8}<x<\frac{3\pi}{8}.$$

Норасоии ҳал дар куҷост?

Кори амалии № 3

Мақсади кор. Истифодаи формулаҳои тригонометрӣ дар ҳалли масъалаҳои амалӣ ва муодилаҳои алгебравӣ.

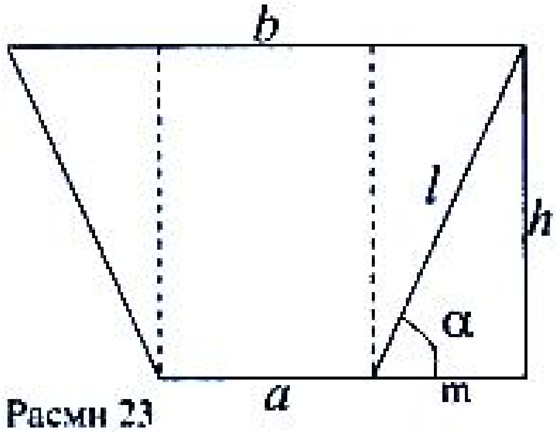
Варианти 1°. Истифодаи функсияи арктангенс барои муайян кардани кунҷи моилии паҳлӯҳои ҷӯйи обгузар.

Буриши кундалангии ҷӯйи обгузар трапетсияи баробарпаҳлӯ буда, a ва b мувофиқан дарозии асосҳои поёнӣ ва болоии ҷӯй, h - чуқурии он, m- давоми асоси поён, α -кунҷи моилии паҳлӯҳо ба асос ва l- моилии паҳлӯҳоро ифода мекунад (расми 23).

Аз расм айён аст, ки:

$$tg\alpha = \frac{h}{m} = \frac{2h}{b-a} \qquad (1)$$

$$\alpha = arctg\frac{2h}{b-a}$$



Расми 23

Дода шудааст: a, b, h

1. Формулаи нишебии паҳлӯҳоро муайян кунед.
2. Аз рӯи ҷадвали 7 α ва l-ро ҳисоб кунед:

Рақами тартиб	a м	b м	h м	Рақами тартиб	a м	b м	h м
1	0,6	3,6	1,5	4	0,8	3,8	3,0
2	1,0	4,0	1,5	5	0,8	5,8	5,0
3	0,6	10,6	5,0	6	1,0	2,5	1,5

Варианти 2. Истифодаи айнияти $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ барои ёфтани решаҳои ҳақиқии системаи:

$$\begin{cases} a^2x^2 + b^2y^2 = c^2, & (a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0) \\ xy = d. & (d \neq 0) \end{cases} \qquad (1)$$

Ҳалли ин гуна системаи муодилаҳо ба Шумо аз синфи 9 маълум аст. Ҳоло барои ҳалли системаи (1) айнияти $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ -ро истифода мебарем.

Ду тарафи муодилаи якуми системаи якро ба c^2 тақсим мекунем:

$$\begin{cases}\left(\frac{a}{c}\right)^2 x^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2 y^2=1, \\ xy=d.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(\frac{ax}{c}\right)^2+\left(\frac{by}{c}\right)^2=1, \\ xy=d.\end{cases} \quad (2)$$

Муодилаи якуми системаи (2)-ро ба айнияти асосии тригонометрӣ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ муқоиса намуда, навишта метавонем: $\frac{ax}{c}=\sin\alpha$ ва $\frac{by}{c}=\cos\alpha.$

Аз ин ҷо: $x=\frac{c}{a}\sin\alpha$ ва $y=\frac{c}{b}\cos\alpha$ (3)

Қиматҳои x ва y-ро ба муодилаи дуюми системаи ду гузошта ҳосил мекунем:

$$xy=\frac{c}{a}\sin\alpha\cdot\frac{c}{b}\cos\alpha=\frac{c^2}{ab}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{c^2\cdot 2}{2ab}\cdot\sin\alpha\cos\alpha=d$$

яъне $\sin 2\alpha=\frac{2abd}{c^2}$, $\left|\frac{2abd}{c^2}\right|\le 1.$ (4)

Агар $\left|\frac{2abd}{c^2}\right|\le 1$ бошад, ҳалҳои ҳақиқии системаи (1) вуҷуд доранд. Аз баробари (4) кунҷи α -ро муайян карда, ба воситаи муносибатҳои (3) x ва y -ро ёфта метавонем.

Супориш. Дода шудааст: $\begin{cases}0{,}680x^2+0{,}76y^2=1, \\ xy=0{,}564.\end{cases}$

1. Аз система $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ -ро маълум кунед.

2. Аз рӯи формулаи (4) $\sin 2\alpha$ -ро ҳисоб кунед, агар $\left|\frac{2abd}{c^2}\right|\le 1$ бошад.

3. Кунҷи α -ро маълум намоед.

4. Формулаҳои (3)-ро истифода бурда, ҳалҳои системаи дода шуда ($\boldsymbol{x}$ ва $\boldsymbol{y}$)-ро ёбед.

Супориши мустақилона доир ба боби III

Варианти 1°. Муодилаҳоро ҳал кунед:

1. $\sin 2x = \frac{1}{2}$,

2. $\cos^2 x + 3\cos x = 0$,

3. $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$.

4. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: $\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ x - y = 60^\circ. \end{cases}$

5. Нобаробариро ҳал кунед: $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Варианти 2. Муодилаҳоро ҳал кунед:

1. $\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$.

2. $2\sin^2 2x - 1 = 0$.

3. $tg^2 x = tgx$.

4. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: $\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = 0{,}75, \\ x - y = 60^\circ. \end{cases}$

5. Нобаробариро ҳал кунед: $2\cos x - 1 \geq 0$.

Варианти 3*. Муодилаҳоро ҳал кунед:

1. $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$.

2. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$.

3. $4\sin x + 3\cos x = 5$.

4. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0{,}25, \\ \sin y \cdot \cos x = 0{,}75. \end{cases}$

5. Нобаробариро ҳал кунед: $4\sin 2x \cdot \cos 2x \geq \sqrt{2}$.

Ба параграфҳои 1 - 3

Ҳисоб кунед ($62^{\circ} - 64^{*}$):

62°. а) $\arcsin 1$, б) $\arcsin 0$,

в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

63. а) $\arccos 0$, б) $\arccos(-1)$,

в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$, г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

64^{*}. а) $\arcsin 0 + \arccos 0 + arctg 0$,

б) $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + arctg\frac{\sqrt{3}}{3}$,

в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

г) $\sin(3arctg\sqrt{3}) - \arccos 0$.

Ба параграфҳои 4 - 5

Муодилаҳоро ҳал кунед ($65^{\circ} - 67^{*}$):

65°. а) $2\sin 3x - \sqrt{3} = 0$, б) $\cos(2x - 18^{\circ}) = \frac{1}{2}$,

в) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, г) $tg(5x + 6^{\circ}) = 1$.

66. а) $\left(1 + \sin\frac{x}{2}\right) \cdot tgx = 0$, б) $\cos 3x \cdot \cos x = 0$,

в) $\sin^3 x - \cos^3 x = 0$, г) $\cos 2x - \sin 2x = 0$.

67^{*}. а) $\cos 2x + \cos 4x = 0$, б) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$,

в) $tg3x - tgx = 0$, г) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos x$.

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (68° – 70^{*})

68°. а) $\begin{cases} x+y=\pi, \\ \cos x-\cos y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos^2 x+\sin^2 x=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x-\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}, \\ tgx\cdot tgy=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

69. а) $\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(x-y)=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=\dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x=2\sin y. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x+\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin x\cdot\sin y=0{,}25, \\ x+y=\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

70^{*}. а) $\begin{cases} tgx+tgy=1, \\ x+y=\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x=\sin y, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases}$

Ба параграфи 6

Нобаробариҳои тригонометриро ҳал намоед (71 – 72):

71. а) $\cos x>-\dfrac{1}{2}$; б) $|\sin x|\le|\cos x|$;

в) $6\cos^2 x-11\cos x+4>0$; г) $4\sin^2 x-8\sin x+3\ge 0$

72. а) $\sin x>-\dfrac{1}{2}$; б) $tgx\ge-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\cos x\ge -0{,}7$; г) $ctgx>-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

БОБИ IV. ҲОСИЛА

Дар алгебраи синфи 9 (боби 1) Шумо ҳангоми омӯзиши функсияи квадратӣ ба мафҳумҳои максимум ва минимум шинос шудед. Ингуна масъалаҳо дар фаъолияти амалии инсон аҳамияти калон доранд. Онҳо аз рӯи мазмун, шакл ва методҳои ҳал хеле гуногунанд, вале новобаста аз ин, ҳалли онҳо ба як мақсад – ёфтани **тарзи беҳтарин** равона карда шудаанд.

Воқеан, инсон тамоми ҳаёт тадбир меҷӯяд, ки дар ҳама ҷо чизи беҳтару хубтар ва судмандтарро пайдо кунад, аз чизи беманфиату зараровар даст кашад.

Дар математика тадқиқи масъалаҳо оид ба экстремум 25 аср қабл аз ин оғоз ёфта буд. Ва ҳалли онҳо дар давоми таърихи математика ба рушду нумӯи ин фан мусоидат намуданд. Вале муддати тӯлонӣ барои муайян кардани экстремумҳо дар математика нуқтаи назари ягона вуҷуд надошт. Тақрибан сесад сол пеш – дар аснои ташаккулёбии асосҳои таҳлили математикӣ ба омӯзиши ингуна масъалаҳо олими фаронсавӣ **П.Ферма** (1601-1665) ибтидо гузошт.

Маълум гардид, ки ҳалли ин масоил ба **гузаронидани расанда ба хати каҷ** ва тадқиқи он вобаста будааст. Баъзе ҳолатҳои хусусии ҳалли ин масъаларо олимони Юнони қадим медонистанд. Ба Шумо аз геометрия маълум аст, ки Евклид тарзи сохтани расанда ба давраро **маълум** карда буд. Расанда ба давра ҳамчун хати росте, ки ба давра танҳо як нуқтаи умумӣ дорад, таъриф дода мешавад.

Ин таъриф хусусияти умумӣ надорад. Онро барои хатҳои каҷи дилхоҳ истифода бурдан мумкин нест. Баъдтар **Архимед** (тақ. 287-212 пеш аз милод) ва **Аполлон** (тақ. 262-200 то милод) ба дигар хатҳои каҷ (парабола, гипербола ва г.) расанда сохтаанд. Аммо ба онҳо кашфи **методи умумии гузаронидани расанда ба нуқтаи дилхоҳи харгуна хати каҷ** муяссар нагардид.

Дар асри XVII аз тарафи олимони кишварҳои гуногун методҳои зиёди математикӣ барои ҳисоббарориҳои масоҳатҳо ва ҳаҷмҳо, аз он ҷумла, методи гузаронидани расанда ба хати каҷ кашф гардидаанд. Дар ин бобат саҳми ду донишманди бузург – олими англис **Исаак Ниютон** (1643-1727) ва олмонӣ **Готфрид Вилгелм Лейбнитс** (1646-1716) басо арзанда аст. Барои Ниютон ҳисоб намудани суръати тағйирёбии ҳолати ҳиссача вобаста аз тағйирёбии вақт хеле муҳим буд. Аз ҳамин нуқтаи назар барои ӯ **ҳосила суръат** ҳисоб меёфт.

Г.В. Лейбнитс ба натиҷаҳои Ферма ва дигар донишмандон такя намуда, алгоритми ҳалли масъалаи расанда ба хати каҷро математикӣ муайян кард. Кори ӯ соли 1684 интишор ёфта, дар он қоидаҳои асосии ҳосилагирӣ ворид гардида буданд. Истилоҳҳо ва аломатҳои кунунӣ аз ӯ ибтидо мегиранд.

Ниютон ва Лейбнитс новобаста аз якдигар нишон доданд, ки тадқиқи ҳодисаҳое, ки дар табиат, илму техника ғайримунтазам мегузаранд, танҳо ба воситаи ҳосила ба ҷо овардан имконпазир аст.

Таҳлили математикие, ки ба он ин ду донишманд асос гузоштанд, **дар асоси мафҳуми** ҳосила ҳамчун суръати тағйирёбии функсия бунёд гардид.

Мафҳуми ҳосила бо пуррагӣ дар мактаби олӣ омӯхта мешавад. Бинобар ин дар омӯзиши он то андозае маҳдуд мешавем.

§ 1. Афзоиши аргумент ва функсия

Фарз мекунем, ки функсияи $y=f(x)$ дода шудааст. Бигузор x ва x_1 ду қимати тағйирёбандаи новобаста аз $D(f)$ бошад. Онгоҳ фарқи $x_1 - x$ **афзоиши аргумент** ном дошта, бо Δx («делта икс» мехонем; онро дар асри XVIII Эйлер ворид намудааст) ишорат карда мешавад:

$$\Delta x = x_1 - x, \quad x_1 = x + \Delta x \tag{1}$$

Дар ин маврид мегӯянд, ки қимати аввалаи аргумент x ба Δx афзоиш ёфт.

Хотирнишон мекунем: Δ (ҳарфи юнонӣ) зарбкунандаи x ҳисоб намешавад; он аломати иҷрои амалии фарқро ифода мекунад. Ба монанди он ки синусро бе x навиштан мумкин нест, айни ҳол Δ-ро бе x навишта наметавонем.

Агар ба аргументҳои x ва x_1 қиматҳои мувофиқи функсия - $f(x)$ ва $f(x_1)$ рост оянд, онгоҳ қимати функсияи дода шуда ба бузургии

$$f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

тағйир меёбад.

Таъриф. Фарқи байни қимати нави функсия $f(x+\Delta x)$ ва қимати аввалаи он $f(x)$-ро **афзоиши функсия** дар нуқтаи x меноманд ва бо $\Delta f(x)$ («делта эф аз икс» мехонем) ё ин ки Δy ишорат мекунанд (расми 24):

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Аз ин ҷо:

$$f(x_1) = f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x) \qquad (2)$$

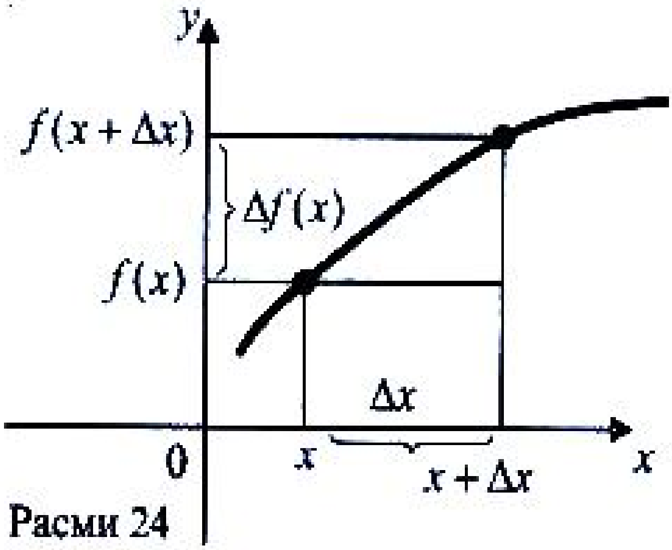
Мисолҳо:

1. Функсияи $y = x^2$ дода шудааст.

Афзоиши Δx ва Δy-ро ёбед, агар:

а) $x = 2$ ва $x_1 = 2{,}5$;

б) $x = 2{,}1$ ва $x_1 = 1{,}9$ бошад.



Расми 24

Ҳал.

а) $\Delta x = x_1 - x = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$;

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = 2{,}5^2 - 2^2 = 2{,}25.$$

б) $\Delta x = x_1 - x = 1{,}9 - 2{,}1 = 0{,}2$;

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 1{,}9^2 - 2{,}1^2 = -0{,}39.$$

Ба ҳамин тариқ, агар $x_1 > x$ бошад, афзоиши $\Delta x = x_1 - x$ адади мусбат ва агар $x_1 < x$ бошад, афзоиш адади манфӣ аст. Вобаста ба ин, фаҳмост, ки афзоиши функсия низ бузургии мусбат ва манфӣ шуда метавонад.

2. Квадрати тарафаш a дода шудааст. Ҳангоми ченкунии дарозии тарафи квадрат саҳв ба Δx баробар шуд. Саҳви масоҳати он ба чӣ баробар аст?

Ҳ а л. Азбаски саҳви ченкунии дарозии тарафи квадрат ба Δx баробар аст, пас аз рӯи таърифи афзуншавӣ $x = a + \Delta x$ мешавад. Маълум аст, ки $|x - a| = \Delta x$ саҳви мутлақро ифода мекунад. Пас, $|\Delta s| = |s(x) - s(a)| = \left|(a + \Delta x)^2 - a^2\right| = \left|2a\Delta x + (\Delta x)^2\right|$.

Аз ин ҷо бармеояд, ки саҳеҳии ҳисоббарории масоҳати квадрат аз дуруст ченкунии он вобаста аст: ҳар қадаре ки тарафи квадрат саҳеҳ чен карда шавад (яъне Δx хурд бошад), ҳамон қадар қимати саҳеҳи масоҳати квадрат x^2 аз a^2 фарқ мекунад.

3. Ҳаракати мунтазам ва суръати онро дида мебароем. Шумо аз курси физикаи синфи 9 – қисми кинематика ба намудҳои ҳаракат ва қонунҳои он шинос ҳастед. Фаҳмидед, ки барои муайян кардани суръати мошинҳо **спидометр** (инглисӣ – суръатсанҷ) хизмат мекунад.

Фарз мекунем, ки нуқтаи материалӣ аз рӯи хати рост ҳаракат мекунад. Фосилаи вақти $[t; t_1]$-ро дида мебароем. Ягон лаҳзаи вақт t-ро қайд мекунем. Нуқта дар муддати t аз ибтидои ҳаракат роҳи $s(t)$-ро тай мекунад. Масофае, ки нуқта дар фосилаи аз t то $t_1 = t + \Delta t$ мегузарад, баробари

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

мебошад.

Суръати миёнаи ҳаракати нуқта дар фосилаи $[t; t_1]$ ба нисбати роҳи тайкардашуда бар давомнокии вақт баробар аст:

$$v_{\text{миёна}} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} \qquad (3)$$

Айнан ҳамин тавр, **суръати миёнаи тағйирёбии функсияро** дохил мекунем. Бигузор функсияи $y = f(x)$ дода шуда бошад; x ва y бузургиҳои метематикӣ буда, ягон маънои физикӣ надоранд.

Онгоҳ, муносибати

$$v_{миёна} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (4)$$

суръати миёнаи тағйирёбии функсия аз рӯи x ном дорад.

М и с о л. Қонуни ҳаракат бо формулаи $s(t) = 5t^2$ $м$ дода шудааст. Лаҳзаи $t = 1с$ -ро қайд намуда, тағйирёбии масофаро дар фосилаи $t = 1с$ то $t_1 = 1{,}2с$ ҳисоб кунед.

Ҳ а л. $s(1) = 5 \cdot 1^2 = 5\,м$; $\quad s(1{,}2) = 7{,}2\,м$;

$$s(1{,}2) - s(1) = 7{,}2 - 5 = 2{,}2\ м;$$

$$\Delta t = t_1 - t = 1{,}2 - 1 = 0{,}2с.$$

$$v_{миёна} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2{,}2}{0{,}2} = 11\ м/с.$$

?

1. Ба калимаҳои манбаъвӣ ва рамзҳое, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: афзоиши аргумент (Δx), афзоиши функсия (Δy), суръати миёна.
2. Афзоиши аргумент чист?
3. Афзоиши функсия чист?

Машқҳо

Афзоиши функсияро дар намуди умумӣ ёбед ($1^\circ - 3^*$):

1°. а) $y = x - 1$; б) $y = x^2 + x$; в) $y = x^3$.

2. а) $y = x^2 + 3x + 4$; б) $y = x \sin x$; в) $y = \frac{x}{x^2+1}$.

3^*. а) $y = x^3 - 3x - 4$; б) $y = \frac{x^2+1}{x-1}$; в) $y = x\cos 2x$.

4°. Функсияи $y = 2x + 5$ дода шудааст, x_1 ва Δy -ро ёбед, агар:

а) $x = 3$ ва $\Delta x = 0{,}2$; б) $x = 4$ ва $\Delta x = 0{,}06$;

в) $x = 7$ ва $\Delta x = 0{,}01$ бошанд.

5. Функсияи $y = x^2$ дода шудааст: Δy ва Δx -ро ёбед, агар:

а) $x_1 = 2{,}5$ ва $x = 2$; б) $x_1 = 3{,}9$ ва $x = 3{,}75$;

в) $x_1 = -1{,}2$ ва $x = -1$ бошад.

6. Функсияҳои зерин дода шудаанд:

а) $y = -\dfrac{3}{x}$; б) $y = \dfrac{1}{2x}$; в) $y = \dfrac{1}{x} - x$.

Δy -ро ёбед, агар $x = 2$ ва $\Delta x = 0{,}8$ бошад.

Нисбати $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ -ро дар намуди умумӣ ёбед ($7^{\circ} - 9^{*}$):

7°. а) $y = 0{,}5x + 1$; б) $y = 2x^2$; в) $y = 5$.

8. а) $y = x^2 - 2x$; б) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; в) $y = x^3 + 3x$.

9*. а) $y = \sin x$; б) $y = -\dfrac{7}{x}$; в) $y = \cos x$.

Афзоиши функсия ва нисбати $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ -и функсияҳои зеринро ёбед ($10^{\circ} - 12^{*}$):

10°. а) $y = \dfrac{1}{x}$, агар $x = 2$ ва $\Delta x = -0{,}4$ бошад;

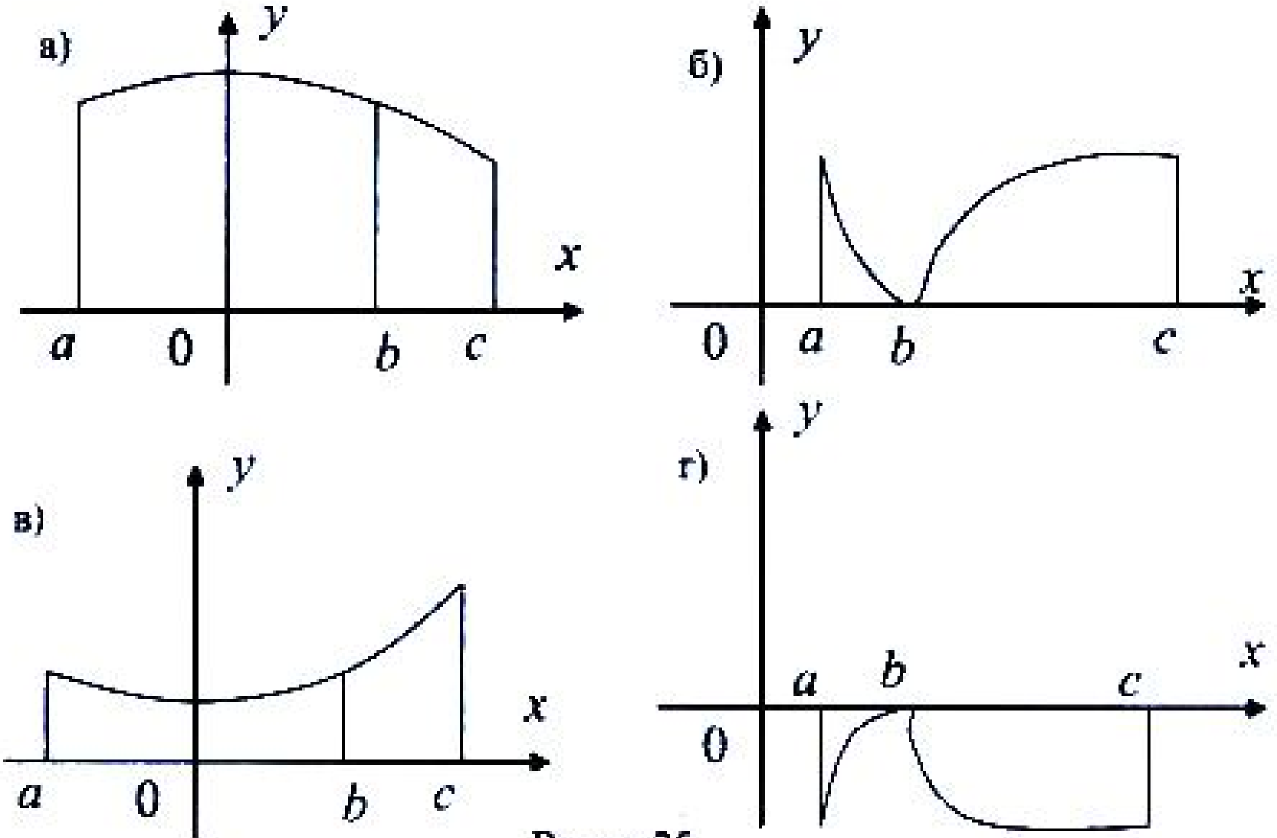
б) $y = x^2 + 1$, агар $x = 1$ ва $\Delta x = 0{,}2$ бошад.

11. а) $y = \sqrt{x}$, агар $x = 1{,}44$ ва $\Delta x = 0{,}25$ бошад;

б) $y = \dfrac{1}{x+2}$, агар $x = 2$ ва $\Delta x = 0{,}1$ бошад.

12*. а) $y = \cos x$, агар $x = \dfrac{\pi}{3}$ ва $\Delta x = \dfrac{\pi}{15}$ бошад.

13. Дар расми 25 графики функсияҳо тасвир ёфтаанд. Муайян кунед, ки **суръати миёнаи тағйирёбии** ин функсияҳо дар кадом парча-парчаи $[a;b]$ ё ин ки $[b;c]$ калон аст.



Расми 25

§2. Суръати лаҳзагии ҳаракат

Суръати миёнаи ҳаракат – ҳаракати ғайримунтазамро пурра тавсиф дода наметавонад. Аз формулаи (3) бармеояд, ки агар ҳар чӣ қадар аз t_1 ба t наздик шавем, яъне фосилаи вақт $\Delta t = t_1 - t$-ро хурд кардан гирем, ҳамон қадар суръати миёна ҳаракатро саҳеҳ ифода карда метавонад. Дар ин маврид фарқ байни қимати суръати миёна ва қимати суръати лаҳзагӣ (онро **суръати нуқта дар лаҳзаи** t ҳам мегӯянд) кам шудан мегирад. Онгоҳ муносибати (3) ба ягон адад наздик мешавад. Ин ададро қимати суръати лаҳзагӣ дар нуқтаи t номида бо $v(t)$ ишорат мекунанд.

Бинобар ин, қабул кардаанд:

Таъриф. Суръати лаҳзагӣ v дар нуқтаи t ҳудудест, ки ҳангоми майл кардани t_1 ба t он ба суръати миёнаи нуқта $v_{миёна}$ майл мекунад.

Нютон нахустин бор онро бо лотинӣ (limit - лимит) ишора карда, ҳадди охирин номидааст.

Ин таъриф на танҳо моҳияти суръати лаҳзавиро ошкор месозад, инчунин қоидаеро муайян мекунад, ки барои ҳисоб кардани он мусоидат менамояд, яъне:

$$v(t)=\lim_{t_1\to t}\frac{s(t_1)-s(t)}{t_1-t}=\lim_{t_1\to t}v_{миёна} \qquad (5)$$

Тартибе, ки бо ин восита аз суръати миёна дар фосилаи $[t;t_1]$ ба суръати нуқта дар лазаи t гузашта шуд, номи **гузариши ҳудудиро** гирифтааст.

Мутобиқи ин қоида формулаи (4)-ро ин тавр навишта метавонем.

$$v=\lim_{x_1\to x}v_{миёна}=\lim_{x_1\to x}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (6)$$

Ва онро **суръати тағйирёбии функсияи** y дар қимати дода шудаи x меноманд.

Мисолҳо.

1. Аз физика маълум аст, ки қонуни ҳаракати мунтазам тезшаванда бе суръати ибтидоӣ намуди зайлро дорад:

$$s(t)=\frac{at^2}{2},\quad a-шитоб \qquad (7)$$

Суръати лаҳзагиро меёбем.

Исаак Ниютон (1642 – 1727)

Физик, муҳандис ва математики бузурги англис. Ҳарчанд дар хурдӣ аз тарбияи падару модар маҳрум гашта бошад ҳам, вале меҳнатдӯстӣ, меҳру муҳаббати беандоза ба илм сабабгори кашфиётҳои беназири ӯ дар соҳаи физика (қонунҳои механика, қонуни ҷозибаи олам) ва математика (биноми Ниютон, методи тақрибии ҳалли муодилаҳо, методи фарқиятҳо ва г.) гардидаанд. Истилоҳи «таҳлил»-ро дар илм ӯ ворид намудааст. Панҷ забон (лотинӣ, юнонӣ, яҳудӣ, олмонӣ ва фаронсавӣ)-ро хуб медонист. Забондонӣ ба ӯ имконият медод, ки ба эҷодиёти донишмандони бузург шинос шавад. Ниютон яке аз асосгузорони ҳисоббароиҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ мебошад.

Ҳал. Бо ду тарз ҳисоб мекунем.
Ин ҳаракати ғайримунтазам аст, зеро қонуни он ба воситаи функсияи дарачаи ду нисбат ба t ифода ёфтааст.

Ба воситаи суръати миёна. Фосилаи ихтиёрии вақт $[t;t_1]$-ро қайд карда, суръати миёнаро дар ин порча ҳисоб мекунем:

$$v_{миёна}=\frac{s(t_1)-s(t)}{t_1-t}=\frac{\frac{at_1^2}{2}-\frac{at^2}{2}}{t_1-t}=\frac{a}{2}\cdot\frac{t_1^2-t^2}{t_1-t}=\frac{a}{2}(t_1+t)$$

Акнун порчаи $[t;t_1]$-ро ба нуқтаи t наздик мекунем, яъне қимати t_1-ро ҳар чӣ қадар ба t наздик гирем, онгоҳ суммаи t_1+t ба $t_1+t=2t$ ва ифодаи $\frac{a}{2}(t_1+t)$ ба $\frac{a}{2}2t=at$ наздик мешавад. Ин адад суръати лаҳзагӣ дар нуқтаи t ҳисоб мешавад.

Мо формулаи маълуми курси физика – суръати мунтазам тезшаванда (бе суръати ибтидоӣ) –ро ҳосил намудем: $V=at$. Ҳисоббароиро ба воситаи формулаи (5) ичро мекунем. Афзоиши аргумент баробари $t_1=t+\Delta t$ аст. Акнун Δt-ро ҳар чӣ қадар хурд кардан мегирем, то ки ба сифр наздик шавад. Дар ин маврид мегӯянд, ки Δt ба сифр майл мекунад ва ин тавр менависенд: $\Delta t\to 0$.

Муносибати (7)-ро ба формулаи (5) гузошта ҳосил мекунем:

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_1)-s(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{a(t+\Delta t)^2}{2}-\frac{at^2}{2}}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{a}{2}(t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2-t^2)}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a(2t\Delta t+(\Delta t)^2)}{2\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(at+\frac{a\Delta t}{2})$$

Азбаски $\Delta t \to 0$, онгоҳ $at + \frac{a\Delta t}{2} \to at$, бинобар ин:

$$v(t) = at$$

Ҳамин тавр, аз рӯи функсияи додашудаи $s(t)$ функсияи $v(t)$-ро **ҳосил кардем.** Аз ин рӯ, **суръати лаҳзагӣ ҳосила** ном гирифтааст (унвонаш ҳам аз ҳамин ҷо ба вуҷуд омадааст).

Қайд мекунем, ки ҳосила нисбат ба ягон функсияи ибтидоӣ дида баромада мешавад.

2. Лифт (англисӣ – мошини болобардор) баъди ба ҳаракат даромадан аз рӯи қонуни $s(t) = 1{,}5t^2 + 2$ ҳаракат мекунад; дар ин ҷо t-вақт бо сонияҳо, s-роҳи тай гардида бо метрҳо. Суръати ҳаракатро аз лаҳзаи ибтидои ҳаракат ба инобат гирифта, дар охири сонияи чорум ёбед.

Ҳ а л. Мувофиқи таърифи афзоиш тағйирёбии ҳаракатро дар фосилаи $t = 4$ ва $t_1 = 4 + \Delta t$ ҳисоб мекунем. Дар ин муддат лифт масофаи $s(4 + \Delta t) - s(4)$-ро тай мекунад. Суръати лаҳзагӣ бошад:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(4+\Delta t) - s(4)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(1{,}5(4+\Delta t)^2 + 2) - (1{,}5 \cdot 4^2 + 2)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1{,}5 \cdot 16 + 1{,}5 \cdot 8\Delta t + 1{,}5(\Delta t)^2 + 2 - 1{,}5 \cdot 16 - 2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (12 + 1{,}5\Delta t)$$

мешавад.

Азбаски $\Delta t \to 0$, он гоҳ $12 + 1{,}5\Delta t \to 12$, яъне $v(t) = 12 \, ^{м}/_{с}$.

Муайян кардани суръати ҳаргуна тағйирёбанда масъалаи асосиест, ки он ба мафҳуми ҳосила оварда мерасонад. Ва тарзе, ки бо ёрии он мафҳуми суръат муайян карда шуд, имконият медиҳад, ки дар соҳаҳои гуногун истифода бурда шавад.

?

1. Ба калимаҳои асосие, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: суръати лаҳзагӣ, суръати миёна.
2. Суръати лаҳзагӣ чист?
3. Суръати лаҳзагиро бо ёрии суръати миёна чӣ тавр алоқаманд менамоянд?

Машқҳо

Суръати миёнаи ҳаракати нуқтаро, ки аз рӯи қонуни $s = s(t)$ ба амал меояд, дар фосилаҳои вақти дода шуда муайян кунед ($14^\circ - 16^*$):

14°. $s(t) = 4t + 2$, $[1;3]$, $[0{,}2;\ 0{,}3]$, $[2;6]$, $[t_1;\ t_2]$.

15. $s(t) = 3t^2 - 6$, $[3;3{,}5]$, $[0;5]$, $[1;7]$, $[t_1;\ t_2]$.

16*. $s(t) = 3t^2 - 2t + 5$, $[0;4]$, $[1;7]$, $[2;9]$, $[t_1;\ t_2]$.

17. Маънои физикии нисбати $\frac{\Delta s}{\Delta t}$-ро шарҳ диҳед.

18°. Нуқта аз рӯи қонуни $s = t + 2$ ростхата ҳаракат мекунад. Ёбед: 1) суръати миёнаи ҳаракат дар фосилаҳои вақти $[1;2]$, $[2;2{,}2]$, $[3;3{,}3]$;

2) суръати лаҳзагӣ ҳангоми $t = 2$ ва $t = 3$.

19. Нуқта аз рӯи қонуни $s = t^2 + 2$ ростхата ҳаракат мекунад. Ёбед: 1) суръати миёнаи ҳаракат дар фосилаҳои вақти $[1;2]$, $[1{,}2;2]$, $[2;2{,}2]$;

2) суръати лаҳзагӣ ҳангоми $t = 1$ ва $t = 2$.

20. Нуқта аз рӯи қонуни $s = 2t^2 - 3t + 1$ ростхата ҳаракат мекунад. Суръати лаҳзагии ҳаракатро ҳангоми $t = 1$, $t = 2$ ва $t = t$ ҳисоб кунед.

21. Ду нуқта (-яке аз онҳо аз рӯи қонуни $s = 10t^2$ ва дигаре бо қонуни $s = \frac{4}{3}t^3$) дар як вақт аз рӯи хати рост ба ҳаракат даромаданд. Кадоме аз онҳо дар лаҳзаи; а) $t = 5c$ ва б) $t = 10c$ суръати зиёдтар дорад.

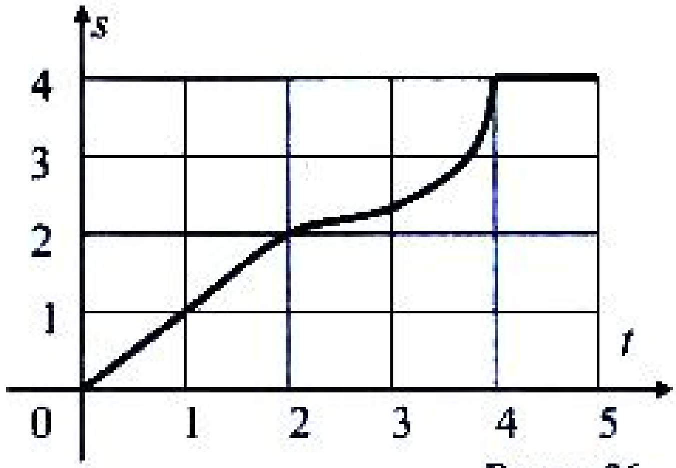
22. Дар расми 26 графики роҳи ҳаракати нуқта $s = s(t)$ вобаста аз вақт t тасвир ёфтааст. Муайян кунед, ки:

а) дар кадом фосилаи вақт нуқта мунтазам ҳаракат кардааст;

б) дар кадом фосилаи вақт дар чояш қарор дошт;

в) дар кадом фосилаи вақт ба суръати баландтарин ноил гашт;

г) суръати миёнаи ҳаракати нуқта дар фосилаҳои вақти [0;2], [2,5;4],[3;4] ва [4;5] чӣ қадар аст;
д) суръати лаҳзагӣ ҳангоми $t = 4$ ба чӣ баробар аст;
е) агар масштаб 1 воҳид = 20 м бошад, нуқта дар 5 сония чӣ қадар роҳ тай намудааст.



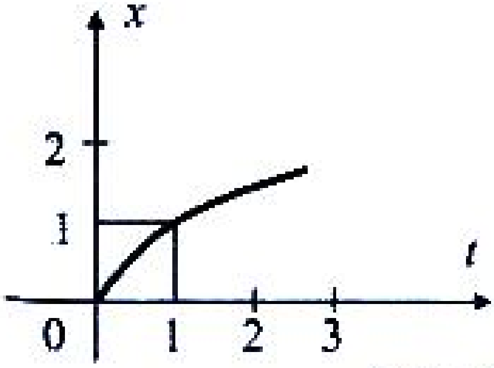
Расми 26

23. Ибтидои суръати маҳлулшавии намак дар об хеле калон аст, вале бо андозаи сершавии маҳлул суръати он кам шудан мегирад. Дар расми 27 графики вобастагии маҳлулшавии массаи намак $x = f(t)$ аз вақт оварда шудааст.

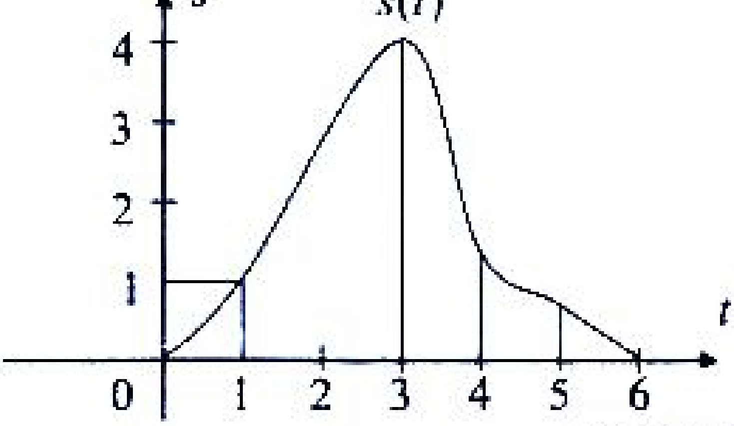
1) Дар кадом фосилаи вақт суръати миёнаи маҳлулшавии намак калон аст? Инро чӣ тавр шарҳ медиҳед?
2) Дар кадом фосилаҳо суръати миёнаи маҳлулшавӣ баробар аст?
3) Дар кадом фосилаҳо суръати лаҳзагии маҳлулшавӣ баробар аст?
4) Дар кадом нуқта суръати лаҳзагӣ калонтар аст? Суръати маҳлулшавӣ дар лаҳзаи t чӣ маъно дорад?

24. Дар расми 28 графики қонуни ҳаракати $s = s(t)$ вобаста аз вақт тасвир ёфтааст.

1) Дар кадом лаҳзаи вақт суръат калон аст?
2) Дар тамоми вақт суръат чӣ тавр тағйир меёбад?
3) Суръатро дар лаҳзаҳои $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, ва $t = 4$, ҳисоб кунед.
4) Графики суръатро созед.



Расми 27



Расми 28

§ 3. Расанда ба хати кач

Акнун мафҳуми ҳосиларо аз нуқтаи назари математикӣ дида мебароем. Бинобар ин, ба аломатҳои он ягон маънои физикӣ намедиҳем. Ба ин масъала нахустин бор корҳои Г.В. Лейбнитс равшанӣ андохтаанд. Аз онҳо мо ба суолҳои **расанда чист? Онро чӣ тавр бояд ҳисоб кард?** посух гирифта метавонем. Маълум гардид, ки ҳосила маънои геометрӣ доштааст. Ва мафҳуми расанда ба хати каҷро геометрӣ шарҳ додан мумкин аст.

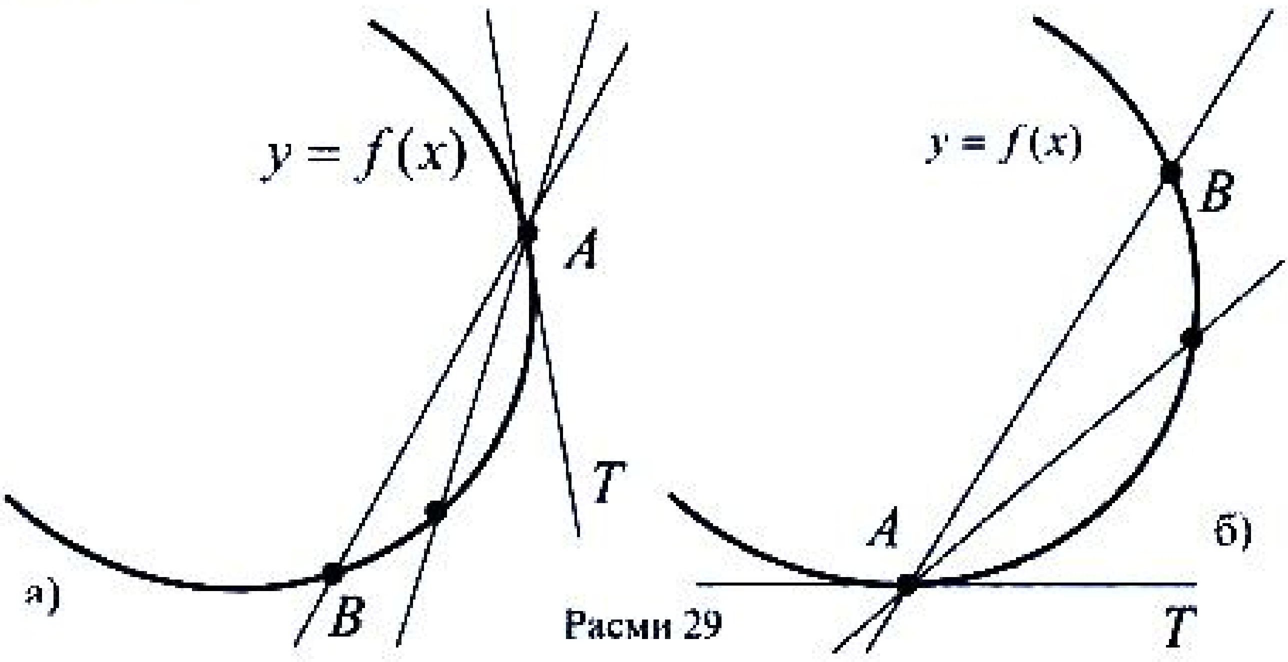
Фарз мекунем, ки хати каҷи $y = f(x)$ дода шудааст. Ду ҳолат ҷой дорад (расми 29 а, б). Дар хати каҷ нуқтаи A-ро қайд мекунем; ба он наздиктар нуқтаи B-ро мегирем ва бурандаи AB-ро мегузаронем. Вакте ки нуқтаи **B ба дарозии** хати каҷ ҷой ивaз мекунад, бурандаи AB дар атрофи нуқтаи A давр мезанад.

Таъриф. Расандаи T ба хати каҷи $y = f(x)$ дар нуқтаи A гуфта вазъияти ҳудудии AT-и бурандаи AB-ро меноманд, агар нуқтаи B аз рӯи хати каҷ ҷой иваз карда, вазъияти нуқтаи A-ро гирад.

Расанда – хати рост аст. Муодилаи хати рост намуди зеринро дорад:

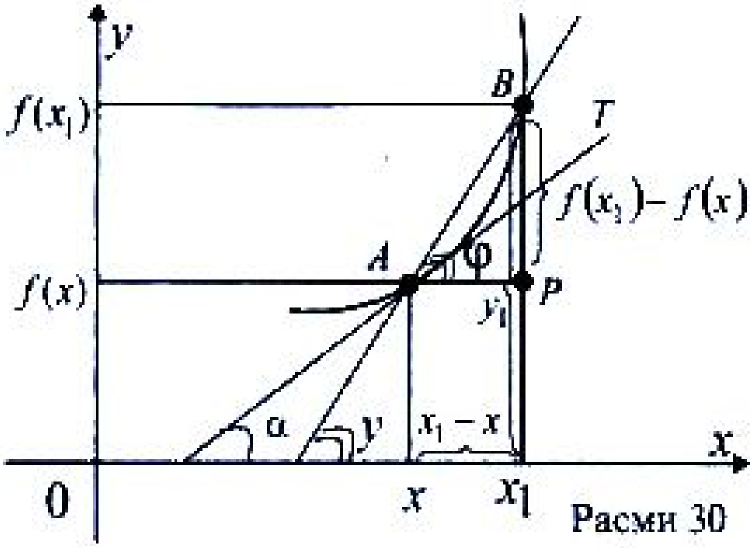
$$y = kx + b$$

дар ин ҷо k - коэффитсиенти кунҷи расанда ва он баробари $k = tg\alpha$ аст.



Расми 29

Пас, барои он ки расанда сохта шавад, коэффитсиенти кунҷии онро муайян кардан лозим аст.



Расми 30

Ба монанди суръати лаҳзагӣ – амали гузариши ҳудудиро истифода мебарем.

Бигузор $y = f(x)$ дода шуда бошад ва графики он ягон хати каҷро ифода кунад (расми 30).

Дар он нуқтаи $A(x;y)$-ро қайд мекунем. Бо як нуқта моилии хати каҷро дар ин нуқта ҳисоб кардан мумкин нест. Аз ин рӯ, наздик ба он нуқтаи $B(x_1;y_1)$-ро мегирем. Хати рости AB бурандаи графики $y = f(x)$ аст. Агар ҳар чӣ қадар аз нуқтаи B ва A аз рӯи хати каҷ наздиктар омадан гирем, буранда ба ҳолате наздик мешавад, ки он аз мавқеи расандаи нуқтаи A, яъне AT кам фарқ мекунад. Кунҷи байни тири абсисса ва бурандаи AB-ро бо φ, кунҷи байни тири OX ва расандаи AT-ро бо α ишорат мекунем.

Аз расм бевосита барои k ифодаи муайянеро маълум кардан мумкин нест. Бинобар ин, аввал коэффитсиенти кунҷии бурандаи AB-ро меёбем: онро бо k_1 ишорат мекунем.

Готфрид Вилгелм Лейбнитс (1646-1716)

Математик, файласуф ва мантиқшиноси бузурги олмонӣ. Ӯ дар инкишофи илмҳои табиатшиносӣ ва техникӣ саҳми бузург гузоштааст. Президенти нахустини Академияи илмҳои Берлин буд. Муаллифи зиёда аз 7500 асару мақолаҳо буда, асосгузори ҳисоббарориҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ мебошад. Истилоҳҳо ва рамзҳои ворид намудаи ӯ дар ин соҳа то ҳанӯз истифода бурда мешаванд.

Аз секунчаи ABP айён аст, ки:

$$k_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = tg\varphi$$

Барои ёфтани k лозим аст, ки $x_1 \to x$; дар он сурат буранда AB дар атрофи нуқтаи A давр зада, ба ҳолати ҳудудии AT (агар ин ҳудуд ҷой дошта бошад) наздик мешавад ва кунҷи φ бошад ба ҳадди охирини худ - кунҷи α наздик мешавад.

Пас, коэффитсиенти кунҷии расандаро ҳамчун ҳудуди ифодаи $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$, ҳангоми $x_1 \to x$ (яъне $\Delta x = x_1 - x \to 0$) ёфта метавонем:

$$k(x) = \lim_{x_1 \to x} k_1 = \lim_{\alpha_1 \to \alpha} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{\varphi \to \alpha} tg\varphi = tg\alpha \qquad (1)$$

Баробарии (1) **суръати тағйирёбии функсияи** $y = f(x)$-ро ташреҳ медиҳад.

Ба монанди суръати лаҳзагӣ, ин гузариши ҳудудӣ номи дифференсирони (аз лотинӣ differentia – фарқ)-и функсияи $y = f(x)$-ро гирифтааст. Ин номи амал ба он алоқаманд аст, ки ҳангоми $x_1 \to x$ лимити нисбати **фарқи** $f(x_1) - f(x)$ бар $x_1 - x$ муайян карда мешавад.

Дифференсиронӣ ё ин ки ёфтани ҳосила – **амали нави математикӣ** буда, бо муайян кардани суръат дар механика ва ёфтани коэффитсиенти кунҷии расанда дар ягон нуқтаи хати каҷ бо самти мусбат (манфи)-и тири абсисса дар геометрия ҳамон як маъноро дорад.

?

1. Ба калимаҳои манбаъвие, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: буранда, расанда, коэффитсиенти кунҷӣ, дифференсиронӣ.
2. Расанда чист?
3. Коэффитсиенти кунҷии расанда ба графики функсияро чӣ тавр меёбанд?
4. Амалии дифференсирониро маънидод кунед.

Машқҳо

Маънои геометрии ҳосила

Коэффитсиенти кунҷии бурандаи параболаи $y = x^2$ -ро ёбед, агар буранда аз болои нуқтаҳои зерин гузарад (25°–27^*):

25°. а) (1; 1) ва (1,2; 1,44); б) (- 1,2; 1,44) ва (- 1; 1);

26. а) абссиссаҳояшон $x_1 = 1$ ва $x_2 = 1{,}3$; б) $x_3 = -4$ ва $x_4 = 1{,}3$ бошад.

27*. $A(x; y)$ ва $B(x_1; y_1)$.

Дар параболаи $y = x^2$ нуқтаҳои абсиссаашон – 1 ва 2 гирифта шудаанд. Ёбед (28° – 29):

28°. а) коэффитсиенти кунҷи бурандаро, ки аз болои ин нуқтаҳо мегузарад; б) муодилаи бурандаро нависед; в) муодилаи хати росте, ки ба парабола дар нуқтаҳои дода шуда расанда мебошанд, маълум кунед; г) коэффитсиенти кунҷии расанда ба чӣ баробар аст?

29. Шартҳои болоро барои параболаи кубии $y = x^3$ бо нуқтаҳои абсиссаашон $x_1 = 1$ ва $x_1 = -2$ иҷро намоед.

§ 4. Таърифи ҳосила ва ҳисоб намудани он

Аз мисолҳои дар боло муоина гардида таърифҳои зерини ҳосила ба амал меоянд:

> 1. Ҳосилаи функсияи $y = f(x)$ гуфта суръати тағйирёбии онро меноманд.
>
> (!) 2. Ҳудуди нисбати афзоиши функсия ба афзоиши аргумент, ҳангоми афзоиши аргумент ба сифр майл кардан, ҳосилаи функсия ном дорад.

Менависанд: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ ё ки $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x)$, агар $\Delta x \to 0$.

Ҳосилаи функсияи $y = f(x)$ бо ёрии **алгоритми** зерин ҳисоб карда мешавад:

Қадами 1. Дар фосилаи $[x;x+\Delta x]$ ба аргументи функсия афзоиш медиҳем: $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$.

Қадами 2. Аз қимати афзуншудаи функсия қимати аввалаи функсияро тарҳ мекунем:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

Қадами 3. Нисбати афзоиши функсия ба афзоиши аргументро муайян мекунем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Қадами 4. Ҳангоми $\Delta x\to 0$, ҳудуди ин нисбатро меёбем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

Ин қадамро бо тирча ҳам навишта метавонем:

агар $\Delta x\to 0$, онгоҳ $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to y'$

Мисол. Функсияи $y=x^2$ дода шудааст. Ёбед:

а) Коэффитсиенти кунҷии расанда ба хати каҷ дар нуқтаи $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

б) Муодилаи расанда ба графики функсия дар ин нуқта.

Ҳал. а) Дар фосилаи $\left[\frac{1}{2};\frac{1}{2}+\Delta x\right]$ афзоиши функсияро ҳисоб мекунем: $$\Delta y=\left(\frac{1}{2}+\Delta x\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\Delta x+(\Delta x)^2$$

Нисбат тартиб медиҳем: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=1+\Delta x$

Ин нисбат коэффитсиенти кунҷии бурандаро, ки аз нуқтаҳои $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ ва $(x;y)$ мегузарад, ифода мекунад.

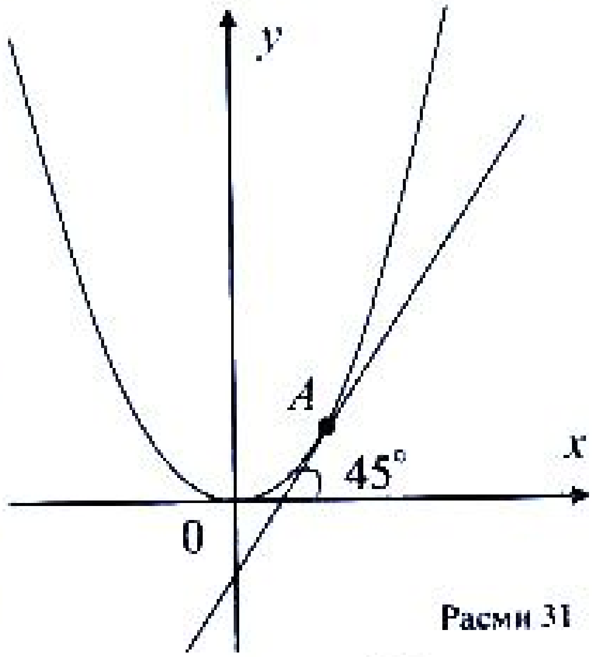
Акнун Δx -ро ба сифр майл кунонида коэффитсиенти кунҷи расанда k -ро ба графики $y = x^2$ дар нуқтаи $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ меёбем (расми 31):

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x) = 1,$$

зеро $1 + \Delta x \to 1$

Пас, $k = tg\alpha = 1$; $\alpha = 45^\circ$.

б) Муодилаи расандаро ба графики функсияи $y = x^2$ дар нуқтаи $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ муайян мекунем.



Расми 31

Коэффитсиенти кунҷии расанда $k = 1$ аст. Муодилаи расанда хати рост буда, намуди зеринро мегирад:

$$y = kx + b = x + b$$

Азбаски муодилаи расанда аз нуқтаи $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ мегузарад, қиматҳои координатаҳои нуқтаро ба ҷои x ва y гузошта, параметри b -ро меёбем:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + b, \quad b = -\frac{1}{4}.$$

Пас, $y = x - \frac{1}{4}$ муодилаи расанда ба графики функсия мебошад.

Ҳамин тавр амал карда муодилаи расандаро ба графики функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи $(x_0; f(x_0))$ меёбем.

Муодилаи хати рост $y = kx + b$ аст. Агар параметрҳои k ва b-ро ёфта ба ҷояшон гузорем, муодилаи расанда пайдо мешавад.

Маълум аст, ки: $k = tg\alpha = f'(x_0)$. Онгоҳ: $y = f'(x_0)x + b$.

Расанда аз нуқтаи $(x_0; f(x_0))$ мегузарад, бинобар ин координатаҳои ин нуқта муодилаи

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$$

-ро қаноат мекунад.

Аз ин ҷо: $$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

Қиматҳои k ва b-ро ба муодилаи хати рост гузошта, муодилаи расанда ба хати каҷро ҳосил мекунем:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

?

1. Ба калимаҳои манбаъвӣ ва рамзҳое, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: ҳосила, расанда, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, y'.
2. Алгоритми ёфтани ҳосилаи функсияро баён кунед.
3. Ҳосилаи функсия чист?
4. Муодилаи расанда ба нуқтаи (x_0, y_0)-ро нависед.

Машқҳо

Аз рӯи алгоритми асосӣ ҳосилаҳои функсияҳои зеринро ҳисоб кунед ($30^\circ - 32^*$):

30°. а) $f(x) = 2x - 5$; б) $t = -x^2$;

в) $y = x^2 + 2x$; г) $y = \frac{1}{3x+2}$.

31. а) $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$; б) $y = 3 + x^3$;

в) $y = \frac{x}{x-2}$; г) $y = (x-5)(x+7)$.

32^*. а) $y = 2x^3 - 3x$; б) $y = \sqrt{2x+1}$;

в) $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$; г) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; д) $y = x^n$

Аз таърифи ҳосила истифода бурда, ҳосилаи функсияҳои зеринро ёбед ($33^{\circ}-35^{*}$):

33°. а) $y=2x-1$; б) $y=\frac{1}{2}x-3$;

в) $y=-5x+4$; г) $y=3x-2$.

34. а) $y=3x^2$; б) $y=4x^2+x$;

в) $y=\frac{1}{2}x^2-5$; г) $y=3x^2+2x+3$;

35*. а) $y=\frac{5}{x}$; б) $y=\frac{2}{3x}$;

в) $y=\frac{1}{x^2}$; г) $y=\sqrt{x}$.

36. Ҳосилаи функсияҳои машқи 34-ро дар нуқтаҳои

а) $x_0=1$; б) $x_0=2$ ҳисоб кунед.

37. Аз таърифи ҳосила истифода бурда, ҳосилаи функсияҳои зеринро дар нуқтаи $x=0$ ёбед:

а) $f(x)=ax^2+bx+c$; б) $f(x)=2x^2-3x$;

в) $f(x)=(x-2)(x-3)$; г) $f(x)=\sqrt{2x+1}$;

д) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$; е) $f(x)=\sqrt{(x+2)^3}$.

38*. Муодилаи расанда ба функсияҳои зеринро, ки абсиссаашон x_0 аст, тартиб диҳед:

а) $y=x^2$, $x_0=1$; б) $y=x^2-2x$, $x_0=2$;

в) $y=x^2+3$, $x_0=\frac{1}{2}$; г) $y=2-x^2$, $x_0=1$.

§ 5. Гузаришҳои ҳудудӣ ва бефосилагии функсия

Боз як бори дигар ҳудуде, ки ҳосиларо ифода мекунад, менависем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Агар ба сурат ва махраҷи ин ҳудуд назар афканем, мебинем, ки ҳар дуи он аз Δx вобастагӣ дорад; Δx бошад ба сифр майл мекунад. Аз ин рӯ, **зарур аст,** ки он **бояд вуҷуд дошта бошад.** Ин чунин маъно дорад, ки дар баробари махраҷ $\Delta x \to 0$, сурат ҳам бояд ба сифр майл кунад, яъне $\Delta y \to 0$.

Дар кадом ҳолат ин шарт ҷой дошта метавонад?

Пай бурдан душвор нест, ки шарти зарурии иҷроиши ин тасдиқ ба мафҳуми бефосилагии функсияи $f(x)$ дар нуқтаи дидабаромадашавандаи x ва ҳудуди ин функсия дар ҳамин нуқта зич алоқаманд аст.

Дар м и с о л ҳ о моҳияти ин тасдиқро шарҳ медиҳем.

Маълум, ки тағйирёбандаи y функсияи тағйирёбандаи x аст. Дар ин маврид суоли зерин ба миён меояд: агар аргумент x ба ягон адади a наздик шавад, онгоҳ y худро чӣ тавр зоҳир мекунад?

1. Функсияи $y=\dfrac{5x+2}{2x+3}$ -ро дида мебароем. Фарз мекунем, ки дар наздикии қимати $x=2$ функсияро тадқиқ кардан лозим аст. Адади 2 ба соҳаи муайянии функсияи додашуда ворид аст. Айён аст, ки қимати x-ро бевосита ба формула гузошта метавонем, зеро:

қимати сурати каср $5\cdot 2+2=12$,

қимати махраҷи каср $2\cdot 2+3=7$

мебошанд.

Пас, барои гузариши ҳудудии ин функсия ҳангоми $x \to 2$ лозим аст, ки қимати функсияро дар ҳамин нуқта ҳисоб кунем:

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$$

Барои қимати дилхоҳи $x=a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{5x+2}{2x+3} = \frac{5a+2}{2a+3}$$

мешавад.

Аз тарафи дигар, агар ба ҷои x дар функсияи дода шуда адади a-ро гузорем, боз ҳамон натиҷаро ҳосил мекунем:

$$f(a) = \frac{5a+2}{2a+3}$$

Аксарияти функсияҳо худро ҳамин тавр зоҳир мекунанд. Аз ин ҷо, таърифи зерини бефосилагии функция дар нуқта ба амал меояд.

Бигузор $x = a$ ба соҳаи муайянии функсияи $y = f(x)$ дохил бошад.

***Таъриф.* Агар ҳудуди функсияи $y = f(x)$ ҳангоми аргументи x ба a майл кардан ба қимати функсия дар нуқтаи a баробар бошад, онгоҳ функсияро дар ин нуқта бефосила меноманд ва чунин менависем:**

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \ldots \tag{1}$$

Мо онро ба сифати принсип (лотини – ғоя)-и **бефосилагӣ** қабул мекунем, ки дар боло ба забони афзоиш – агар $\Delta x \to 0$, бояд $\Delta y \to 0$ шарҳ дода будем.

Аз он талаботҳои зерин ба миён меояд:

1) функсияи $f(x)$ дар нуқтаи a бояд муайян бошад;

2) ҳудуди функсия $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ дар нуқтаи a мавҷуд бошад;

3) ин ҳудуд бояд ба қимати функсия дар нуқтаи a баробар бошад.

Агар аз ин се талабот ақалан яктояш иҷро нашавад, мегӯянд, ки функсия дар нуқтаи a каниш дорад.

Аз шарти $x \to a$ ва $f(x) \to f(a)$ маълум мешавад, ки ҳангоми $\Delta x = (x-a) \to 0$ намудан $\Delta f(x) = f(x) - f(a) \to 0$. Бинобар ин, баробарии (1) намуди зеринро мегирад:

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0 \ \ldots} \tag{2}$$

Дар ин ҳолат мегӯянд, ки:

ба афзоиши хурди аргумент ($\Delta x \to 0$), афзоиши хурди функсия ($\Delta f(x) \to 0$) мувофиқ меояд. Ё ҳангоми $\Delta x \to 0$, фарқи $\Delta f(x) = f(x) - f(a)$ беохир хурд аст.

Функсияи $y = f(x)$-ро дар фосилаи $[a;b]$ бефосила меноманд, агар он дар ҳар кадоми нуқтаи ин фосила бефосила бошад.

Мисол, функсияи $f(x) = kx + m$ дар $R = (-\infty;\infty)$ бефосила аст, чунки:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \to 0}[(kx+m)-(ka+m)] = \lim_{\Delta x \to 0} k(x-a) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} k\Delta x = k \cdot \lim_{\Delta x \to o} \Delta x = k \cdot o = 0.$$

2. Ба функсияи $y = \dfrac{x}{x}$ назар меандозем. Аз рӯи таърифи боло ҳангоми $x \to 0$ гузариши ҳудудиро ба амал овардан мумкин нест, зеро функсияи дода шуда дар нуқтаи $x = 0$ номуайян аст, яъне каниш дорад. Вале айён аст, ки барои ҳамаи қиматҳои $x \neq 0$ қимати функсия $y = 1$ мебошад. Аз ин рӯ, адади 1-ро ҳамчун қимати ҳудудии функсия (ҳангоми $x \to 0$) қабул карда метавонем. Ин қимат дар натиҷаи ихтисор кардани сурат ва махраҷи касри дода шуда ба x ҳосил мешавад.

Ба ҳамин тариқ, **агар функсия канишдор бошад онро ба воситаи табдилдиҳӣ,** аз он ҷумла ихтисоркунии сурат ва махраҷ, **ба ғояи бефосилагӣ мутобиқ кардан мумкин аст.**

3. Функсияи $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ ҳангоми $x \to 2$ каниш дорад ё ин ки номуайян аст. Гузариши ҳудудиро иҷро карда наметавонем. Вале ин мушкилиро то ба ҳудуд гузаштан рафъ кардан мумкин аст, агар сурат ва махраҷро ба зарбкунандаи $x - 2$ ихтисор кунем:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

Баъди ихтисоркунӣ ёфтани ҳудуд душвор нест. Ифодаи нав ҳосилшуда $x+2$ муайян аст, бинобар ин ба ҷои x адади 2-ро гузошта, қимати ҳудудиро меёбем:

$$\lim_{x\to 2} y = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$$

Баъзе қоидаҳои гузариши ҳудудиро бе исбот баён менамоем.

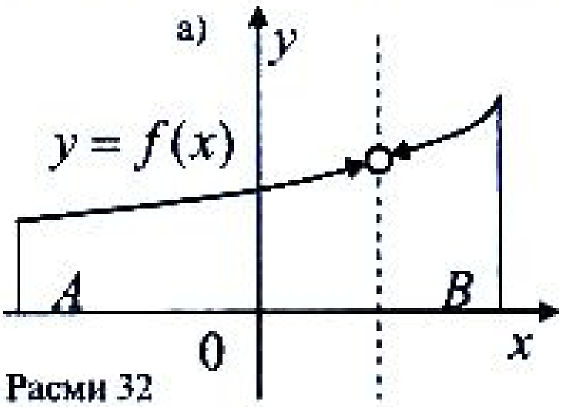
Қоидаи 1. Агар функсияи $f(x)$ дар нуқтаи a бефосила бошад, онгоҳ ҳангоми $\Delta x \to 0$, $\Delta f \to 0$.

Қоидаи 2. Агар функсияи $f(x)$ дар нуқтаи a бефосила бошад, онгоҳ ҳангоми $\Delta x \to 0$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x)$.

Қоидаи 3. Агар ҳангоми $x \to a$, $f(x) \to A$ ва $g(x) \to B$, онгоҳ а) $f(x)+g(x) \to A+B$;

б) $f(x)\cdot g(x) \to A\cdot B$;

в) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$ $\quad (B \neq 0)$.

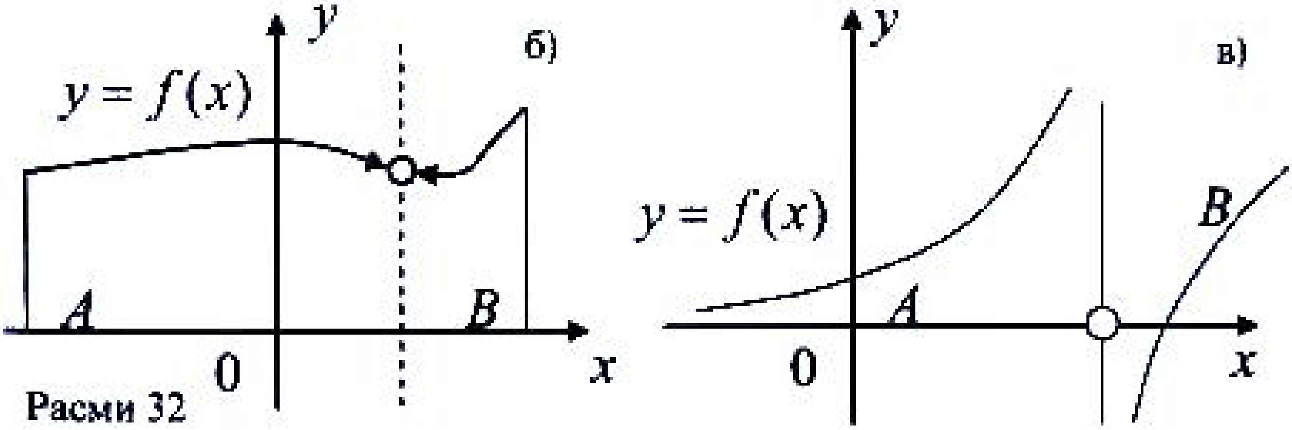


Расми 32

Барои функсияҳои бефосилаи $f(x)$ ва $g(x)$; $A = f(a)$, $B = g(a)$ аст.

Ин қоидаҳоро - қоидаҳои сумма, ҳосили зарб ва ҳосили тақсими функсияҳои бефосила дар нуқтаи a меноманд. Ба расми 32 нигаред.

Ҳамаи графикҳои дар расм тасвирёфтаи функсия нуқтаҳои каниш доранд. Дар ин нуқтаҳо *хатҳо канда* мешаванд. Нуқтаҳои каниш заминае мебошанд, ки дар асоси онҳо



Расми 32

мафҳуми бефосилагии функсӣ дар нуқта ворид шуда буд. Асоси мафҳуми бефосилагии функсияи $y = f(x)$ -ро дар тасаввуроти мо каниш надоштани графики он ташкил медиҳад. Инро шарҳ медиҳем.

Агар функсия дар нуқта каниш дошта бошад, ин чунин маъно дорад, ки бо тағйирёбии ками аргумент қимати функсия яку якбора зиёд мешавад. Ин ҳолатро мо дар функсияи $y = \frac{1}{x}$ мушоҳида карда метавонем (нақшаро кашед!). Агар аз нуқтаи $x = 0$ (он нуқтаи каниш аст) каме ба тарафи рост ҷой иваз кунем, масалан $x = 0{,}01$ ё $x = 0{,}001$ гирем, қимати функсия якбора аз $y = 100$ то $y = 1000$ тағйир меёбад.

Геометрӣ ин чӣ маъно дорад? Графики функсия нишон медиҳад, ки агар он аз нуқтаи дода шудаи x ҳар чӣ қадар кам (ба тарафи чап ва ё ба тарафи рост) ҷой иваз накунад, қимати функсия ҳам ҳамон қадар кам тағйир меёбад.

Бигузор функсияи f дар порчаи $[a;b]$ бефосила ва қиматҳои функсия дар аввалу охири ин порча мувофиқан ба $f(a) = c$ ва $f(b) = d$ бошанд. Азбаски функсияи f бефосила аст, ин чунин маъно дорад, ки ҳангоми тағйирёбии аргумент аз a то b функсия ягон қиматро напартофта ҳамаи қиматҳои мобайнӣ – аз $f(a)$ то $f(b)$-ро қабул мекунад.

Барои функсияи монотонӣ ба сифати т а ъ р и ф и б е ф о с и л а г ӣ хосияти зеринро онро қабул кардан мумкин аст.

Функсияи монотонӣ бефосила аст, агар вай ҳамаи қиматҳои мобайниро қабул кунад.

Дар ҳамин сурат графики функсияро бо қалам яклухт, дастро аз қоғаз наканда кашидан мумкин аст!

Ин мулоҳизаҳо барои фосилаҳое, ки нуқтаи каниш надоранд, ҷой дорад. Агар дар нуқтаи пайвастшавии ду фосила (онҳоро бо A ва B ишорат мекунем) – функсияи монотонӣ номуайян бошад, он гоҳ дар бораи бефосилагии функсия дар ин нуқта сухан рондан мумкин нест. Барои он ки чунин ҳолат ба амал наояд функсияро тавре муайян месозем (табдил медиҳем), ки дар ин нуқта бефосила бошад. Мисоли ба ин мувофиқ функсияи $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ҳисоб мешавад. Фаҳмост, ки функсия дар нуқтаи $x=2$ муайян нест (яъне каниш дорад), вале агар касрро ихтисор кунем $y=x+2$ ҳосил мешавад. Дар ин маврид каниш бартараф мегардад ва ҳангоми $x=2$ будан қимати ҳақиқии функсия $y=4$ хоҳад шуд.

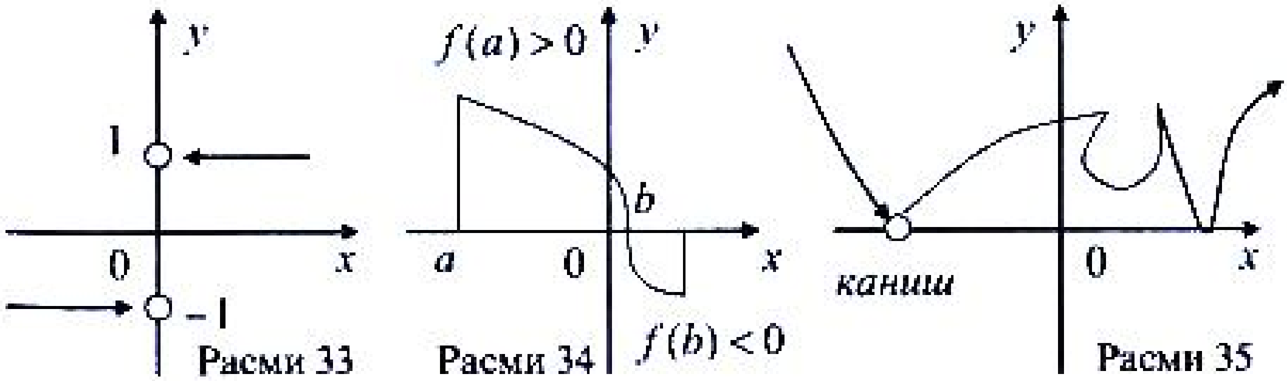
Хуллас, ҳамин тавр муайян кардани функсия онро дар ҳамаи нуқтаҳои тири ададӣ ба функсияи бефосила мубаддал намуд.

Дар баробари ин, функсияҳое вуҷуд доранд, ки онҳоро ҳеҷ дигаргун кардан мумкин нест, то ки дар нуқтаи дода шуда ба функсияи бефосила табдил ёбанд.

Функсияи $y=\dfrac{1}{x}$ дар нуқтаи $x=0$ номуайян аст. Онро бо ҳеҷ тарз аз нав дигар карда наметавонем, то ин ки каниш бартараф ва функсия дар ин нуқта бефосила шавад. Дар ин маврид мегӯянд, ки функсия «каниши беохир дорад» (ва ё ба беохирӣ майл мекунад).

Функсияи $y=\begin{cases}1, & \text{агар} \quad x>0,\\ -1, & \text{агар} \quad x<0.\end{cases}$ низ дар нуқтаи $x=0$ номуайян аст, вале он соҳиби «каниши охирнок» мебошад (расми 33). Маънои истилоҳҳои «каниши охирнок» ва «каниши беохир» аз мисолҳои овардашуда маълуманд. Аз ин рӯ, баёни таърифи аниқи онҳоро зарур намешуморем.

Агар функсияи f дар порчаи $[a;b]$ бефосила ва дар



Расми 33 Расми 34 Расми 35

охирҳои порчаи $[a;b]$ аломатҳои гуногунро қабул кунад он гоҳ вай ақалан дар ягон нуқта ба сифр баробар мешавад (расми 34).

Ин хосияти бефорсилагии функсия ҳангоми ҳалли муодилаҳо бо ёрии график истифода бурда мешавад.

Дар охир ҳаминро қайд мекунем, ки графики ҳамаи функсияҳо муоина гардида яклухт буданд. Вале ин шарт ҳатмӣ нест. Графики функсияҳои бефосила метавонад аз якчанд камонҳои яклухт тартиб ёфта, дорои нуқтаҳои каниш бошанд (расми 35).

?

1. Ба калимаҳои манбавие, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: ҳудуд, бефосилагӣ, каниш.
2. Таърифи функсияи бефосиларо баён кунед.
3. Талаботҳои шарти бефосилагиро номбар кунед.
4. Бефосилагии функсияро бо ёрии афзоиши аргумент ва афзоиши функсия шарҳ диҳед.
5. Аз нуқтаи назари геометрӣ бефосила будани функсия чӣ маъно дорад?
6. Бефосила будани функсияро дар фосила шарҳ диҳед.
7. Қоидаҳои гузариши ҳудудиро баён намоед.

Машқҳо

39. Исбот кунед, ки функсияҳои зерин дар соҳаи муайян бефосилаанд:

1) $y = x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = a$.

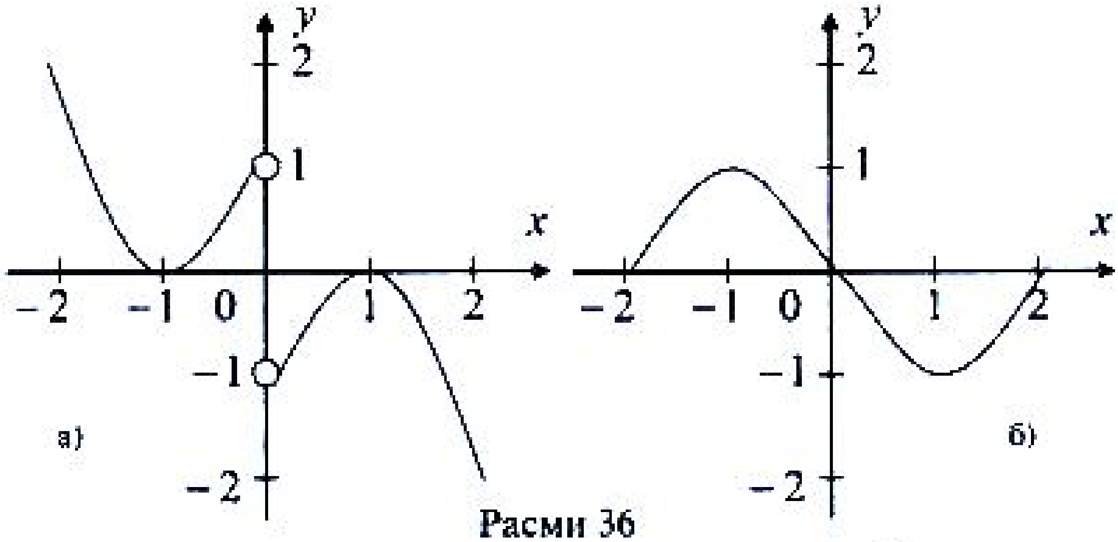
40. Оё функсияҳо дар соҳаи муайянии худ бефосилаанд?

а) $f(x) = \begin{cases} 2, & \textit{агар} \quad x \in [0;1], \\ 3, & \textit{агар} \quad x \in (1;2]. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 2, & \textit{агар} \quad x \in [0;1], \\ 3, & \textit{агар} \quad x \in (2;3]. \end{cases}$

41. Дар расми 36 графики функсияҳо тасвир ёфтаанд. Оё онҳо дар ҳар як нуқтаи порчаи $[-2;2]$ бефосила мебошанд?

42. Бефосилагии функсияҳои зеринро дар нуқтаҳои зерин нишон диҳед.



Расми 36

а) $f(x)=3x^2-4x+1, \quad x\to 1;$ б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-4}, & x\neq 2\\ \dfrac{1}{4}, & x=2\end{cases}$

43. Оё функсияи f дар ҳар як нуқтаи фосилаи додашуда бефосила аст?

а) $f(x)=x^2-3x+2,$ $(-\infty;+\infty)$

б) $f(x)=\dfrac{x}{x-1},$ $(0;+\infty)$

Муайян кунед, ки ҳангоми ба ададҳои зерин майл кардани x функсияи $f(x)$ ба кадом ададҳо майл мекунанд ($44^\circ-46^*$):

44°. $f(x)=2x-3.$ а) $x\to 0$; б) $x\to 1$; в) $x\to 2$; г) $x\to 3$.

45. $f(x)=x^2-5x+6.$ а) $x\to 0$; б) $x\to 1$; в) $x\to 2$; г) $x\to 3$.

46*. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}.$ а) $x\to 0$; б) $x\to 1$; в) $x\to 2$; г) $x\to 3$.

47. Ҳудудҳои зеринро ёбед:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x+1)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}(\frac{1}{2}x+x^2+\frac{1}{4})$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$.

48*. Табдилдихиҳои заруриро иҷро карда ҳудудҳоро ҳисоб кунед:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$;

д) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x-2}$.

§ 6. Қоидаҳои ҳисоб намудани ҳосила

I. Ҳисоббарории ҳосила

Ҳосилаи функсияи $f(x)$-ро дар асоси алгоритми баён гардида ҳисоб мекунем.

1. Ҳосилаи адади доимӣ $y = c$.

Адади доимиро ҳамчун функсия дида мебароем, ки барои ҳамаи қиматҳои аргумент қиматҳои якхела қабул мекунад. Одатан онро бо ҳарфи c (лотинӣ “const” – доимӣ) ишорат мекунанд: $y = f(x) = c$. Он гоҳ:

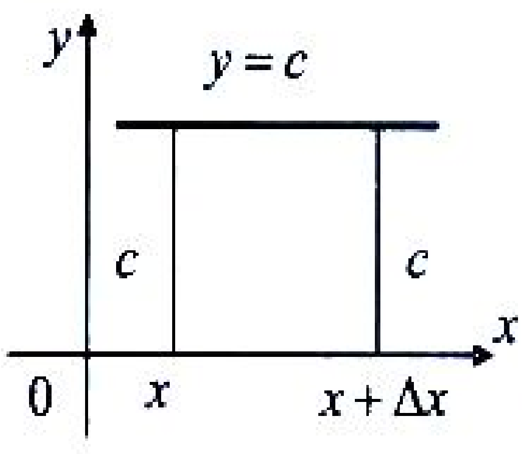
1) Дар фосилаи $[x; x+\Delta x]$ ба қиматҳои аргумент ҳамон як қимати функсия c рост меояд (расми 37): $y+\Delta y = c$;

2) $\Delta y = c - c = 0$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$;

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

$y' = (c)' = 0$



Расми 37

Аз расм айён аст, ки графики функсияи $y = c$ хати рост буда, ба тири OX параллел мебошад; расанда дар нуқтаи дилхоҳи он ба худи хати рост ҳамҷоя мешавад. Аз ин ҷо, коэффитсиенти кунҷи $k = tg\alpha = 0$ ва $\varphi = 0^\circ$ аст.

Мисолҳо: а) $(5)' = 0$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)' = 0$;

в) $(2\sqrt{3})' = 0$; г) $(-2{,}113)' = 0$

2. Ҳосилаи функсияи $y = x$.

1. $[x; x+\Delta x]$, $y + \Delta y = x + \Delta x$;
2. $\Delta y = \Delta x$;
3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$;
4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x' = 1$.

$$(x)' = 1$$

Ин натиҷа ба маънои геометрии ҳосила мувофиқ аст. Графики $y = x$ биссектрисаи кунҷи якуми координатиро тасвир мекунад (онро кашед!). Азбаски расанда ба ҳар як нуқтаи хати рост ба худи хати рост мувофиқ меояд, бинобар ин коэффитсиенти кунҷи расанда ба графики функсия дар ҳар як нуқта ба 1 баробар мебошад.

3. Ҳосилаи функсияи хаттӣ $y = ax + b$.

1. $[x; x+\Delta x]$, $y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$;
2. $\Delta y = a(x + \Delta x) + b - (ax + b) = a\Delta x$;
3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$;
4. $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = a$.

$$\boxed{(ax+b)' = a}$$

Мисолҳо:

а) $y' = (3x+5)' = 3$; б) $y' = (\sqrt{2}x - 7)' = \sqrt{2}$;

в) $y' = (0{,}2x+1)' = -0{,}2$.

4. Ҳосилаи функсияи $y = ax^2$.

1. $[x; x+\Delta x]$, $y + \Delta y = a(x+\Delta x)^2 = ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2$;
2. $\Delta y = ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 - ax^2 = 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2$;
3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x$;
4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2ax + a\Delta x) = 2ax$.

$$\boxed{(ax^2)' = 2ax}$$

М и с о л ҳ о:

а) $y' = (3x^2)' = 2 \cdot 3x = 6x;$ б) $y' = (\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x.$

5. Ҳосилаи функсияи $y = x^3$.

1. $[x; x+\Delta x]$, $y + \Delta y = (x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3;$

2. $\Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3;$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2;$ 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2.$

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2}$$

6. Ҳосилаи функсияи $y = \dfrac{1}{x}$

1. $[x; x+\Delta x]$, $y + \Delta y = \dfrac{1}{x+\Delta x};$

2. $\Delta y = \dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - x - \Delta x}{(x+\Delta x)x} = -\dfrac{\Delta x}{(x+\Delta x)x};$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{1}{(x+\Delta x)x};$ 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{1}{x^2}$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Дар ҳамаи мисолҳои боло мо ҳосилаи функсияҳои ратсионалӣ (яъне радикал надошта)-ро маълум намудем. Аз ин рӯ, касри $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ -ро ҳамеша ихтисор кардан мумкин буд. Барои функсияҳои ирратсионалӣ ин ҳолат на ҳама вақт ҷой дорад.

7. Ҳосилаи функсияи $y = \sqrt{x}$.

1. $[x; x+\Delta x]$, $y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$;

2. $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$;

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$ (ба Δx ихтисор карда наметавонем, бинобар ин касрро табдил медиҳем) $=\dfrac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$

$$=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\boxed{(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

II. Ҳосилаи сумма, ҳосили зарб ва тақсими ду функсия

Қоидаҳои ҳосилагирие, ки дар банди 1 баён намудем аз худи таърифи ҳосила бармеоянд. Барои ифодаҳои начандон мураккаб истифодаи **алгоритми** ҳосила душворие намеоварад, вале барои ифодаҳои мураккаб, ки онҳо аз сумма, ҳосили зарб ва ё тақсими функсияҳо иборатанд, ҳисоб намудани ҳосилаҳои онҳо аз рӯи қоидаи умумӣ кори осон нест.

Бинобар ин, формулаҳо ва қоидаҳои дифференсиониеро маълум мекунем, ки онҳо минбаъд кори моро ҳангоми ҳисоббарории ҳосилаҳо осон мегардонанд.

***Теорема.* Ҳосилаи суммаи ду функсия ба суммаи ҳосилаҳои онҳо баробар аст:**

$$(u+v)'=u'+v' \qquad (1)$$

Исбот. Фарз мекунем, ки суммаи ду функсия $y=u+v$ дода шудааст; дар ин ҷо $u=u(x)$ ва $v=v(x)$ - функсияҳои дифференсиронидашаванда аз рӯи x мебошанд.

Мувофиқи алгоритми ҳисоббарории ҳосила амал мекунем:

1. Дар порчаи $[x; x+\Delta x]$, $y+\Delta y = u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)$;

2. $\Delta y = u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-(u(x)+v(x)) =$

$= (u(x+\Delta x)-u(x))+(v(x+\Delta x)-v(x)) = \Delta u+\Delta v$;

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

Акнун ҳангоми $\Delta x \to 0$ ба ҳудуд мегузарем. Агар $\Delta x \to 0$, онгоҳ мувофиқи таърифи ҳосила $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$ ва суммаи онҳо бошад ба суммаи $u'+v'$ наздик мешавад, яъне

$y' = u'+v'$ ё ки $(u+v)' = u'+v'$

Теорема исбот шуд.

Ин қоидаро барои ёфтани ҳосилаи сумма (ва фарқ)-и якчанд функсия истифода бурда метавонем.

Мисолҳо:

а) $y' = (3x)' = (x+x+x)' = x'+x'+x' = 1+1+1 = 3$;

б) $y' = (x^2+3x)' = (x^2)'+(3x)' = 2x+3$.

Ба ҳамин монанд **формулаи ҳосили зарб** исбот карда мешавад (мустақилона нишон диҳед!):

$$\boxed{(uv)' = u'v+uv'} \tag{2}$$

Ба сухан ифода намудани формуларо фаромӯш накунед!

Натиҷа. Агар дар ин формула $u = c$ бошад, онгоҳ ҳосил мекунем:

$$(cv)' = c'v+cv' = cv' \tag{3}$$

яъне, ҳангоми зарб кардани функсия ба адад он аз зери аломати ҳосила бароварда мешавад.

Мисолҳо:

1. $y' = (x^2)' = (x\cdot x)' = x'\cdot x+x\cdot x' = x+x = 2x$;

2. $y' = (3x)' = 3(x)' = 3\cdot 1 = 3$;

3. $y' = (x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2;$

4. $y' = (x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^3 + x^3 = 4x^3;$

5. $y' = ((x+5)(3x-4))' = (x+5)'(3x-4) + (x+5)(3x-4)' =$

$= 1 \cdot (3x-4) + 3(x+5) = 6x + 11.$

Дар баъзе ҳолатҳо лозим меояд, ки кимати ҳосила дар нуктаи додашуда ҳисоб карда шавад.

Чунончӣ, дода шудааст: $y = (x-1)(\frac{3}{4}x + 2)$. $f'(1)$-ро ёбед.

Ҳ а л. $y' = ((x-1)(\frac{3}{4}x+2))' = (x-1)'(\frac{3}{4}x+2) + (x-1)(\frac{3}{4}x+2)' =$

$= 1 \cdot (\frac{3}{4}x + 2) + \frac{3}{4}(x-1) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}.$

Ба ҷои x адади 1-ро гузошта ҳосил мекунем:

$$y'(1) = f'(1) = \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}.$$

***Т е о р е м а.* Агар $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ бошад, онгоҳ ҳосилаи ҳосили тақсими ду функсия намуди зайл дорад:**

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}} \qquad (4)$$

Исботи он ба сифати машқ ба Шумо супориш дода мешавад.

Аз формулаи (4) **натиҷаҳои** зерин мебарояд:

1. Ҳангоми $v = c$ будан,

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c} \qquad (5)$$

мешавад (санҷед!).

2. Дар мавриди $u = c$ будан,

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2} \tag{6}$$

пайдо мегардад (нишон диҳед!). Дар бисёр ҳолатҳо бо формулаҳои (5) ва (6) ҳисоб кардани ҳосилаи ҳосили тақсими функсияҳо хеле қулай мебошад.

Мисолҳо. Ҳосилаи функсияҳо ёфта шавад:

1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{1-x}{1+x}$; 3) $y = \frac{5x-2}{9}$.

Ҳал. 1) $y = \frac{1}{x}$; мувофиқи формулаи (6) $c = 1$ аст, пас:

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

2) $y = \frac{1-x}{1+x}$; дар ин ҷо: $u = 1-x$ ва $v = 1+x$.

$$y' = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{(1+x)\cdot(-1)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}.$$

3. $y = \frac{5x-2}{9}$; мувофиқи формулаи (5) $c = \frac{1}{9}$ аст, пас:

$$y' = \left(\frac{5x-2}{9}\right)' = \frac{1}{9}(5x-2)' = \frac{1}{9}(5\cdot 1 - 0) = \frac{5}{9}.$$

III. Ҳосилаи дараҷа

Ҳосилаи дараҷа бо нишондиҳандаи натуралиро аз рӯи қоидаи дифференсиронии ҳосили зарб ҳосил карда метавонем. Ба ин мақсад натиҷаҳои ҳосилгардидаро паи ҳам менависем:

$$(x)' = 1 = x^0,$$

$$(x^2)' = 2x^1,$$

$$(x^3)' = 3x^2,$$

$$(x^4)' = 4x^3.$$

Дидан душвор нест, ки ҳосилаи ҳар яке аз ин дараҷаҳо x^1, x^2, x^3, x^4, ба ҳосили зарби нишондиҳандаи дараҷаи аргумент x ба дараҷае, ки нишондиҳандааш ба як воҳид кам аст, баробар мебошад.

Аз ин ҷо, **қонунияти умумии** зерин бармеояд:

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in Z} \qquad (7)$$

Ин қонуниятро бе исбот қабул карда, нишон медиҳем, ки он ҳангоми $n \in Q$ будан низ дуруст аст.

Ҳосилаи функсияи $y = \frac{1}{x^n}$-ро меёбем. Ба ин мақсад касри $y = \frac{1}{x^n}$-ро дар намуди $y = x^k$, $k = -n$ менависем:

$$y' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = (x^k)' = kx^{k-1}, \quad k \in Z \ (k \neq 0).$$

Формулаи (7) барои нишондиҳандаи касрӣ ҳам ҷой дорад. Онро барои ёфтани ҳосилаи функсияи $y = \sqrt{x}$ татбиқ мекунем.

$$y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ (x > 0).$$

Мисолҳо:

1) $y = x,\ \ y' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1;$

2) $y = x^7;\ \ y' = (x^7)' = 7x^6;$

3) $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}};\ \ y' = \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)' = (3 \cdot x^{-\frac{1}{3}})' = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{1}{3}-1} = -x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{x\sqrt[3]{x}};$

13) $y=\frac{1}{x^4}+5$; 14) $y=x^2(3x+2)$; 15) $y=\frac{1}{x^3+1}$.

50. 1) $y=\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{2}x^8$; 2) $y=x^2-3\sqrt[3]{x}$;

3) $y=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-4$; 4) $y=\frac{x^5-2x^3+x^2+2x+1}{x^2}$;

5) $y=6\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}$; 6) $y=\frac{3-4x}{\sqrt[3]{x}}$;

7) $y=\sqrt{x}(x^2-2x)$; 8) $y=\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$; 9) $y=\frac{x^2-2}{\sqrt{x}}$;

10) $y=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$; 11) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}+x^2$; 12) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$;

13) $y=\frac{2x^2+3x-1}{x-1}$; 14) $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 15) $y=\frac{2x}{1+x}+\frac{1}{x}$;

16) $y=\frac{2\sqrt{x}}{x^3}$; 17) $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{x^2}$; 18) $y=(x+5)(x^2-1)$.

51*. 1) $y=\sqrt[3]{x}+\frac{3}{x^2}-5x^3+4$; 2) $y=\frac{1+2x}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^2}$;

3) $y=\frac{1-x}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{x}$; 4) $y=(x^3-1)(x^2+x+1)$;

5) $y=6\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{x}-\sqrt{2}$; 6) $y=\sqrt{x}\cdot(x^2-x)$;

7) $y=x^2-\frac{3}{x^3}+2$; 8) $y=\sqrt{x}(x+1)$;

9) $y=x^7-3x^5+\frac{1}{\sqrt{x}}$; 10) $y=(3+x^3)\cdot\sqrt{x}$;

11) $y=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$; 12) $y=\left(\frac{1}{x}+x\right)(x+1)$;

13) $y=\frac{1}{x^4}+5$; 14) $y=x^2(3x+2)$; 15) $y=\frac{1}{x^3+1}$.

50. 1) $y=\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{2}x^8$; 2) $y=x^2-3\sqrt[3]{x}$;

3) $y=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-4$; 4) $y=\frac{x^5-2x^3+x^2+2x+1}{x^2}$;

5) $y=6\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}$; 6) $y=\frac{3-4x}{\sqrt[3]{x}}$;

7) $y=\sqrt{x}(x^2-2x)$; 8) $y=\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$; 9) $y=\frac{x^2-2}{\sqrt{x}}$;

10) $y=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$; 11) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}+x^2$; 12) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$;

13) $y=\frac{2x^2+3x-1}{x-1}$; 14) $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 15) $y=\frac{2x}{1+x}+\frac{1}{x}$;

16) $y=\frac{2\sqrt{x}}{x^3}$; 17) $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{x^2}$; 18) $y=(x+5)(x^2-1)$.

51*. 1) $y=\sqrt[3]{x}+\frac{3}{x^2}-5x^3+4$; 2) $y=\frac{1+2x}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^2}$;

3) $y=\frac{1-x}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{x}$; 4) $y=(x^3-1)(x^2+x+1)$;

5) $y=6\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{x}-\sqrt{2}$; 6) $y=\sqrt{x}\cdot(x^2-x)$;

7) $y=x^2-\frac{3}{x^3}+2$; 8) $y=\sqrt{x}(x+1)$;

9) $y=x^7-3x^5+\frac{1}{\sqrt{x}}$; 10) $y=(3+x^3)\cdot\sqrt{x}$;

11) $y=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$; 12) $y=\left(\frac{1}{x}+x\right)(x+1)$;

13) $y = \dfrac{2x}{1-x^2} + \dfrac{1}{x}$; 14) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sqrt{x^2}}$;

15) $y = x\sqrt{x} - \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$; 16) $y = 2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x^2+1}$;

17) $y = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+1)$; 18) $y = \sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} + x\sqrt{x})$.

§ 7. Функсияи мураккаб ва ҳосилаи он

1. Мафҳуми функсияи мураккаб. Чӣ тавре ки дар боло қайд кардем функсияҳо бештар бо ёрии формулаҳо дода мешаванд. Формулаҳо бошанд дар натиҷаи пай дар пай иҷро намудани амалҳо бо аргументҳо ва ададҳои доимӣ ба амал меоянд. Мувофиқи ҳамин тартибот функсияи мураккаб ҳосил мешавад.

Фарз мекунем, ки ду функсия $-y = f(x)$ ва $x = g(t)$ дода шудааст.

Функсияи мураккаб (ё ин ки композитсия (лотинӣ – пайвастан)-и функсияҳои f ва g гуфта функсияеро меноманд, ки он аз рӯи қоидаи $y = f(g(x))$ ҳисоб карда мешавад.

Ҳангоми тартиб додани функсияҳои мураккаб ду масъалаи асосӣ ба миён меояд.

Масъалаи якум ба истифодаи номаълумҳо вобаста аст.

Чуноне ки дидем дар таърифи боло се номаълум: y, x, ва t-ро истифода намудем. Дар ибтидо функсияи y аз аргумент x, ҳамчун функсия аз t вобастагӣ дошта бошанд, дар охир функсияи y аз t вобаста шуда мемонад.

Аммо дар бисёр ҳолатҳо функсияи мураккаб аз ду функсияе тартиб дода мешавад, ки онҳо аз ҳамон як тағйирёбанда вобастагӣ доранд. Дар ин маврид нишон додани тартиби ҳисоббарории функсия хеле муҳим аст.

М и с о л. Агар $y = f(x)$ ва $f(x) = 1-x$, $y = g(x)$ ва $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ бошанд, он гоҳ ду ҳолати гуногун ҳосил мешавад:

а) $y = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 1 - \dfrac{x}{x-1} = -\dfrac{1}{x-1}$

б) $y = g(f(x)) = g(1-x) = \dfrac{1-x}{1-x-1} = \dfrac{1-x}{-x} = \dfrac{x-1}{x}$

Аз ин ҷо мебарояд, ки барои функсияҳои мураккаб **қонуни ҷойивазкунӣ** ҷой надорад, яъне $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

Масъалаи дуюм ва аз ҳама муҳим муайян кардани соҳаи муайянии функсияи $y = f(g(x))$ ҳисоб мешавад.

Маълум, ки агар t ба соҳаи муайянии функсияи g тааллуқ надошта бошад, онгоҳ ифодаи $f(g(t))$ номуайян аст, зеро барои ҳисоб кардани он лозим меояд, ки аввал $g(t)$-ро ёбем. Дар мавриди t ба соҳаи муайянии $g(t)$ тааллуқ доштан ҳам, ифодаи $f(g(t))$ метавонад маъно надошта бошад. Ин ҳолат ҳамон вақт ҷой дорад, ки агар қиматҳои $x = g(t)$ ба соҳаи муайянии $f(x)$ тааллуқ надошта бошад.

Ба ҳамин тариқ, соҳаи муайянии $y = f(g(x))$ дохили соҳаи муайянии $g(t)$ аст, вале метавонад ба он мувофиқ наояд.

Мисолҳо.

1. Аз функсияи $y = f(x) = x^2 + 2$ ва $z = \sqrt{1-y^2}$ функсияи мураккаб тартиб додан мумкин нест. Агар ба соҳаи муайянии функсияи z ададҳои $-1 \le y \le 1$ $(1-y^2 \ge 0)$ тааллуқ дошта бошанд, соҳаи қиматҳои функсия $y = x^2 + 2$ маҷмӯи ададҳои ҳақиқие мебошанд, ки аз 2 хурд нестанд $(y \ge 2)$.

Пас, функсияи $z = \sqrt{1-(x^2+2)^2}$ дар маҷмӯи R вуҷуд надорад.

2. Функсияи $y = f(x) = 2x$ ва функсияи $y = g(x) = x+1$ дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқи R муайян мебошанд. Аз онҳо функсияи мураккаб тартиб медиҳем:

$y = f(g(x)) = 2(x+1) = 2x+2.$

Барои $g(f(x))$ бошад ҳосил мекунем: $g(f(x)) = g(2x) = 2x+1$. Функсияҳои пайдошуда дар маҷмӯи R муайян мебошанд.

2. <u>Функсияи ноошкор</u>. Дар ҳамаи мисолҳое, ки дар боло муоина гардиданд ва функсияҳо намуди аналитикӣ доштанд, дар қисми чапи баробарӣ y ва дар қисми росташон ифодаи танҳо аз x вобаста буда иштирок доштанд. Мисоли ин гуна функсияҳо:

$$1)\ y = x^2; \qquad\qquad 2)\ y = \frac{x+1}{x}.$$

Вобастагии байни ду тағйирёбандаро бо муодила низ додан мумкин аст, ки он нисбат ба тағйирёбандаи y ҳал нашуда бошад. Дар он сурат ингуна функсияро ноошкор мегӯянд.

Мисолҳо.

1. $ax + by + c = 0$ - функсияи y ноошкор аст.

Агар онро нисбат ба y ҳал кунем, функсия y ошкор мегардад:

$$y = -\frac{ax+c}{b}$$

2. Муодилаи $xy - x + 1 = 0$ -ро ҳал карда y-ро меёбем:

$$x(y-1)+1=0 \qquad \text{ва} \qquad y = 1 - \frac{1}{x}$$

3. <u>Ҳосилаи функсияи мураккаб</u>. Акнун ба ёфтани ҳосилаи функсияи мураккаб шурӯъ мекунем.

Фарз мекунем, ки функсияи $y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ дода шудааст. Аз рӯи кадом қоида ҳосилаи ин функсияро бояд ёфт? Формулаи ҳосилаи дараҷа $(x^n)'$ -ро истифода бурда наметавонем, зеро он ба функсияҳое тааллуқ дорад, ки асосашон худи аргумент x аст. Ба сифати асоси функсияи додашуда бошад, функсияи $(1-x^2)$ хизмат мекунад, ки он ба ҷои аргумет x омадааст. Ва он ҳам функсияи дараҷагӣ аст. Аз ин рӯ, зарурияти ба вуҷуд овардани қоидаи умумии нав – қоидаи дифференсиронии функсияи мураккаб ба миён меояд.

Бигузор функсияи

$$y = f(\varphi(x)) \tag{1}$$

дода шуда бошад; дар ин ҷо y аз x вобастагӣ дорад.

Тағйирёбандаи нав дохил мекунем: $u=\varphi(x)$ ва $y=f(u)$. Дар ин маврид y аз u ва u аз x вобастагӣ доранд.

Функсияҳои φ ва f - дар соҳаи муайянии функсияи дода шуда дифференсиронидашавандаанд, яъне: $u'=\varphi'(x)$ ва $y'=f'(u)$.

***Теорема.* Ҳосилаи функсияи мураккаби $y=f(\varphi(x))$ аз рӯи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:**

$$y'=f'(\varphi(x))\varphi'(x) \tag{2}$$

Исбот. Барои ҳосил намудани формулаи матлуб аз **алгоритми** асосӣ истифода мебарем.

1. Фарз мекунем, ки аргумент x дар порчаи $[x;x+\Delta x]$ афзоиш ёфт, он гоҳ:

$$y+\Delta y=f(\varphi(x+\Delta x));$$

2. $\Delta y=f(\varphi(x+\Delta x))-f(\varphi(x));$

дар ин ҷо, $u=\varphi(x)$ ҳам бо Δu афзоиш меёбад:

$$\varphi(x+\Delta x)=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)\text{, онгоҳ: }\varphi(x+\Delta x)=u+\Delta u.$$

пас, $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u),\quad \Delta u\neq 0.$

Азбаски $u=\varphi(x)$ - функсияи дифференсиронидашаванда аст, пас ҳангоми $\Delta x\to 0$, $\Delta u\to 0$ ба сифр майл мекунад.

Барои ёфтани ҳосилаи y аз рӯи x нисбат тартиб медиҳем:

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta x}=$

Чӣ тавре, ки мебинем афзоиши функсия Δy на аз рӯи афзоиши аргумент Δx, балки ба воситаи афзоиши Δu ифода ёфтааст. Бинобар ин, барои ёфтани ҳудуди ин нисбат ҳангоми $\Delta x\to 0$, сурат ва махраҷро ба Δu зарб мекунем:

$$=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Мувофиқи принсипи бефосилагӣ, агар $\Delta x \to 0$, бояд $\Delta y \to 0$.

Агар $\Delta u \to 0$, касри якум $\frac{\Delta y}{\Delta u} \to y'(u)$ ё ин ки $f'(\varphi(x))$ ва касри дуюм бошад $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to u'$, яъне ба ҳосилаи $u' = \varphi'(x)$ наздик мешавад.

Гузариши ҳудудиро ба амал оварда ҳосил мекунем.

$$y' = f'(u) \cdot u' = f'(u(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Теорема исбот шуд.

Мисолҳо. Ҳосилаи функсияҳоро ёбед:

1) $y = \sqrt{1-x^2}$; 2) $y = (3x-5)^{20}$.

Ҳал. 1) Функсияи $y = \sqrt{1-x^2}$ -ро ҳамчун функсияи мураккаб тасвир мекунем; он аз функсия $u = 1-x^2$ ва $y = f(u) = \sqrt{u}$ ташкил ёфтааст. Онгоҳ:

$$y' = (\sqrt{u})' \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (1-x^2)' = -\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

2) $y = (3x-5)^{20} = u^{20}$; $u = 3x-5$;

$$y' = (u^{20})' \cdot (3x-5)' = 20u^{19} \cdot 3 = 60(3x-5)^{19}.$$

Масъала. Агар расанда аз нуқтаи $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$-и давраи $x^2 + y^2 = 1$ гузарад коэффитсиенти кунҷии он ба чӣ баробар аст?

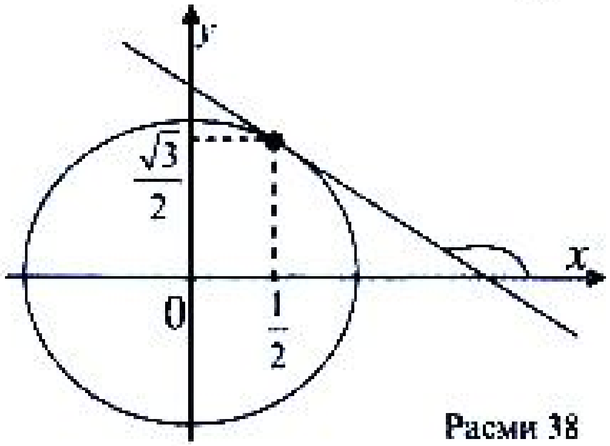
Ҳал. **Тарзи 1.** Дар ин ҷо y-**функсияи ноошкор** аст. Онро ба воситаи x ифода намуда, ҳосилаи функсияро меёбем ва баъд коэффитсиенти кунҷиро маълум мекунем (иҷро кунед!).

Тарзи 2. Барои ба мақсад расидан, беҳтараш муодилаи давраро функсияи ноошкор ҳисобида, $y = y(x)$ -ро ҳамчун функсияи мураккаб аз рӯи тағйирёбандаи x қабул менамоем ва аз ду тарафи баробарӣ ҳосила мегирем:

$$x^2 + y^2 = 1;\ \ 2x \cdot (x)' + 2y \cdot y'(x) = 0 \text{ ё ки } x + y \cdot y' = 0;\ \ y' = -\frac{x}{y}.$$

Координатаҳои нуқтаи A-ро гузошта, коэффитсиенти кунҷии расандаро ҳосил мекунем (расми 38):

$$y' = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Расми 38

1. Функсияи мураккабро маънидод кунед.
2. Чаро функсияи ноошкор мегӯянд? Мисол оред.
3. Ҳосилаи функсияи мураккаб чӣ тавр ёфта мешавад?

Машқҳо

Аз функсияҳои $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функсияҳои мураккаби $u = f(\varphi(x))$ ва $v = \varphi(f(x))$-ро тартиб диҳед ($52^\circ - 54^*$), агар:

52°. а) $f(x) = x^2 + 1$ ва $\varphi(x) = x^2$; б) $f(x) = 2x$ ва $\varphi(x) = x + 3$.

53. а) $f(x) = \sqrt{x}$ ва $\varphi(x) = x^2 + x$; б) $f(x) = x^2 - x$ ва $\varphi(x) = \frac{1}{x}$.

54^*. а) $f(x) = \varphi(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{агар} \quad x \geq 0, \\ 2x + 1, & \text{агар} \quad x \leq 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{агар} \quad x > 0 \end{cases}$ ва $\varphi(x) = x^2 + 1$.

Муодилаи хатҳо дода шудаанд. Яке аз онҳоро ба воситаи дигараш ифода кунед ($55^\circ - 57^*$):

55°. а) $x + y - 3 = 0$; б) $2x + y + 4 = 0$;

в) $y - \frac{1}{2}x^2 + 8 = 0$; г) $s - 1{,}5t = 4$;

д) $x^2 - y^2 = 0$; е) $|y| - 1 - x = 0$.

56. а) $5 + 3t = t^2 + s$; б) $\frac{2t + 0{,}75t^2}{10} - \frac{5}{2} = 0$; в) $s^2 = v^3$.

57*. а) $\frac{y}{x-5}-x-4=0;$ б) $\frac{s+t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}=\frac{2}{t^2+1};$

в) $x^2+y^2=1.$

Кадоме аз ин вобастагиҳо y-ро ҳамчун функсия аз x муайян мекунад ($58^\circ-61^*$):

58°. а) $3y+x=0;$ б) $x+y-xy=1.$

59. а) $2x-y=0;$ б) $xy-x=1.$

60. а) $x+2y+xy=-7;$ б) $\sqrt{xy}+x=1.$

61*. а) $(2x-y)(x+y)=x^2;$ б) $y-x=y^2.$

Ҳосилаҳои функсияҳоро ёбед ($62^\circ-64^*$):

62°. а) $y=(2x+1)^2;$ б) $y=3\sqrt{5x-1};$

в) $y=\sqrt{x^2-4};$ г) $y=\sqrt{1-\sqrt{x}}.$

63. а) $y=\left(x^3-1\right)^6;$ б) $y=\frac{1}{(x^2-1)^4};$

в) $y=x(x^2+1)^3;$ г) $y=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}.$

64*. а) $y=(ax^2+bx+c)^k;$ б) $y=(x^3+1)^{-\frac{2}{3}};$

в) $y=(x^3+2)\sqrt[3]{2x^2-1};$ г) $y=\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}.$

Ҳосилаҳои функсияҳоро ёбед ($65^\circ-68^*$):

65°. а) $y=(x+1)^4;$ б) $y=x(3-2x)^8;$

в) $y=(2x-1)^{-3};$ г) $y=\sqrt{3x-7}.$

66. а) $y=\sqrt[3]{2x+1};$ б) $y=\frac{5}{(2x-3)^5};$

в) $y=\frac{1}{\sqrt{5x+7}};$ г) $y=(x^6-1)^2(x+4)^3;$

67. а) $y=\sqrt[3]{(2x+1)^2}$; б) $y=(3+4x)^3+(6x-1)^2$;

в) $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{3x+2}}$; г) $y=(1-2x)^4(x+1)^3$;

68*. а) $y=(ax+b)^n$; б) $y=(a+x)^n$.

69. а) Ба давраи воҳидии $x^2+y^2=1$ дар нуқтаи $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ расанда гузаронида шудааст. Коэффитсиенти кунҷии онро ёбед.

б) Муодилаи расандаро ба давраи $x^2+y^2=25$ дар нуқтаи (3; 4) маълум кунед.

Қимати ҳосилаҳоро дар нуқтаҳои дода шуда ҳисоб кунед ($70^\circ-72^*$):

70°. а) $y=x^2-2x$; $x=0, 1, 2$; б) $y=\dfrac{x}{2x-1}$; $x=-2, 0, 3$.

71. а) $y=\dfrac{3-2x}{x+5}$; $x=-4, 8, 0$; б) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$; $x=0, 1, -1$.

72*. а) $y=\dfrac{2x+3}{3x-5}$; $x=-3, 6, x^2-1$;

б) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$; $x=0, -3, x+1$.

73. Функсияҳои зерин дода шудаанд:

1) $y=x^3$; 2) $y=x^2-7x+3$;

3) $y=\sqrt{2x+9}$; 4) $y=(x+1)^5$.

Аз байни онҳо ҳамингуна функсияҳоеро интихоб намоед, ки дар нуқтаи $x=0$: а) $f(0)=f'(0)$; б) ҳосила дорои қимати калонтарин бошад; в) ҳосила ба қимати хурдтарин молик бошад.

§ 8. Ҳосилаи функсияи намуди $f(kx + b)$

Ҳосилаи функсияи $f(kx+b)$-ро ҳамчун ҳолати хусусии ҳосилаи функсияи мураккаб дида баромадан мумкин аст.

Инро нишон медиҳем.

Теорема. **Ҳосилаи функсияи $y = f(kx+b)$ аз рӯи формулаи**

$$y' = kf'(kx+b)$$

ҳисоб карда мешавад.

Исбот. Агар дар функсияи $y = f(kx+b)$ ифодаи зери аломати он $(kx+b)$-ро бо $\varphi(x)$ ишорат кунем, яъне $\varphi(x) = kx + b$, онгоҳ функсияи дода шуда намуди функсияи мураккабро мегирад:

$$y = f(\varphi(x)), \qquad \varphi(x) = kx + b$$

Ҳосилаи он ба мо маълум аст:

$$y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Ҳосилаи $\varphi(x) = kx + b$ -ро меёбем:

$$\varphi'(x) = (kx+b)' = k$$

Он гоҳ: $$y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = kf'(kx+b).$$

Теорема исбот шуд.

Мисолҳо:

1) $y = (x-1)^3; \quad y' = ((x-1)^3)' = 3(x-1)^2 \cdot (x-1)' = 3(x-1)^2;$

2) $y = (3x+5)^5; \quad y' = ((3x+5)^5)' = 5 \cdot 3(3x+5)^4 = 15(3x+5)^4;$

3) $y = \dfrac{1}{3x-4}; \quad y' = \left(\dfrac{1}{3x-4}\right)' = -\dfrac{3}{(3x-4)^2}.$

1. Ҳосилаи функсияи $f(kx+b)$ ба чӣ баробар аст?
2. Ҳосилаи функсияи $f(kx+b)$ ба ҳосилаи функсияи $kx+b$ чӣ гуна алоқамандӣ дорад?

Машқҳо

Ҳосилаи функсияҳоро ёбед ($74^{\circ} - 76^{\circ}$):

74°. а) $y = 2x + 3$; б) $y = 7x - \frac{1}{3}$;

в) $y = (2x + 3)^3$; г) $y = \sqrt{7x - 3}$.

75. а) $y = (2 - 3x)^5$; б) $y = (x^2 + 4x - 1)^2$;

в) $y = (x^2 + 4x - 1)^{\frac{2}{3}}$; г) $y = (2 - 1{,}5x)^3$.

76*. а) $y = (3x - 2)^2 - (2x - 3)^4$; б) $y = \frac{1}{(5x + 3)^2}$;

в) $y = \sqrt{4x + 5}$; г) $y = (3x - 1)^3 + \sqrt{4x - 2}$.

77. Қимати ҳосилаи функсияи $y = (3x - 2)^{10}$-ро дар нуқтаи $x_0 = 1$ ёбед.

§ 9. Ҳудуди нисбати $\frac{\sin x}{x}$ ҳангоми $x \longrightarrow 0$

Донистани ин ҳудуд барои ёфтани ҳосилаҳои функсияҳои тригонометрӣ зарур аст. Аммо ин ҳудудро бо алгоритми асосии ҳосилагирӣ ёфтан мумкин нест. Лозим меояд, ки ҳалли онро бо ёрии ягон методи дигар ҷустуҷӯ намоем.

Ин методро шарҳ медиҳем.

Агар кунҷи x қиматҳои радианӣ қабул кунад, онгоҳ ифодаи $\frac{\sin x}{x}$ барои ҳамаи қиматҳои x (ғайр аз $x = 0$) муайян аст. Дар § 7, боби II маълум кардем, ки дар мавриди хурд будани қиматҳои x (яъне дар наздикии нуқтаи $x = 0$) $\sin x \approx x$ мешавад. Аз ин ҷо мебарояд, ки ҳангоми $x \to 0$, бояд $\frac{\sin x}{x} \to 1$.

Ин далелро **айёнӣ** нишон медиҳем.

Якчанд қимати радиании x-ро мегирем; фишангчаи «град-рад»-ро ба ҳолати «рад» оварда, нисбати $\frac{\sin x}{x}$-ро дар микрокалкулятор ҳисоб мекунем (ҷадвали 8):

Мо саҳеҳии адад-ҳоро то панҷ аломати даҳӣ гирифтем. Ба ҷадвали 8 нигариста пай бурдан мумкин аст, ки:

Ҷадвали 8

x (бо рад)	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$ ё ки $AF \sin \div x$
1	1	0,84 147
0,1	0,1	0,99 833
0,01	0,01	0,99 998

$\frac{\sin x}{x} \to 1$, агар $x \to 0$

Бе тирча менависем:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

?

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ -ро бо сухан баён кунед.

2. Нисбати $\frac{\sin x}{x}$ дар кадом нуқта номуайян аст?

Машқҳо

Ҳудудҳои зеринро ҳисоб кунед ($78^{\circ} - 80^{*}$):

78°. а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{\sin x}$.

79. а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{6x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$.

80*. а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 11x - 6x}{5x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin 3x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgax}{x}$.

§ 10. Ҳосилаи функсияҳои тригонометрӣ

Акун ба масъалаи хеле муҳим – ҳосилаи функсияҳои тригонометрӣ машғул мешавем. Ҳаминро ба назар мегирем, ки ченаки кунҷҳо бо радианҳо дода мешаванд.

I. Ҳосилаи функсияи $y = \sin x$

Алгоритми асосии ҳосилагириро истифода мебарем:

1. $[x; x+\Delta x]$, $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$;
формулаи фарқи синусро истифода мебарем.

2. $$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{x}\cdot\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

3. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cdot\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

4. Ҳангоми $\Delta x \to 0$ ба ҳудуд мегузарем, онгоҳ

$$\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1, \qquad \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \to \cos x$$

Пас, тарафи рости баробарии охирин ба $\cos x$ майл мекунад, яъне:

$$\boxed{y' = (\sin x)' = \cos x}$$

Мисолҳо.

1) $y = \frac{1}{2} - 4\sin x;$ $y' = (\frac{1}{2} - 4\sin x)' = (\frac{1}{2})' - 4(\sin x)' = -4\cos x;$

2) $y = \sin 3x;$ $y' = (\sin 3x)' = 3\cos 3x$.

II. Ҳосилаи функсияи $y = \cos x$

Маълум аст, ки: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Аз $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ ҳамчун функсияи мураккаб аз x ҳосила гирифта пайдо мекунем:

$$(\cos x)'=(\sin(\frac{\pi}{2}-x))'=\cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(\frac{\pi}{2}-x)'=\cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(-1)=-\sin x$$

Ҳамин тавр,

$$\boxed{y'=(\cos x)'=-\sin x}$$

Мисолҳо:

1) $y=2\cos\frac{x}{2};\quad y'=(2\cos\frac{x}{2})'=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}=-\sin\frac{x}{2}.$

2) $y=\sin x+\cos x;\quad y'=(\sin x+\cos x)'=\cos x-\sin x.$

3) $y=5\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right),\quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right).$

$$y'=\left(5\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right)'=-5\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)'=-10\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right);$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-10\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=-10\sin\frac{\pi}{6}=-10\cdot\frac{1}{2}=-5.$$

III. Ҳосилаи функсияи $y = tg\, x$

Азбаски $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$ аст, мувофиқи қоидаи ҳосилаи тақсим навишта метавонем:

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}}$$

Мисол. $y=tgx-x;$

$$y'=(tgx-x)'=(tgx)'-(x)'=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=tg^2 x$$

IV. Ҳосилаи функсияи $y = ctg\ x$

$$(ctgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\boxed{(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Мисол. $y = \sqrt{ctg 2x}$;

$$y' = (\sqrt{ctg 2x})' = \frac{1}{2\sqrt{ctg 2x}} \cdot (ctg 2x)' = -\frac{1 \cdot (2x)'}{2\sin^2 2x \cdot \sqrt{ctg 2x}} = -$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 2x \cdot \sqrt{ctg 2x}}$$

?

1. Ҳосилаи синус, косинус, тангенс ва котангенс ба чӣ баробар аст?
2. Ҳосилаи синус чӣ тавр исбот карда шудааст?
3. Ҳосилаи функсияҳои тангенс ва котангенс чӣ?

Машқҳо

Ҳосилаҳои функсияҳоро ёбед ($81^{\circ} - 84^{*}$):

81°. а) $y = 2\sin\frac{x}{2}$; б) $y = 5\sin^2 x$;

в) $y = -\frac{\cos x}{1+\sin x}$; г) $y = \sqrt{\sin x}$; д) $y = \frac{1}{\sin x}$.

82. а) $y = (1-\cos 2x)^2$; б) $y = \sin(2x-1)$;

в) $y = x\cos 2x$; г) $y = \frac{\cos(2x+1)}{\sin(2x+1)}$; д) $y = 2\sin\sqrt{2x-1}$.

83. а) $y = \sin(2x^2+3)$; б) $y = \sqrt{\cos 4x}$;

в) $y = \frac{1+\sin 2x}{1-\cos 3x}$; г) $y = x \cdot \sin^3 2x$; д) $y = tg^2(2x+1)$.

84*. а) $y = ctg(ax+k)$; б) $y = \sqrt{\cos\sqrt{2x}}$;

в) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{ctgx}}$; г) $y = tgx \cdot \sin^2 x$.

85. Барои функсияҳои зерин суръати тағйирёбии ҳаракати лапиши гармоникиро муайян кунед:

а) $s = 2\sin(\omega t + \dfrac{\pi}{3})$; б) $s = 3\sin(\omega t - \dfrac{5}{12}\pi)$.

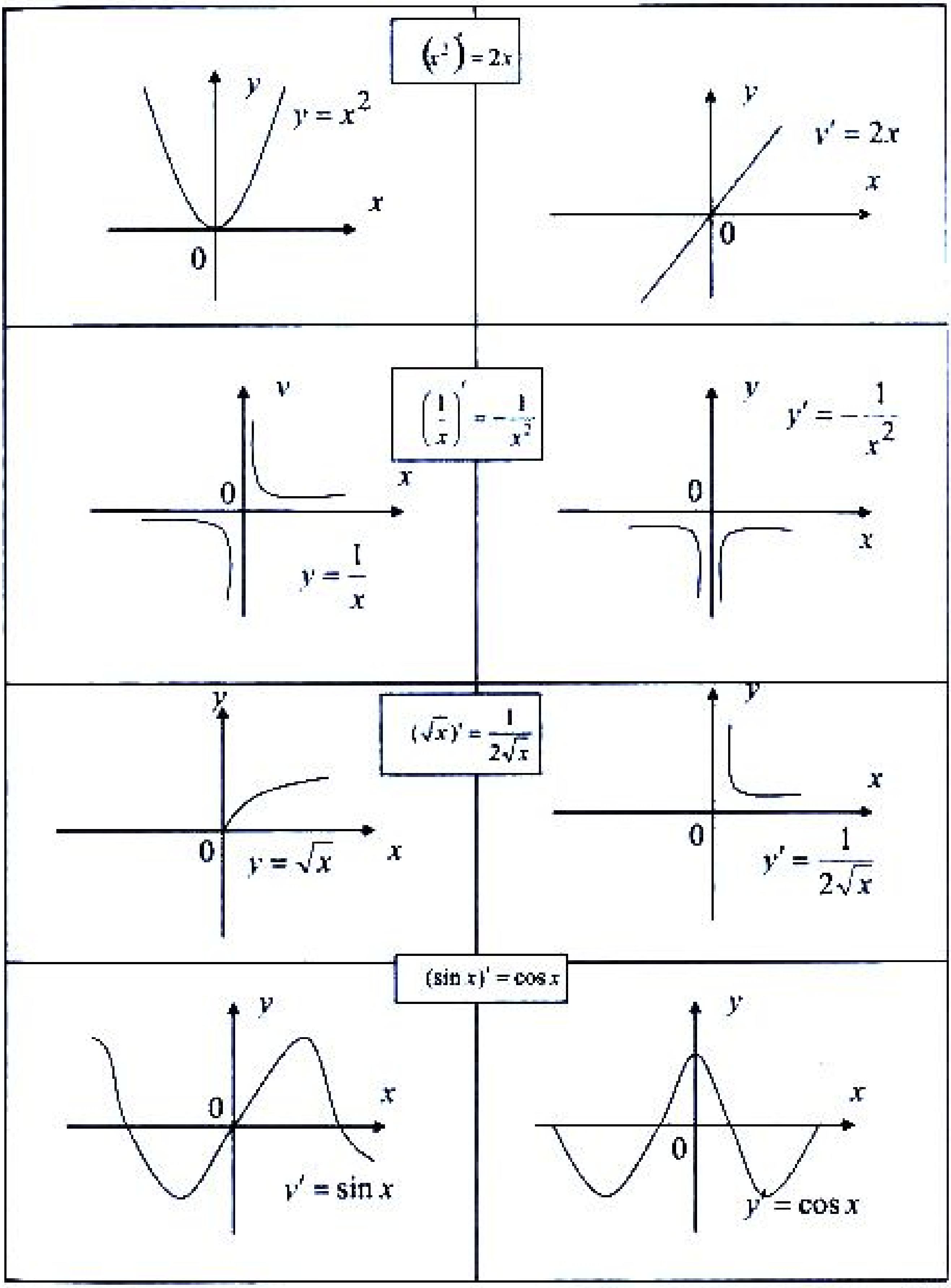
§ 11. Ҷадвали ҳосилаҳо ва татбиқи он

Қоидаҳо ва натиҷаҳои ҳосилшудаи ҳосилаи баъзе функсияҳоро дар ҷадвал ворид месозем (ҷадвали 9).

Ҷадвали 9

Қоидаҳо	Формулаҳо
1. $(u+v)' = u' + v'$ 2. $(uv)' = u'v + v'u$ 3. $(cu)' = cu'$ 4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$ 5. $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = -\dfrac{u'}{c}$ 6. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$ 7. Агар $u = \varphi(x)$ ва $y = f(u)$ бошад, $y' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$ аст. 8. $y = f(kx+b)$ бошад, $y' = kf'(kx+b)$	1. $(c)' = 0$; 2) $(x)' = 1$ 3. $(x^2)' = 2x$; 4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ 5. $(x^n)' = nx^{n-1}$ 6. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ 7. $(\sin x)' = \cos x$ 8. $(\cos x)' = \sin x$ 9. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ 10. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Графики функсияҳо ва мувофиқан графики ҳосилаҳои онҳоро, ки оид ба онҳо дар боло сухан рафт дар расм тасвир мекунем (расми 39):



Расми 39

Акнун татбиқи ҷадвалро дар ҳалли мисолҳо дида мебароем.

Мисолҳо. Ҳосилаи функсияҳо ёфта шаванд:

1) $y=(1+\cos x)\cdot\sin x,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ -ро ҳисоб кунед;

2) $y=\frac{x}{1+\sin^4 x};$

3) $y=x^3\sin x+3x^2\cos x;\quad y'(0)$ -ро ёбед.

Ҳал.

1) $y=(1+\cos x)\sin x;\quad y'=((1+\cos x)\sin x)'=(1+\cos x)'\sin x+$

$$+(1+\cos x)(\sin x)'=-\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x=(\cos^2 x-\sin^2 x)+$$
$$+\cos x=\cos 2x+\cos x.$$

Қимати ҳосиларо дар нуқтаи $x=\frac{\pi}{2}$ меёбем:

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=-1;$$

2) $y=\frac{x}{1+\sin^4 x};$

$$y'=\left(\frac{x}{1+\sin^4 x}\right)'=\frac{(x)'(1+\sin^4 x)-x\cdot(1+\sin^4 x)'}{(1+\sin^4 x)^2}=$$

$$=\frac{1+\sin^4 x-4x\sin^3 x(\sin x)'}{(1+\sin^4 x)^2}=\frac{1+\sin^4 x-4x\cos x\sin^3 x}{(1+\sin^4 x)^2}=$$

$$=\frac{1+\sin^4 x-2x\sin 2x\sin^2 x}{(1+\sin^4 x)^2}.$$

3) $y=x^3\sin x+3x^2\cos x;\quad y'=\left(x^3\sin x+3x^2\cos x\right)'=(x^3\sin x)'+$

$+(3x^2\cos x)'=(x^3)'\sin x+x^3(\sin x)'+(3x^2)\cdot\cos x+3x^2(\cos x)'=$

$=3x^2\sin x+x^3\cos x+6x\cos x-3x^2\sin x=x^3\cos x+6x\cos x=$

$=x\cos x(x^2+6).$

Акнун $y'(0)$-ро ҳисоб мекунем: $y'(0)=0\cos 0(0+6)=0$.

М а с ъ а л а. Нуқта аз рӯи қонуни $S=a\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$ ҳаракат мекунад.

1) Формулаи суръати ҳаракати онро ёбед: 2) Маълум кунед, ки дар кадом лаҳзаи вақт суръат баробари сифр аст.

Ҳ а л. 1) Аз функсияи $S=a\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$ ҳосила мегирем:

$$v=S'=\left(a\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\right)'=-a\sin\frac{\pi}{2}t\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)'=-\frac{a\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t.$$

2) Суръат баробари сифр мешавад, агар

$$-\frac{a\pi}{2}2\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=0 \quad \left(-\frac{a\pi}{2}\neq 0\right)$$ шавад.

Аз ин ҷо: $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=0$, $\frac{\pi}{2}\cdot t=\pi k$, $t=2k$, $k\in Z$.

?

1. Ба формулаҳои дар ҷадвал овардашуда эътибор диҳед ва онҳоро дар хотир нигоҳ доред.
2. Аз рӯи графики функсияҳои $y=x^2$ ва $y=\frac{1}{x}$ графики ҳосилаи онҳоро тасвир намоед.
3. Аз рӯи графики функсияҳои $y=\sqrt{x}$ ва $y=\sin x$ графики ҳосилаи онҳоро тасвир кунед.

Машқҳо

Ҳосилаи функсияҳоро ёбед ($86^{\circ}-88^{*}$):

86°. а) $y=3x^3-4x^2+2x+1$; б) $y=x-3x^2$;

в) $y=x^2-3x+1$; г) $y=\frac{1}{2}x^2+\sqrt{x}$.

87. а) $y=(x-1)(x+2)$; б) $v=x^2(1-x^2)$;

в) $y=\frac{x+2}{x-1}$; г) $y=\frac{4x-3}{x^2}$.

88*. а) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x+1}$; б) $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x+3}}$;

в) $y = (2x+7)^5 + \sin 2x$; г) $y = \sin^2(3x+4)$.

89. Қимати ҳосилаи функсияҳои машқи 87-ро дар нуқтаи $x_0 = 2$ ёбед.

90. Муодилаи $f'(x) = 0$ -ро ҳал намоед, агар:

а) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - x^2$; б) $f(x) = \sin 2x$;

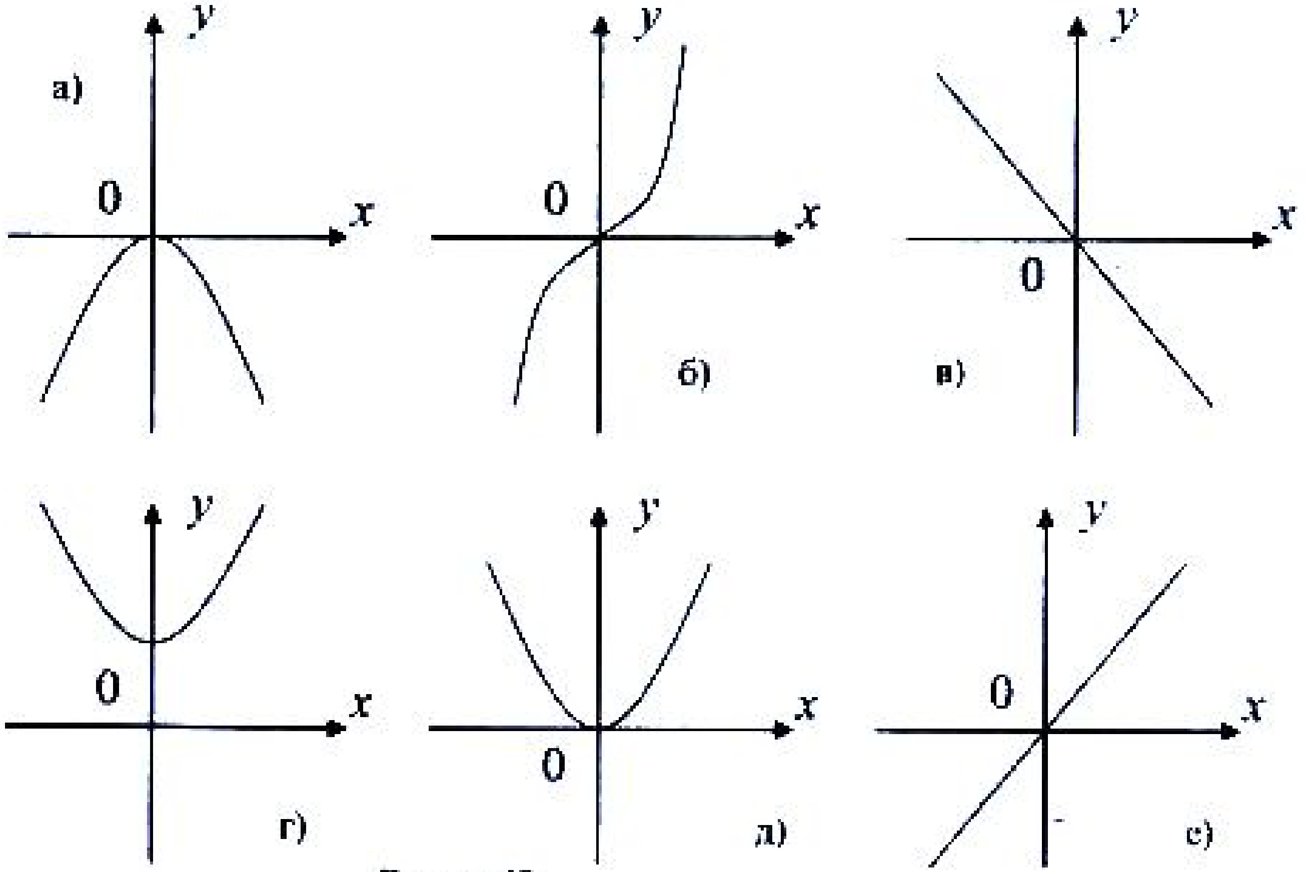
в) $f(x) = \cos(2x-1)$; г) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ бошанд.

91. Нобарбарии $f'(x) < 0$ -ро ҳал намоед, агар:

а) $f(x) = x - x^2$; б) $f(x) = 2x + x^2 - 7$;

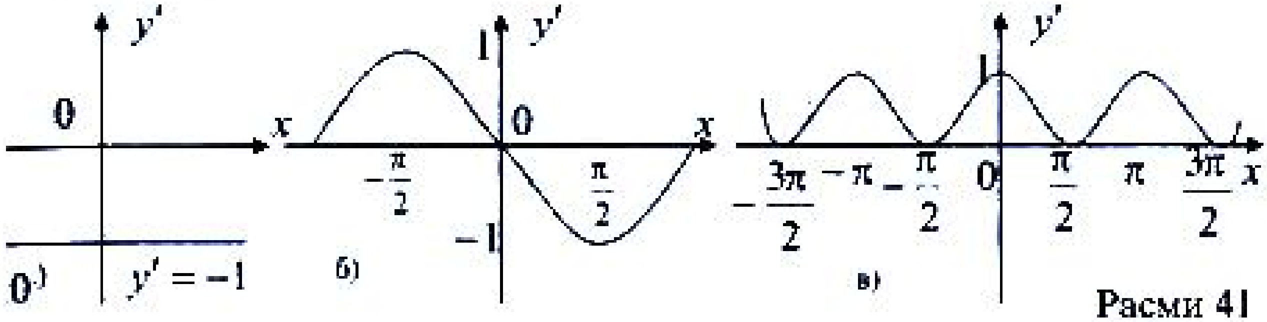
в) $f(x) = \dfrac{3}{5}x^5 - 3x$; г) $f(x) = 3x^2 + 5x - 6$ бошанд.

92. Дар расми 40 графики функсияҳо ва графики ҳосилаҳои онҳо тасвир ёфтаанд. Ёбед, ки кадом ҷуфт функсия ва ҳосилаи онро муайян мекунад



Расми 40

93. Аз рӯи графики ҳосилаҳо функсияҳоро муқаррар кунед (расми 41):



Расми 41

§ 12. Мафҳуми ҳосилаи тартиби олӣ

Фарз мекунем, ки функсияи $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ дода шудааст. Ҳосилаи онро меёбем: $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$. Одатан, инро **ҳосилаи тартиби як** меноманд. Ҳосилаи $f'(x)$ дар навбати худ функсияе ҳаст, ки ҳосила дорад. Онро бо $y'' = f''(x)$ («эф ду штрих аз икс» мехонем) ишорат карда, **ҳосилаи тартиби дуюми** функсияи $y = f(x)$ меномем:

$$(f'(x))' = f''(x) = 6x - 10$$

Аз ҳосилаи тартиби дуюм боз ҳосила мегирем; онро **ҳосилаи тартиби се** мегӯянд:

$$(f''(x))' = f'''(x) = 6$$

Ҳамин тавр, ҳосилаҳои тартиби чорум, панҷум ва ғ. ёфта мешаванд, ки ба сифр баробаранд. ҳосилаҳои тартиби ихтиёрии функсияи $y = f(x)$ монанди мисоли боло ёфта мешаванд. Чунончӣ: $y' = f'(x)$, $y'' = (y')' = (f'(x))' = f''(x)$,

$$y''' = (y'')' = (f''(x))' = f'''(x), \ldots, y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x)$$

Мисолҳо.

1. Ҳосилаи тартиби чоруми функсияи $y = \cos x$-ро ёбед.

Ҳ а л. $y = \cos x$; $y' = (\cos x)' = -\sin x$; $y'' = (-\sin x)' = -\cos x$;

$$y''' = (-\cos x)' = \sin x; \quad y^{IV} = (\sin x)' = \cos x$$

2. Ҳосилаи тартиби 2-юми функсияи $y = \dfrac{x}{x-2}$ -ро ёбед.

Ҳ а л. $y' = \dfrac{x' \cdot (x-2) - (x-2)' \cdot x}{(x-2)^2} = \dfrac{x-2-x}{(x-2)^2} = -\dfrac{2}{(x-2)^2};$

$$y'' = \left(-\frac{2}{(x-2)^2}\right)' = -\frac{2' \cdot (x-2)^2 - 2\left[(x-2)^2\right]'}{\left[(x-2)^2\right]^2} = \frac{4(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4}{(x-2)^3}.$$

Ҳосилаи тартиби дуюм аҳамияти муҳими амалӣ дорад.

Фарз мекунем, ки $S = f(t)$ қонуни ҳаракати ягон нуқтаи материалӣ бошад. Маълум аст, ки ҳосилаи тартиби якум $f'(t)$ суръати ҳаракати нуқтаро муайян мекунад:

$$v = s'(t) = f'(t)$$

Ба Ниютон пайравӣ карда, баъзан навишти $v = \dot{s}$ («эс болояш нуқта» мехонанд)-ро истифода мебаранд.

Суръати нуқта вобаста ба тағйирёбии вақт низ тағйир ёфта меистад. Агар дар фосилаи $[t; t + \Delta t]$ суръат ба Δv афзоиш ёбад, онгоҳ нисбати $a_{миёна} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ шитоби миёна ном дорад. Ҳангоми $\Delta t \to 0$, шитоби миёна ба ҳудуде майл мекунад, ки он шитоби нуқтаро дар лаҳзаи t ифода мекунад, яъне

$$\text{агар } \Delta t \to 0, \text{ онгоҳ } \frac{\Delta v}{\Delta t} \to a$$

Ба ҳамин тариқ, **суръати тағйирёбии суръат шитобро** ташкил медиҳад:

$$a = v' = s''(t) = f''(t)$$

Дар физика бештар ишораи $a = \dot{v} = \ddot{s}$ истифода бурда мешавад.

Омӯзиши шитоб дар механика аз он сабаб муҳим аст, ки он бо қонуни Ниютон ва дигар бузургиҳои механикӣ зич алоқаманд мебошад:

Қувва $F = ma = m\dot{v}$ (m-масса); импулс $p = mv = m\dot{s}$

2 Қонуни лапиши гармоникӣ бо формулаи

$$S = A\sin(\omega t + \alpha)$$

дода шудааст. Суръат, шитоб ва қуввае, ки дар ин ҳаракат ба нуқта таъсир мерасонанд, муайян кунед.

Ҳ а л. Функсияи $S = A\sin(\omega t + \alpha)$ -функсияи мураккаб аст.

$$v = S' = (A\sin(\omega t + \alpha))' = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

Шитоб бошад:

$$a = v' = s'' = (A\omega\cos(\omega t + \alpha))' = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha) = -A\omega^2 s.$$

Қувваеро, ки ба нуқта таъсир мекунад аз рӯи қонуни Ниютон меёбем:

$$F = ma = m\dot{v} = -mA\omega^2 s.$$

?

1. Дар зери мафҳуми ҳосилаи тартиби олӣ чиро мефаҳмед?
2. Моҳияти ҳосилаи тартиби дуюмро шарҳ диҳед.
3. Ҳосилаи тартиби чорум ва панҷуми функсияи $y = f(x)$ чӣ тавр навишта мешаванд? ҳосилаи тартиби $n - ум$ чӣ?

Машқҳо

94. Чор ҳосилаи пайдарпаи функсияро ёбед:

$y = x^5 + 9x^3 - 11x^2 + 2x - 3$

95. Панҷ ҳосилаи пайдарпаи функсияи $y = \cos x$ -ро ёбед.

Қиматҳои онҳоро ҳангоми ч $= 0$ ва $x\frac{\pi}{2}$ ҳисоб кунед.

Ҳосилаҳои тартиби дуюм функсияҳои зеринро муайян кунед ($96^{\circ} - 98$):

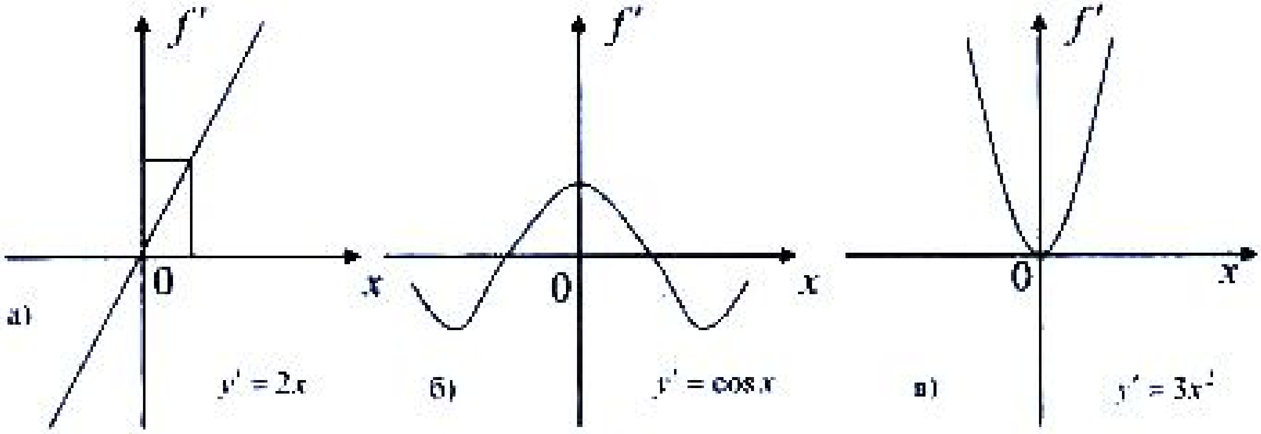
96°. а) $y = \sin^2 x$; б) $y = x + \frac{1}{x}$; в) $y = -3x^2 + x + 1$;

97. а) $y = x^2 \sin x$; б) $y = x\cdot(x+1)^3$; в) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

98. а) $y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+2x-3$; б) $y=x\sin x+\cos x$;

99. Ҷисм бо суръати $y=5t^2-2t+2\left(\frac{м}{с}\right)$ ҳаракат мекунад. Суръати онро дар лаҳзае, ки шитоб баробари сифр аст, маълум кунед.

100. Дар расми 42 графики ҳосилаҳои тартиби якуми функсияҳо тасвир ёфтаанд, графики ҳосилаҳои тартиби дуюми онҳоро созед:



Расми 42

Аз таърихи пайдоиши ҳосила ва рамзҳои он

Маълумотномаҳои таърихӣ гувоҳи медиҳанд, ки баъзе масъалаҳои ба амали дифференсиалӣ марбутро олимони Юнони қадим ҳал карда метавонистанд. Масалан, Евклид бо тарзи геометрӣ исбот мекунад, ки «аз ҳамаи параллелограмҳои дарункашидашудаи секунҷаи дода шуда ҳамонаш дорои масоҳати калонтарин аст, ки агар асоси он ба нисфи асоси секунҷа баробар бошад». Ҳамин гуна масъалаҳоро Архимед низ ҳал кардааст. Ӯ тарзи гузаронидани расанда ба спиралро муайян кард, ки он дар дигар хатҳои каҷ (эллипс, гипербола, парабола) татбиқи худро ёфт. Мафҳуми асосии амали дифференсиронӣ-мафҳуми ҳосиларо дар асри XVII зарурияти ҳал кардани ду масъала: муайян кардани суръати ҳаракати ростхатта ва сохтани расанда ба хати каҷи ихтиёрӣ ба вуҷуд овард. Тазаккур бояд дод, ки дар ибтидои асри XVII моҳияти онро на ҳамаи донишмандон дарк карда буданд. Ҳатто физики барҷастаи англис Келвин хитоб мекунад:

«Гапи беҳуда, ки суръат - ҳосила аст».

Чаро дар ибтидо ба фикру андешаи Ниютон беаҳамиятӣ зоҳир карданд? Ӯро то ба охир нафаҳмиданд? Инкишофи илм ва пешравии ҳаёт дар натиҷаи ҷидду ҷаҳди аввалин фатҳкунандагони он имконпазир мегардад. Бо гузашти айём, вақте фаро мерасад, ки мақсади дури нахусткашфкунандагон ба ҳама фаҳмо ва дастрас мегардад. Ин андеша ба кашфи ҳосила низ тааллуқ дорад.

Ҳалли масъалаҳои механика Ниютонро ба мафҳуми ҳосила овард. Ӯ соли 1671 ба ин мафҳум **флюксия** (лотинӣ-ҷоришавӣ) ном гузошт ва онҳоро бо ҳарфҳои болояшон нуқтанок $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$ ишорат мекард.

Дар тӯли асрҳои XV-XVII математкҳо дар ҷустуҷӯи ёфтани методи умумии сохтани расанда дар нуқтаҳои дилхоҳи хати каҷ буданд. Олимони кишварҳои гуногун, аз он ҷумла итолиёвӣ Торричелли Э. (1608-1647), фаронсавӣ Ж. Роберваль (1602-1675), англис И Барроу (1630-1677) ва дигарон кӯшиш намудаанд, ки ин масъаларо бо тарзи кинематикӣ ҳал кунанд. Аввалин тарзи умумии сохтани расанда ба хатҳои каҷи алгебравиро олимони фаронсавӣ С. Декарт (1569-1650) дар китоби «Геометрия» (1637) ва баъдтар П. Ферма (1601-1665) баён кардаанд.

Ба натиҷаҳои Ферма ва дигар пешгузаштагон такя карда, олими олмонӣ Г. Лейбнитс (1646-1716) соли 1684 рисолаи «Методи нави максимумҳо ва минимумҳо»-ро дар ҳаҷми шаш саҳифа нашр кард. Дар он мафҳумҳои асосӣ, алгоритм (қоидаҳо)-и ҳосилагирии сумма, фарқ, ҳосили зарб, дараҷа, тақсим, реша, муайян кардани экстремумҳо ва ғайраҳо баён ёфта, аломатҳои dx, dy, d^2x ва дигарҳо ворид гаштаанд. Барои Лейбнитс мафҳуми асосӣ на ҳосила, балки дифференсиал буд. Дар миёнаи асри XVIII барои афзоиши тағйирёбандаҳо Эйлер ҳарфи юнонӣ Δ-ро истифода кард, ки то ҳанӯз онҳоро истифода мебарем, яъне $\Delta y=y_2-y_1$, $\Delta x=x_2-x_1$. Аломатҳои y', $f'(x)$-ро барои ҳосила олими фаронсавӣ Ж. Лагранж (1736-1813) дохил кардааст. Истилоҳи «ҳосила» аввалин маротиба дар китоби математики фаронсавӣ Луи Арбогаст (1759-1803)

«Ҳисоббарории ҳосилаҳо» (1800) дучор меояд.

Акнун ба суоли он ки, чаро дар ибтидо асосгузорони асосҳои анализ Ниютону Лейбнитсро нафаҳмиданд, посӯх медиҳем. Душвории асосӣ аз он иборат буд, ки онҳо дар истифодаи рамзҳо ақидаи қатъӣ ва ягона надоштанд. Масалан Лейбнитс ҳудуди $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$-ро бо $\frac{dy}{dx}$ ифода карда, рамзи фаркро ба рамзи дифференсиал иваз намудааст. Ва ҳудуди ин нисбат ҳамчун як навъ адади нав, ки он аз сифр фарқ карда, аз дилхоҳ адади ҳақиқӣ хурд аст, дида баромада мешуд. Агар ба рамзи d-ҳамчун **нишондод** ба зарурияти гузариши ҳудуди ҳангоми $\Delta x \to 0$, бояд $\Delta y \to 0$ назар афканем, онгоҳ ин душвориҳо аз байн бардошта мешавад. Дар он сурат лозим аст, ки то ба ҳудуд гузаштан дар нисбати $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ сурат ва махрачро ба Δx ихтисор кунем ё ин ки нисбатро тавре табдил диҳем, ки гузариши ҳудудӣ бе душворӣ ба амал ояд.

Аз замони Коши О. (1789-1857), ки аввалин бор таърифи ҳосиларо ҳамчун лимити нисбати афзоиши функсия Δy бар афзоиши аргумент Δx ҳангоми $\Delta x \to 0$ баён кард, мафҳуми ҳосила ба асоси ҳисоббарориҳои дифференсиалӣ табдил ёфт.

Худро санҷед **!**

Кадом функсияҳо намерасанд?

Ба ин функсияҳо бо диққат назар афканед. Онҳо аз рӯи муносибати муайян байни худ алоқамандаанд. Шумо ин муносибатро дар чӣ мебинед?

$5x^2 - 3x$	$10x - 3$	10
$\sin^2 x$	$\sin 2x$	$2\cos 2x$
$x\cos x$	?	?

Кори амалии № 4

Мақсади кор: омӯхтани маънои механикӣ ва геометрии ҳосила.

Варианти 1.

Дар расми 43 графики вобастагии ҳаракат аз вақт нишон дода шудааст. Аз рӯи график ба саволҳои зерин ҷавоб диҳед:

1) координатаҳои ибтидоии ҳаракат ба чӣ баробар аст?

2) суръати миёнаи ҳаракат дар фосилаи $[1;1+\Delta t]$ чӣ қадар аст, агар **а)** $\Delta t = 1$; **б)** $\Delta t = 1{,}7$ ва **в)** $\Delta t = 4$ бошад.

3) дар кадом нуқта суръати ҳаракат ба сифр баробар аст?

4) ҳангоми $t = 2$ суръати лаҳзагӣ ба чӣ баробар аст?

5) суръати ҳаракат дар кадом лаҳзаи вақт калонтар аст?

6) графики тахминии суръатро кашед.

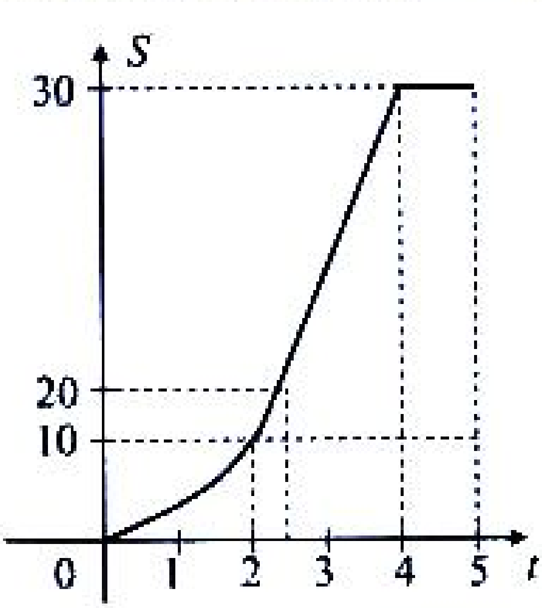
Варианти 2.

Дар дафтаратон графики функсияро, ки дар расми 44 тасвир ёфтааст, кашед.

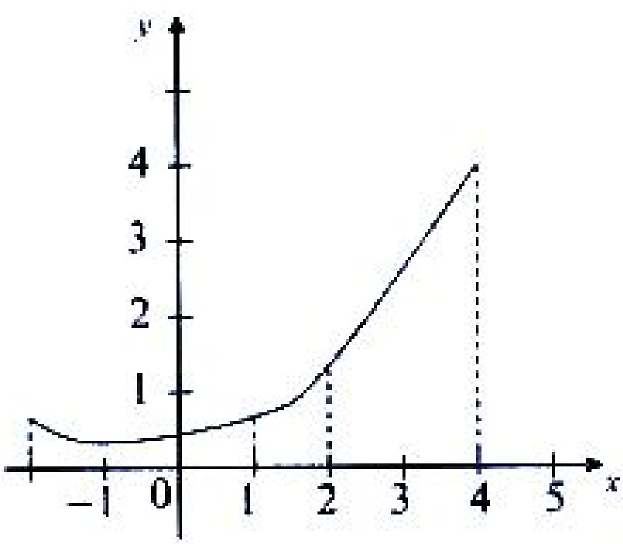
а) Нуқтаҳои – 1, 2 ва 4-ро қайд намуда ба онҳо расанда гузаронед ва коэффитсиентҳои кунҷии онҳоро тақрибӣ ҳисоб кунед;

б) Дар кадом нуқтаҳо расанда ба тири Ox параллел аст? Роҷеъ ба тағйирёбии суръати функсия дар ин нуқтаҳо чӣ гуфтан мумкин аст?

в) Дар кадом нуқта расанда нисбатан рост воқеъ аст? Оид ба тағйирёбии суръати функсия дар ин нуқта чӣ гуфта метавонед?



Расми 43



Расми 44

г) Нуқтаеро ёбед, ки дар он расанда ба тири Ox кунҷи 45°-ро ташкил медиҳад?

д) Дар кадом нуқтаҳо коэффитсиенти кунҷии расанда манфӣ аст?

е) Графики тахминии тағйирёбии коэффитсиенти кунҷии расандаро кашед.

Ox кунҷи 45°-ро ташкил медиҳад?

д) Дар кадом нуқтаҳо коэффитсиенти кунҷии расанда манфӣ аст?

е) Графики тахминии тағйирёбии коэффитсиенти кунҷии расандаро кашед.

Супоришии мустақилона доир ба боби IV

Варианти 1°

1. Муодилаи расанда ба графики функсияи $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2$ дар нуқтаи $x_0=3$ ёфта шавад.

2. Ҳудудҳои зеринро ёбед:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^3-3}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$.

3. Бефосилагии функсияи $y=x^2+x+3$-ро дар нуқтаи $x=1$ нишон диҳед.

4. Ҳосилаи тартиби 3-юми функсияи $y=\sin x^2 5x$-ро ёбед.

Варианти 2.

1. Муодилаи расанда ба графики функсияи $y(x)=\sqrt{2x+5}$ дар нуқтаи $x_0=2$ ёфта шавад.

2. Ҳудудҳои зеринро ёбед:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-1}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{2x-1}$.

3. Ба бефосилагӣ тадқиқ кунед:

а) $y=4x+5$; б) $y=\frac{|x|}{x}$; в) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$.

4. Ҳосилаи тартиби 4-уми функсияи $y=\cos^2 5x$-ро ёбед.

Варианти 3*.

1. Дар графики функсияи $y=(x^2+1)(x-1)$ нуқтаеро ёбед, ки дар он расанда ба хати рости $y=2x+1$ параллел бошад.

2. Ҳудудҳои зеринро ёбед:

$$а)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2};\qquad б)\ \lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3};\qquad в)\ \lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}.$$

3. Нукта аз рӯи конуни $x(t)=2t(t-5)$ ростхата ҳаракат мекунад. Баъди чанд вакт суръати нукта ба 2 м/с баробар мешавад.

4. Ҳосилаи тартиби дуюми функсияи $y=(x+1)^2\sin 2x$ -ро ёбед.

МАШҚҲОИ ИЛОВА ОИД БА БОБИ IV

Ба параграфи 1

101. Функсияҳои 1) $y=\sqrt{2x}$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$ дода шудааст.

Афзоиши Δy -ро ҳангоми $x=1$, $\Delta x=0{,}2$ ёбед.

102. Агар а) $y=5-3x$; б) $y=2\sqrt{x}$; в) $y=3x^2$; г) $y=2x-2^2$ бошад, афзоиши функсияро дар нуқтаи x_0 ба воситаи x_0 ва Δx ифода кунед.

Ба параграфи 2

103. Суръати миёнаи тағйирёбии функсияи $y=2x^2+5x$ -ро ҳангоми тағйирёбии x аз x_1=2 то x_1=3 ёбед.

104. Ҳаракати ростхатаи нуқта бо муодилаи $y=2x^2-8x-10$ (x - бо сонияҳо, y- бо метрҳо) дода шудааст. Суръати нуқтаро дар лаҳзаи вақти $x=8c$ ёбед.

Ба параграфи 3

105. Коэффитсиенти кунҷии байни расанда ба графики функсияи $y=f(x)$ -ро дар нуқтаи абсиссааш x_0 ва тири Ox_0 ёбед.

$$а)\ y=x^2+x+1;\quad x_0=1;\qquad б)\ y=x+\frac{1}{x+1},\quad x_0=0$$

106. Нуқтаҳоеро ёбед, ки дар онҳо расанда ба хатҳои качи $y=x^3-x-1$ ва $y=3x^2-4x+1$ параллеланд. Муодилаи расандаро ба ин хатҳои кач нависед.

Ба параграфи 4

107. Мувофиқи таъриф ҳосилаи функсияҳои зеринро ёбед:

1) $y = 3x - 4$; 2) $y = 5 - 3x$; 3) $y = x^2 - 3x$; 4) $y = x^3 - 2$.

108. Функсияи $y = x^2 - 5x$ дода шудааст. Ёбед:

1) $y'(3)$; 2) $y'(4)$; 3) $y'(-1)$.

Ба параграфи 5

109. Ҳудудҳои зеринро ёбед:

1) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \left(-x^3 + 9x^2 + x - 1\right)$; 2) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{(x-4)(x+3)}{x^2 + 2x - 3}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2 - 8x + 4}{8 - 14x + 5x^2}$; 4) $\lim\limits_{x \to 9} \frac{9 - x}{3 - \sqrt{x}}$;

5) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$; 6) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$; 7) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$.

Ба параграфҳои 6 - 12

110. Ҳосилаи функсияҳои зеринро ёбед.

1) $y = \frac{3 + 4x}{2 - 5x}$; 2) $y = \frac{\sqrt{x}}{2x + 1}$; 3) $y = \frac{3\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$;

4) $y = \left(x^3 - 2x^2 + 5\right)$; 5) $y = \left(x^3 - 1\right)^3$; 6) $y = \sqrt{x^3 - 2x}$;

7) $y = (2x + 1)^2$; 8) $y = \frac{1 + 2x}{\sqrt{1 - 2x}}$; 9) $y = \left(\frac{a + x}{a - x}\right)^{10}$.

111. Ҳосилаи функсияҳои тригонометриро ёбед:

1) $y = \sin^3 x$; 2) $y = \sin x^3$; 3) $y = \sqrt[3]{\sin x}$.

4) $y = \cos\sqrt{x}$; 5) $y = \sqrt[5]{\cos\sqrt{3x}}$; 6) $y = \cos^2 \sqrt[3]{x - 2}$.

112. Ҳосилаи тартиби дуюми машқи 111-ро ёбед.

БОБИ V. ТАТБИҚИ ҲОСИЛА

Мо дар боби IV ба мафҳуми ҳосила, қоидаҳои ҳисоб намудани он ва алоқамандии функсия ба хосиятҳои ҳосила шинос шудем. Ҳисоб кардани суръати ҳаракати ҷисм ва гузаронидани расанда ба хати каҷ – татбиқи мафҳуми ҳосила ба шумор меравад. Истифодаи он дар тадқиқи функсия бошад матлаби асосии омӯзиш қарор дорад.

Бо вуҷуди ин, соҳаи омӯзиши ҳосила хеле васеъ аст ва он дар ҳалли масъалаҳои гуногун, ки гузориши онҳо ба тадқиқи функсия ҳеҷ вобастагие надорад, истифода бурда мешавад.

Акнун татбиқи минбаъдаи ҳосиларо дар масъалаҳое, ки аз соҳаи гуногуни илму техника гирифта шудаанд, нишон дода, ба фосилаҳои монотонии функсияҳо, экстремумҳо, созиши графики функсия бо ёрии ҳосила, алоқаи он бо мафҳуми дифференсиал, ки манбаи ҳисоби тақрибӣ аст, шинос мешавем.

§ 1. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсия

Барои тадқиқи тағйирёбии функсия лозим аст, ки фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии он аниқ карда шавад. Дар ин маврид ба чӣ бояд такя кард? Албатта ба **нишонаҳое, ки онҳо зоҳиршавии функсияро маълум мекунанд.**

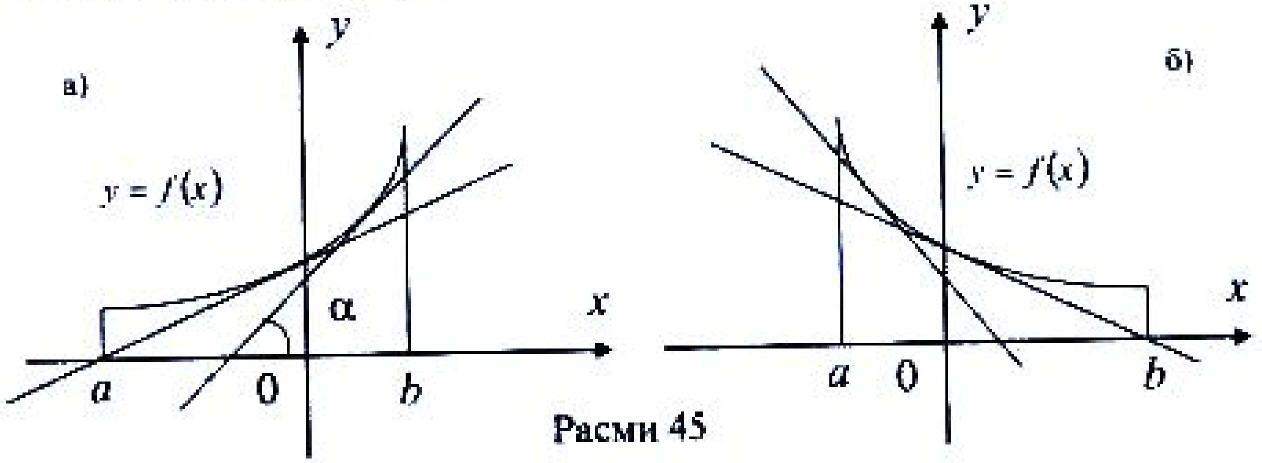
Дар § 6, боби IV исбот кардем, ки ҳосилаи адади доимӣ ба сифр баробар аст. Ин далелро ба сифати **нишонаи доимии** функсия (ҳамчун теорема) қабул мекунем.

(!) ***Теорема*** **(нишонаи доимии функсия). Агар дар ягон фосила функсия доимӣ бошад, онгоҳ дар ин фосила ҳосилаи он ба сифр баробар аст.**

Моҳияти механикии ин нишона дар чист? Ҳосила суръат аст. Азбаски суръати нуқта баробари сифр аст, пас нуқта ором мебошад. Агар ҳосила ҳама вақт баробари сифр бошад, он гоҳ нуқта муттасил ҳаракат надорад.

(!) ***Теорема*** **(нишонаи монотонии функсия). Фосилаҳои монотонии функсия бо ҳосилаҳои аломати доимии функсия мувофиқ аст.**

Исботи қатъии теоремаро наоварда, алоқамандии фосилаҳои монотонӣ ва аломати ҳосиларо бо тасвирҳои геометрӣ шарҳ медиҳем.



Расми 45

Ҳосила ба тангенси кунҷе, ки расанда ба графики функсия бо тири Ox ташкил медиҳад, баробар аст. Пас, агар $tg\alpha = f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ бошад, онгоҳ расанда ба графики функсия дар ҳамаи нуқтаҳои фосилаи $[a;b]$ кунҷи тез (кунд)-ро ташкил медиҳад. Ин чунин маъно дорад, ки графики функсия $f(x)$ дар ин фосила боло мебарояд, яъне функсия меафзояд (расми 45, а) ва хати каҷ поён мефарояд, яъне функсия кам мешавад (расми 45, б).

Маънои механикии ин нишона дар он зоҳир меёбад, ки агар функсияи $y=f(x)$ ягон қонуни ҳаракати нуқтаро ифода кунад ва он дар фосилаи $[a;b]$ афзояд, он гоҳ суръати нуқта ба равиши мусбати ҳаракат аз рӯи тири Oy мувофиқ меояд, яъне суръати нуқта-ҳосилаи функсия мусбат аст. **Тасдиқи баръакс** он низ ҷой дорад: ҳосила-суръати нуқта мусбат бошад, нуқта ба равиши мусбат ҳаракат мекунад.

Айнан ҳамин тавр ҳолати камшавии функсия маънидод карда мешавад (шарҳ диҳед!).

Агар ба фосилаҳои монотонӣ фосилаҳои доимии функсияро ворид намоем, он гоҳ мегӯянд, ки функсия қатъӣ монотонӣ нест.

Дар натиҷа, тасдиқи ду аломати болоро мухтасар ин тавр навишта метавонем:

агар дар фосилаи $[a;b]$, $y = f(x) \nearrow \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$

агар дар фосилаи $[a;b]$, $y = f(x) \searrow \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$

Тирча $\nearrow$ нишон медиҳад, ки y меафзояд;

Тирча $\searrow$ нишон медиҳад, ки y кам мешавад.

Мисолҳо. Фосилаҳои монотонии функсияҳоро ёбед:

1) $f(x)=3x-6$; **2)** $y=x^4$; **3)** $y=3x^2-x^3$.

Ҳал. 1) f(ч) $= 3x - 6$. Соҳаи муайянии функсия -R.
Ҳосилаи функсияро меёбем: $f'(x)=3>0$. Ин чунин маъно дорад, ки функсия **дар тамоми соҳаи муайянӣ меафзояд.**

2) $y=x^4$; $y'=4x^3$. Нобаробарии $y'>0$, яъне $4x^3>0$-ро ҳал карда, фосилаи афзуншавиро меёбем: $x^3>0$ ё ки $x>0$. ҳалли нобаробарии $y'<0$, яъне $4x^3<0$ фосилаи камшавии функсияро муайян мекунад: $x^3<0$ ё ки $x<0$.

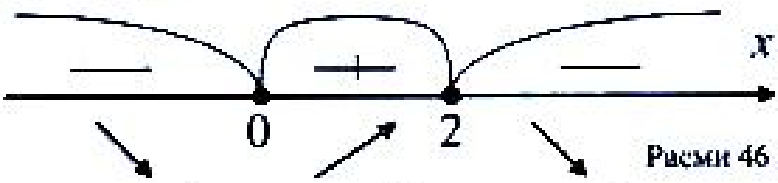
Ба фосилаҳои монотонии функсия нуқтаи $x=0$-ро ҳамроҳ карда метавонем, зеро он ба $D(f)$ дохил аст, яъне $x\geq 0$ фосилаи афзуншавӣ ва $x\leq 0$ фосилаи камшавии функсия низ ҳисоб мешаванд.

3) $y=3x^2-x^3$; $y'=6x-3x^2$.

Нобаробариҳои $6x-3x^2\geq 0$ ва $6x-3x^2\leq 0$-ро бо методи интервалҳо ҳал мекунем (расми 46).

$3x(2-x)\geq 0$ ва $3x(2-x)\leq 0$

Сифрҳои $f'(x)$: $x = 0$ ва $x = 2$.



Расми 46

Аз расм намоён аст, ки фосилаи афзуншавии функсия $0\leq x\leq 2$ ва фосилаҳои камшавии функсия $x\leq 0$ ва $x\geq 2$ мебошанд.

? 1. Ба ибораҳои асосӣ ва рамзҳое, ки дар матн дучор меоянд, эътибор диҳед: фосилаҳои афзуншавӣ, фосилаҳои камшавӣ, $\nearrow$, $\searrow$.

2. Нишонаи доимии функсияро шарҳ диҳед. Моҳияти механикии ин аломат дар чист?

3. Нишонаи монотонии функсияро баён кунед.

4. Шарти афзуншавӣ (камшави)-и функсияи $y=f(x)$ -ро дар фосилаи $[a;b]$ баён кунед.

Машқҳо

Фосилаҳои монотонии функсияро ёбед ($1^\circ - 4^*$):

1°. а) $y=\frac{x^2}{2}-3x$; б) $y=x^2-4x$;

в) $y=x^2+6x-4$; г) $y=3x-x^3$;

д) $y=1-x+x^2$; е) $y=x(5-x)$;

ё) $y=\frac{1}{x}$; ж) $y=\frac{x}{1-4x}$.

2. а) $y=x^3-3x^2-9x$; б) $y=x^3+3x+1$;

в) $y=x^4+4x-6$; г) $y=\frac{3x-1}{1-4x}$;

д) $y=x^3+5x-6$; е) $y=x^3-3x^2+7$;

ё) $y=x^{-2}$; ж) $y=x+\sqrt{x}$.

3. а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+2$; б) $y=x\sqrt{3-x}$;

в) $y=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$; г) $y=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

4*. а) $y=(x-2)(x+1)(x-3)$; б) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$;

в) $y=x^4(x-12)^2$; г) $y=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$.

§ 2. Экстремумҳои функсия

Барои ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $y = f(x)$ мо пеш аз ҳама бояд ҳосилаи он – $f'(x)$-ро муайян карда тавонем ва баъд ҳамон қиматҳои x-ро маълум намоем, ки дар онҳо $f'(x) = 0$ бошад.

(!) ***Теорема* (шарти зарурии экстремумҳои функсия). Дар нуқтаҳои экстремум ҳосилаи функсия ба сифр баробар аст.**

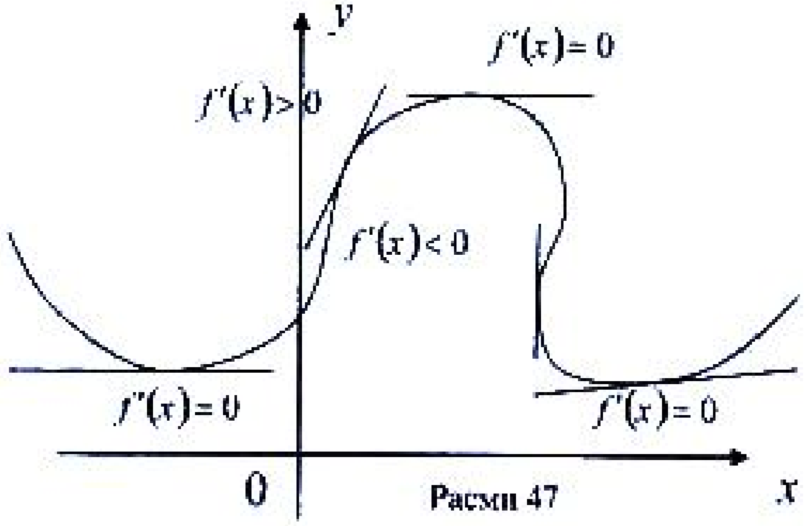
И с б о т. Фарз мекунем, ки функсияи бефосилаи $y = f(x)$ дар нуқтаи $x = x_0$ дорои экстремум буда, ҳосилаи он $f'(x_0)$ вуҷуд дорад. Дар атрофи x_0 -нуқтаҳои ҳамсояи наздиктарин $x_0 - \Delta x$ ва $x_0 + \Delta x$ ҷойгиранд.

Бигузор функсияи f дорои максимум бошад. Аз тарафи чапи он функсияи y меафзояд, яъне дар фосилаи $[x_0 - \Delta x; x_0]$, $f'(x) > 0$. Аз тарафи рости нуқтаи x_0 функсия кам мешавад, яъне дар фосилаи $[x_0; x_0 + \Delta x]$, $f'(x) < 0$.

Дар охир $f'(x)$ аз қиматҳои мусбат ба манфӣ гузашта наметавонад, то ин ки аз болои қимати 0 нагузарад. Аз ин рӯ, дар нуқтаи $x = x_0$ ҳосила бояд баробари сифр бошад, яъне $f'(x_0) = 0$.

Айнан ҳамин тавр, мавриди минимум доштани функсия нишон дода мешавад.

Графики ин чунин маъно дорад, ки расанда ба хати каҷ бо тири абсцисса параллел аст; кунҷи $\varphi = 0^\circ$ ва $y' = tg\varphi = 0$ (расми 47).

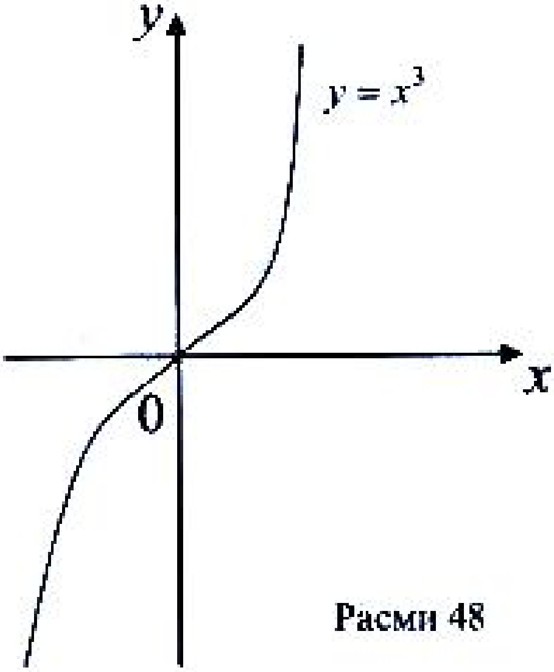


Расми 47

Теорема исбот шуд.

Чунин тарзи ёфтани максимум ва минимуми функсияро аввалин маротиба олими математики фаронсавӣ **Пер Ферма** (1601-1665) муайян карда буд. Бинобар ин, **онро теоремаи Ферма меноманд.**

Савол ба миён меояд: Оё тасдиқи баръакси теоремаи Ферма ҷой дорад, яъне агар $f'(x)=0$ бошад, функсия экстремум дошта метавонад? Тасдиқи баръаксӣ ҷой надорад. Чунончӣ, агар $f(x)=x^3$ бошад, онгоҳ $f'(0)=0$ мешавад. Вале нуқтаи $x=0$ нуқтаи экстремум ҳисоб намешавад, зеро функсияи $y=x^3$ дар ҳамаи соҳаи муайянӣ афзуншаванда аст (расми 48).



Расми 48

Таъриф. **Нуқтаҳое, ки дар онҳо ҳосилаи функсия ба сифр баробар аст ё вуҷуд надорад, нуқтаҳои критикӣ (таҳликӣ) ном доранд.**

Аз ин таъриф бармеояд, ки агар ҳосилаи функсия вуҷуд дошта, он ба сифр баробар нашавад, онгоҳ функсия экстремум надорад.

Мисол. Нишон медиҳем, ки функсияи $y=x^2$ дар фосилаи $[-1;1]$ дорои экстремум ва дар фосилаи $[1;2]$ экстремум надорад.

Ҳал. Ҳосилаи $y=x^2$ баробарӣ $y'=2x$ аст. Дар ибтидои координат $f'(0)=0$ мешавад. Пас, дар фосилаи $[-1;1]$, ки нуқтаи 0 ба ин фосила шомил аст, фукнсия экстремум (айни ҳол минимум) дорад. Гарчанде дар фосилаи $[1;2]$ ҳосилаи функсия вуҷуд дошта бошад ҳам, вале дар ягон нуқтаи ин фосила он ба сифр баробар намешавад. Пас, дар ин фосила функсия экстремум надорад **(нақшаро кашед!).**

Ин холат водор месозад, ки шарти кифоягии мавчудияти экстремум чустучӯ карда шавад.

Т е о р е м а (шарти кифоягии экстремумхои функсия). Агар x_0 - нуктаи критикии функсияи $y = f(x)$ буда, хангноми гузаштан аз ин нукта хосилаи он $f'(x)$:

1) аломаташро аз «+» ба «-» иваз кунад, функсия дорои максимум;

2) аломаташро аз «-» ба «+» иваз кунад, функсия дорои минимум;

3) аломаташро иваз накунад, функсия экстремум надорад.

И с б о т. Фарз мекунем, ки хосила аломаташро аз «+» ба «-» иваз кунад. Ин чунин маъно дорд, ки чаптари нуктаи $x = x_0$ функсия меафзояд, вале аз тарафи рости он функсия кам мешавад, яъне функсия аз афзуншавӣ ба камшавӣ мегузарад; дар ин нукта функсия экстремум дорад (расми 47).

Тасдики кисмхои дигари теорема айнан хамин тавр нишон дода мешавад (баён кунед!). Теорема исбот шуд.

Ин холатхоро ба назар гирифта, доир ба тадкики тағйирёбии функсия чадвали зеринро тартиб медихем (чадвали 10).

Чадвали 10

Холатхо	Аломати $f'(x)$ дар фосилаи		Функсия $y = f(x)$ дар нуктаи $x = x_0$
	$[x_0 - \Delta x; x_0]$	$[x_0; x_0 + \Delta x]$	
1	+	-	максимум дорад
2	-	+	минимум дорад
3	+	+	меафзояд, экстремум надорад
4	-	-	кам мешавад, экстремум надорад

М и с о л. Экстремуми функсияхоро ёбед:

1) $y = 3x - x^3$; **2)** $y = x^3$.

Х а л. 1) $y = 3x - x^3$; $D(f) = R$; 1. Хосилаи функсияро меёбем:

$$f'(x) = 3 - 3x^2$$

2. Шарти зарурии экстремумро месанчем, яъне нуктаҳои критикиро мееёбем:

$$3-3x^2=0,\ 3\left(1-x^2\right)=0,\ 3(1-x)(1+x)=0;\quad x_1=-1 \text{ ва } x_2=1$$

Дуто нуқтаи критикӣ доштааст. Ин нуқтаҳо $D(f)$-ро ба се фосилаи монотонӣ ҷудо мекунад: $(-\infty;-1]$, $[-1;1)$ ва $[1;+\infty)$.

3. Аломати ҳосиларо дар хар яке аз ин фосилаҳо маълум мекунем. Ба ин мақсад ба аргументи ҳосила ягон ададӣ фосиларо мегузорем. Аз фосилаи якум (- 2), аз дуюм – нуқаи 0 ва сеюм нуқтаи 4-ро гирифта мееёбем:

$y'(-2)=3-3\cdot(-2)^2=-9<0,$ (кам мешавад),

$y'(0)=3-3\cdot 0^2=3>0,$ (меафзояд),

$y'(4)=3-3\cdot 4^2=-45<0,$ (кам мешавад).

4. Шарти кифоягии экстремумҳои функсияро дида мебароем. Аз тарафи чапи нуктаи – 1 ҳосила манфӣ, вале аз тарафи рости он дар фосилаи $[-1;1]$ мусбат аст; яъне функсия дар ин нуқта аз камшавӣ ба афзудан мегузарад. Пас, нуқтаи $x=-1$ - нуқтаи минимум аст. Фаҳмост, ки нуктаи $x=1$ - нуқтаи максимум мебошад.

5. Қиматҳои минимум ва максимуми функсияро дар нуқтаҳои экстремалӣ ҳисоб мекунем:

$$y_{\min}(-1)=3\cdot(-1)-(-1)^3=-3+1=-2,$$

$$y_{\max}(1)=3\cdot 1-1^3=3-1=2.$$

2) $y=x^3;\quad D(f)=R.$

1. Ҳосилаи функсия: $y'=3x^2$.

2. Нуктаҳои критикӣ: $3x^2=0,\ x=0.$

3. Фосилаҳои монотонӣ: $(-\infty;0]$ ва $[0;+\infty)$.

4. Ивазшавии аломати ҳосила дар ин фосилаҳо:

дар фосилаи якум $y(-1)=3\cdot(-1)^2=3>0;$ (меафзояд);

дар фосилаи дуюм $x(1)=3\cdot 1^2=3>0$; (меафзояд).

Ҳосила аломаташро дигар накард, пас функсия экстремум надорад. Дар ҳарду фосила функсия меафзояд (нигар ба расми 48).

Экстремумҳои функсияро бо ёрии ҳосилаи тартиби ду низ муайян менамоянд. Далели зерин ҷой дорад.

Теорема. (шарти кифоягии мавҷудияти экстремум). **Бигузор дар нуқтаи** x_0, $f'(x_0)=0$ **ва** $f''(x_0)\neq 0$ **бошад.** **Функсияи** $y=f(x)$ дар нуктаи x_0:

а) **минимум дорад, агар** $f''(x_0)>0$,

б) **максимум дорад, агар** $f''(x_0)<0$ **бошад.**

Исбот. **а)** Барои муайянӣ, бигузор $f''(x_0)>0$ бошад, онгоҳ функсияи $f'(x)$ дар нуқтаи x_0 афзуншаванда ($f''(x)$ - ҳосилаи тартиби якуми функсияи $f'(x)$) аст, яъне дар атрофи $x_0-\delta<x_0<x_0+\delta$ нобаробарии $f'(x_0-\delta)<f'(x_0)<f'(x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ иҷрошаванда мебошад. Аммо $f'(x_0)=0$, бинобар ин

$$f'(x_0-\delta)<0<f'(x_0+\delta).$$

Ҳосилаи $f'(x)$ ҳангоми гузаштан аз нуктаи x_0 аломаташро аз «-» ба «+» иваз кард, яъне $f(x)$ дар нуқтаи $x=x_0$ дорои минимум аст. Ҳолати б) –ро мустақилона нишон диҳед.

Мисоли 1. Функсияи $y=x^3-10{,}5x^2+30x+15$ -ро ба экстремум тадқиқ кунед.

Ҳал. Ҳосилаи функсияро меёбем:

$$y'=\left(x^3-10{,}5x^2+30+15\right)'=3x^2-21x+30$$

Нуқтаҳои критикиро ҷустуҷӯ менамоем:

$$3x^2-21x+30=0, \quad x_1=2; \quad x_2=5.$$

Ҳосилаи тартиби дуюмро меёбем:

$y'' = \left(3x^2 - 21x + 30\right)' = 6x - 21$. Ба ҷои x дар $y'' = 6x - 21$ пай дар пай қиматҳои 2 ва 5-ро мегузорем:

$$y'' = (2) = 6 \cdot 2 - 21 = -9;$$

$$y''(5) = 6 \cdot 5 - 21 = 9.$$

Функсия дар нуқтаи $x = 2$ максимум ва дар нуқтаи $x = 5$ дорои минимум аст.

Мисоли 2. Функсияи $y = x^4$ - ро ба экстремум тадқиқ кунед.

Ҳал. $y' = \left(x^4\right)' = 4x^3, \quad 4x^3 = 0, \; x = 0;$

$$y'' = \left(4x^3\right)' = 12x^2.$$

Қимати $x = 0$ -ро гузорем $y''(0) = 0$ ҳосил мешавад. Бо ёрии ҳосилаи тартиби ду экстремумро ёфта натавонистем. Аз шарти кифоягии мавҷудияти экстремум бо ёрии ҳосилаи тартиби якум меёбем.

$$y'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4 < 0,$$

$$y'(1) = 4 \cdot 1^3 = 4 > 0.$$

Тағйирёбии аломати ҳосилаи тартиби якум дар атрофи $(-1;1)$ нишон медиҳад, ки ҳангоми $x=0$ функсия минимум дорад.

?

1. Ба ибораҳои асосии манбавии зерин, ки дар матн дучор меоянд, эътибор диҳед: **нуқтаҳои критикӣ, экстремумҳои функсия, қиматҳои экстремалӣ.**
2. Шарти зарурӣ ва кифоягии экстремумро баён кунед. Фарқияти баёни онҳо дар чист?
3. Агар функсия бефосила бошад оё вай ҳамеша ҳосила дошта метавонад? Асоснок намоед. Мисоле оред, ки дар нуқтаи $x = 0$; $f'(0)$ вуҷуд надорад.
4. Алгоритми ёфтани экстремумҳои функсияро баён кунед.
5. Чӣ гуна нуқтаҳоро нуқтаҳои критикӣ мегӯянд.
6. Фарқи байни нуқтаҳои экстремуми функсия ва экстремуми функсия дар чист?

Машқҳо

Экстремумҳои функсияҳои зеринро ёбед (5° – 8^{*}):

5°. а) $y = x^2 + 2x - 1$; б) $y = 3 + 8x - x^2$;

в) $y = 2x^2 - 3x$; г) $y = x^3 + 4x$;

д) $y = 5x - x^2 - 4$; е) $y = x^2 + x + 1$.

6. а) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12$; б) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$;

в) $y = 5 + 36x + 3x^2 + 4x^3$ г) $y = 3x^5 - 5x^3$;

д) $y = \frac{1}{x} + x$; е) $y = x + x\sqrt{x}$.

7. а) $y = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$; б) $y = x\sqrt{2-x}$;

в) $y = \frac{4x}{1+x^2}$; г) $y = \sin x - \cos x$;

д) $y = 9x^5 + 3x^3$; е) $y = \frac{2x}{1-x^2}$.

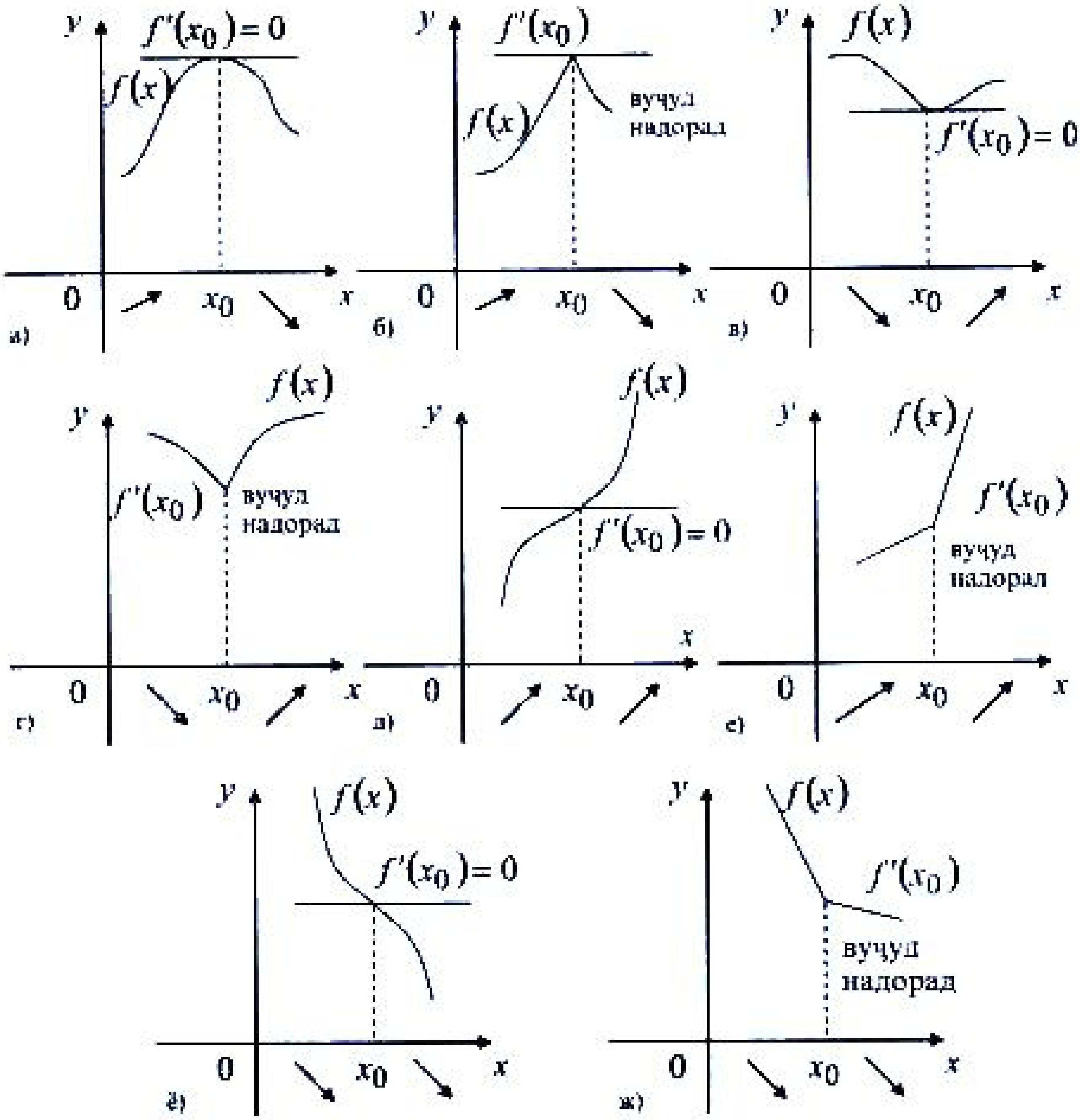
8*. а) $y = x + |x|$; б) $y = (x-1) + |x-1|$.

9. Дар расми 49 (а, б, в, г, д, е, ё, ж) чор ҳолати нуқтаи критикии функсия $x = x_0$ тасвир ёфтааст. Муайян кунед, ки шарти кифоягии экстремуми функсия чӣ тавр иҷро шудааст: а) функсия дар кадом ҳолат дорои максимум ва дар кадом ҳолат дорои минимум аст ва б) дар кадом маврид экстремум вуҷуд надорад.

10*. Маълум аст, ки қимати сеаъзогии квадратӣ $y = ax^2 + bx + c$ дар нуқтаи 8 ба 0 ва қимати хурдтарини он дар нуқтаи 6 ба – 12 баробар мешавад. Нуқтаи экстремуми функсияро ёбед ва муайян кунед, ки он максимум аст ё минимум.

Экстремуми функсияро ёбед ($11^{\circ} - 13^{*}$):

11°. а) $y = x(a - x)$; б) $y = x(a - 2x)$.



Расми 49

12. а) $y = x^2(a^2 - x^2)$; б) $y = \frac{a}{x} + x$.

13*. а) $y = x + \frac{1}{x - a}$; б) $y = x^3(a - x)$.

14. а) Ҳосилаи сеаъзогии квадратии $y = ax^2 + bx + c$ дар нуқтаҳои 0 ва 1 мувофиқан ба – 2 ва 0, вале қимати функсия дар нуқтаи 0 ва – 3 баробар мебошанд. Нуқтаи экстремум ва қимати экстремуми функсияро ёбед.

б) Аз рӯи ҳамин шартҳо функсияи кубии $y = ax^3 + bx + c$-ро тадқиқ кунед. Чандто экстремум дорад?

§ 3. Нуктаҳои махсус

Ҳангоми исботи теоремаҳои дар боло зикр гардида доир ба хосиятҳои функсия ва алоқамандии онҳо ба ҳосилаҳои функсияҳо мо ҳаминро ба назар гирифтем, ки дар ҳамаи соҳаи муайянӣ функсия дифференсиронидашаванда аст.

Функсияҳое вуҷуд доранд, ки онҳо дорои нуқтаҳои ғайриоддианд. Ва тадқиқи функсия дар атрофи ин нуқтаҳо муносибати хоссаро талаб мекунад.

Ин масъаларо бо ёрии ҳосила ҳал мекунем.

Мисолҳо. Экстремумҳои функсия ёфта шавад!

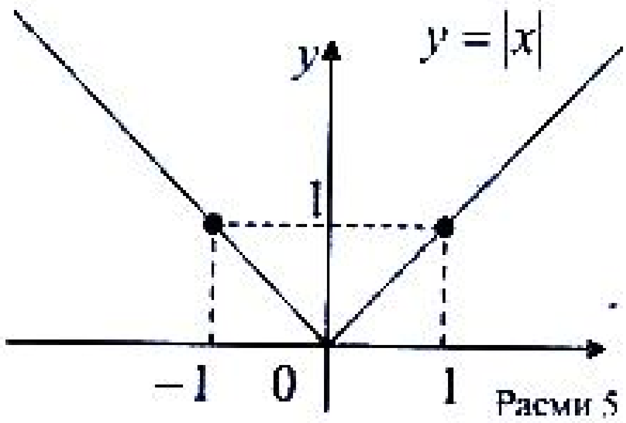
1. $y=|x|$

Ҳал. Функсия др нуқтаи $x=0$ бефосила аст, вале ҳосила надорад. Ингуна нуқтаро – **нуқтаи махсус** номидаанд. Ин ном ба он далолат мекунад, ки тағйирёбии функсия дар ин нуқта якранг нест; он дар вазъияти «хатарнок» қарор дорад. Дар ҳақиқат:

$$\text{ҳангоми } x>0,\quad y=x \quad \text{ва} \quad y'=+1,$$

$$\text{ҳангоми } x<0,\quad y=-x \quad \text{ва} \quad y'=-1.$$

Графики функсия дар нуқтаи $x=0$ ин ҳолатро мегирад (расми 50). Ва дар ин нуқта ба хати додашуда расандаи муайян мавҷуд нест. Бо вуҷуди он, ба ин функсия шарти зарурии экстремумро татбиқ карда метавонем. Нуқтаи $x=0$ - нуқтаи минимум аст.



Расми 5

Хулоса: **агар функсия дар ягон нуқта ҳосила дошта бошад, вай дар ин нуқта бефосила аст, вале аз бефосилагии функсия дар ягон нуқта ҳанӯз натиҷа баровардан мумкин нест, ки вай дар ин нуқта ҳатман дорои ҳосила мебошад.**

2. $y=\frac{1}{x}$; $D(f)$ - тамоми хати рост, ғайр аз $x=0$; $y'=-\frac{1}{x^2}$.

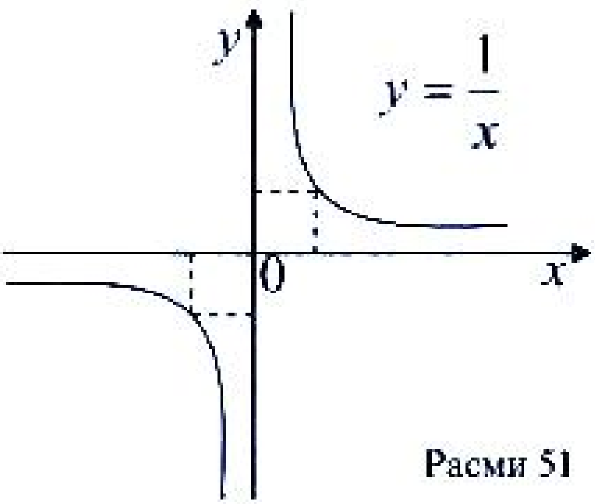
Дар нуқтаи $x=0$ ҳосила $f'(0)$ вуҷуд надорад, яъне дар ин нуқта функсия каниш дорад. Мавҷудияти **нуқтаи махсус** $x=0$ тадқиқи функсияро душвор мегардонад. Ин нуқта $D(f)$ - ро ба ду фосила $(-\infty;0)$ ва $(0;+\infty)$ ҷудо мекунад ва дар ҳар кадоми ин фосилаҳо аломати функсияро санҷида метавонем:

дар фосилаи $(-\infty;0)$, $y'(-1)=-\dfrac{1}{(-1)^2}=-1<0$ (кам мешавад),

дар фосилаи $(0;+\infty)$, $y'(1)=-\dfrac{1}{1^2}=-1<0$ (кам мешавад).

Пас, функсия экстремум надорад. Графики функсия дар расми 51 тасвир ёфтааст.

Аз ин мисолҳо маълум мешавад, ки дар тадқиқи функсия асосан ду навъи нуқтаҳо - нуқтаҳои статсионарӣ (барои муайян кардани фосилаҳои монотонӣ ва экстремумҳои функсия) ва нуқтаҳои махсус мавқеъи асосиро мебозидаанд.



Расми 51

Он гоҳ алгоритми ёфтани экстремумҳои функсия ба таври зайл ифода меёбад:

1. Ҳосилаи функсияро меёбем.
2. Нуқтаҳои критикии функсия $y=f(x)$-ро маълум намуда, фосилаҳои монотониро муайян мекунем; агар функсия нуқтаҳои каниш дошта бошад, онҳоро ҷудо мекунем.
3. Аломати ҳосиларо дар ҳар яке аз ин фосилаҳо маълум мекунем.
4. Аз рӯи аломати ҳосила ивазшавии аломати ҳосиларо муайян мекунем.
5. Дар ҳар як нуқтаи критикӣ, ки аз нуқтаҳои каниши функсия фарқ доранд, экстремумҳоро ҳисоб мекунем.

Мисол. Фосилаҳои монотонӣ ва экстремумҳои функсияро ёбед: 1) $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x$; 2) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Ҳал. 1) $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x$. Ин функсия бисёраъзогӣ аст. Соҳаи муайянии он ҳамаи тири ададӣ мебошад.

1) Ҳосиларо меёбем: $y' = 6x^2 - 18x - 24$;

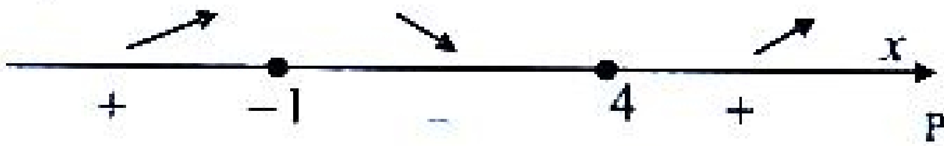
2) Муодилаи $y = 0$ -ро ҳал мекунем: $6x^2 - 18x - 24 = 0$, $x_1 = -1$ ва $x_2 = 4$.

Нуқтаҳои каниш надорад.

Ба хотир мегирем!

Алгоритми ёфтани нуқтаҳои критикии ҳаргуна бисёраъзогӣ аз ду банд иборат аст.

3) Дар тири ададӣ нуқтаҳои критикиро мегузорем. Бо методи интервалҳо аломати y'-ро дар ин фосилаҳо муайян мекунем (расми 52):



Расми 52

4) Фосилаҳои монотонии функсия: $(-\infty; -1]$, $[-1; 4]$ ва $[4; +\infty)$.

5) Дар нуқтаи $x = -1$ функсия максимум ва дар нуқтаи $x = 4$ - минимум дорад; онҳоро ҳисоб мекунем:

$$y_{\max}(-1) = 13; \qquad y_{\min}(4) = -112.$$

Ҷавоб. Функсия дар фосилаҳои $(-\infty; -1]$ ва $[4; +\infty)$ афзуда, дар фосилаи $[-1;4]$ кам мешавад; Экстремумҳои функсия:

$$y_{\max}(-1) = 13; \text{ ва } y_{\min}(4) = -112.$$

2) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

Ҳ а л. Функсия аз нисбати ду бисёраъзогӣ иборат аст.

Ҳосилаи он: $y' = \dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

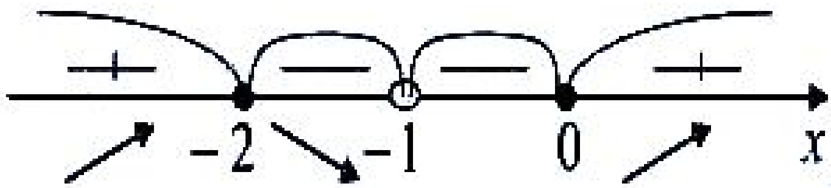
Нуқтаҳои критикӣ: $\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0, \quad x^2+2x=0,$

$$x(x+2)=0, \qquad x_1=-2, \qquad x=0.$$

Нуқтаи каниши функсия: $x+1=0$, $x=-1$.

Дар нуқта ин функсия ва ҳосилаи он номуайян аст.

Инак, функсия се нуқтаи критикӣ доштааст: $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=0$. Дар тири ададӣ ин нуқтаҳоро гузошта, нуқтаи каниш (- 1)-ро ҷудо мекунем. Ва бо методи интервалҳо аломати ҳосиларо дар ин фосилаҳо муайян мекунем (расми 53):



Расми 53

Фосилаҳои монотонии функсия: $(-\infty;-2]$, $[-2;-1)$, $(-1;0]$ ва $[0;+\infty)$.

Нуқтаҳои экстремуми функсия: $x=-2$ ва $x=0$.

Қиматҳои экстремиалӣ: $y_{max}(-2)=\dfrac{(-2)^2}{-2+1}=-4$; $y_{min}(0)=0$.

Ҷ а в о б р о бо тарзи рамзӣ ин тавр менависем:

$y \nearrow$	$(-\infty;-2]$ ва $[0;+\infty)$;
$y \searrow$	$[-2;-1)$ ва $(-1;0]$;
$y_{max}=-4$	ҳангоми $x=-2$;
$y_{min}=0$	ҳангоми $x=0$.

§ 4. Тартиби умумии тадқиқи функсия ва сохтани графики он бо ёрии ҳосила

Фарз мекунем, ки сохтани графики функсияи $y = x^5 - 5x^3 + 2{,}8x + 1$ лозим бошад. Мо одат кардаем, ки якчанд қиматҳои функсияи y-ро барои қиматҳои қулайи $x = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$ ҳисоб кунем:

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	3,4	2,2	1	-0,2	-1,4	...

Созиши ин нуқтаҳо дар системаи координат графики функсияро пурра тавсиф дода наметавонад. Зеро маълум нест, ки функсия дар фосилаҳое, ки онҳоро ин нуқтаҳо муайян мекунад, худро чӣ тавр зоҳир мекунад. Шояд онҳо то андозае тағйирёбии функсияро муайян кунанд?

Вале, ин матлабро мо танҳо бо ёрии ҳосила ҳал карда метавонем. Аз ин рӯ, барои сохтани графики функсия пешаки онро тадқиқ кардан лозим аст. Боз ба ҳамон тартиби пештараи тадқиқи функсия бармегардем.

Акнун, тартиби умумии тадқиқи функсияро ба тариқи зайл ба ҷо меорем:

1. Соҳаи муайянии функсияро аниқ мекунем. Барои бисёраъзоги $D(f)$ - ҳамаи хати рост, вале барои функсияҳои ратсионалӣ ҳамаи R ғайр аз нуқтаҳое, ки махраҷ ба сифр баробар мешавад, ҳисоб меёбад. Агар $D(f)$ - фосилаҳои тири ададӣ бошад, аз охирҳои онҳо гузаронидани хатҳои вертикалӣ ба мақсад мувофиқ аст. Агар баъзе нуқтаҳо ба $D(f)$ шомил набошанд онҳоро дар тири абсисса қайд карда, аз болои онҳо хатҳои вертикалӣ гузаронидан лозим аст.

2. Муодилаи $y = f(x) = 0$-ро ҳал карда, решаҳои функсияро маълум мекунем. Нуқтаҳои буриши тирҳои координатиро бо графики функсия меёбем. Онҳоро дар тири ададӣ қайд мекунем.

3. Ҷуфт ё тоқ будани функсияро маълум мекунем.

4. Даврӣ будани функсияро муайян мекунем.

5. Фосилаҳои монотонӣ ва нуқтаҳои экстремумро мувофиқи алгоритми баёнгардида муқаррар мекунем.

6. Қиматҳои функсияро дар нуқтаҳои экстремум ва дигар нуқтаҳои критикӣ ҳисоб намуда, онҳоро дар ҳамворӣ мегузорем.

Нуқтаҳои сарҳадӣ. Агар $D(f)$ аз як ё якчанд фосилаҳо иборат бошад, тағйирёбии функсияро дар наздикии сарҳади ин фосилаҳо тадқиқ мекунем. Дар ин маврид ҳолатҳои зерин ба вуқӯъ меоянд:

а) Дар нуқтаи $x = a$ функсия ба беохирӣ мубаддал мешавад (аксаран ҳангоми ёфтани решаҳои махраҷи функсияи ратсионалӣ рӯх медиҳад). Аз болои он хати вертикалӣ мегузаронем. Аломати функсияро аз тарафи чап ва рости нуқтаи $x = a$ муайян мекунем, то ин ки ба боло ва ё ба поён рафтани графики функсия дар атрофи ин нуқта муқаррар карда шавад.

б) Нуқтаи сарҳадӣ $x = a$ ба $D(f)$ дохил аст. Қимати функсияро дар ҳамин нуқта ҳисоб карда, онро қайд мекунем.

в) Ба соҳаи муайянии функсия ҳамаи тири ададӣ ё ин ки фосилаҳои намуди $(-\infty;a]$ ва $[a;+\infty)$ ворид аст. Дар ин маврид вазъияти функсияро ба беохирӣ, яъне ҳангоми $x \to -\infty$ ё ин ки $x \to +\infty$ бояд **тасаввур** карда тавонем.

Мувофиқи ин маълумотҳо графики ҳаргуна функсияро сохта тавонем.

Мисоли 1. Бармегардем ба функсияи $y = x^5 - 5x^3 + 2{,}8x + 1$. Графики онро месозем.

Ҳал. **Алгоритми тадқиқ** ва навишти мухтасари он.

1. Соҳаи муайянии функсия: $D(f) = (-\infty; +\infty)$-зеро ин бисёраъзогӣ аст.

2. Сифрҳои функсия: $x^5 - 5x^3 + 2{,}8x + 1 = 0$ ё ки $x^5 + 2{,}8x + 1 = 5x^3$. Санҷидан душвор нест, ки $x_1 \approx 1$ ва $x_2 \approx 2{,}1$ решаҳои муодила мебошанд. Онҳоро дар тири абссисса қайд мекунем.

3. Функсия на ҷуфт ва на тоқ аст:

$$f(-x) = (-x)^5 - 5(-x)^3 + 2{,}8(-x) + 1 = -\left(x^5 - 5x^3 + 2{,}8x - 1\right) \neq \pm f(x)$$

4. Даврӣ будани функсия. Функсия даврӣ нест.

5. Ҳосилаи функсия: $y' = 5x^4 - 15x^2 + 2{,}8$

6. Нуктаҳои критикӣ:

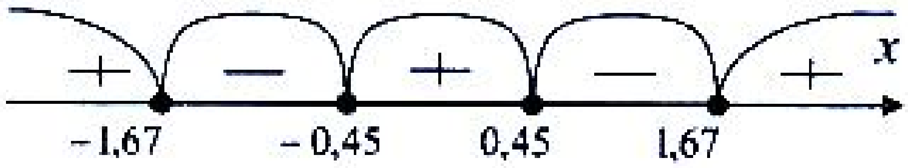
а) муайян мекунем, ки дар кадом нуктаҳо ҳосила вуҷуд надорад;

$f'(x)$ дар ҳамаи $D(f)$ вуҷуд дорад;

б) муодилаи $f'(x) = 0$-ро ҳал мекунем:

$5x^4 - 15x^2 + 2{,}8 = 0$ гузориши $x^2 = y$ ҳалли муодилаи биквадратиро медиҳад: $x_1 \approx -1{,}67$; $x_2 \approx -0{,}45$, $x_3 \approx 0{,}45$ ва $x_4 \approx 1{,}67$.

7. Нуктаҳои критикиро дар тири ададӣ қайд карда, аломати ҳосиларо дар ҳар яке аз ин фосилаҳо муайян мекунем (расми 54):



Расми 54

8. Фосилаҳои монотонии функсия (расми 55):

Расми 55

9. Нуктаҳои экстремум ва қиматҳои экстремалии функсия (ҳисоббарорӣ бо ёрии микрокалкулятор):

ҳангоми
$x \approx -1{,}67$, $y_{\max} \approx (-1{,}67)^5 - 5(-1{,}67)^3 + 2{,}8(-1{,}67) + 1 \approx 6{,}6$;

ҳангоми
$x \approx -0{,}45$, $y_{\min} \approx (-0{,}45)^5 - 5(-0{,}45)^3 + 2{,}8(-0{,}45) + 1 \approx 0{,}2$;

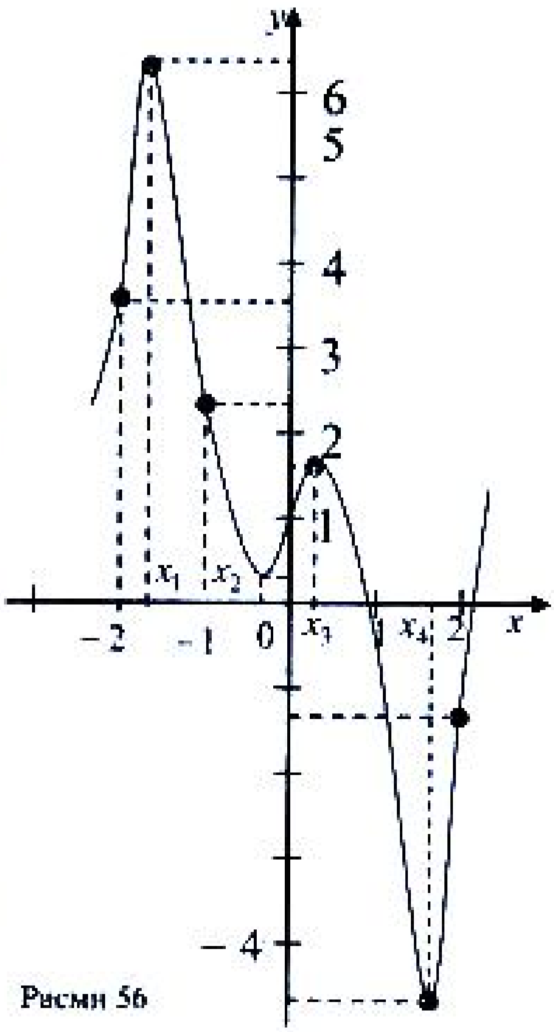
ҳангоми $x \approx 0{,}45$, $y_{\max} \approx (0{,}45)^5 - 5(0{,}45)^3 + 2{,}8(0{,}45) + 1 \approx 1{,}8$;

ҳангоми $x \approx 1{,}67$, $y_{\max} \approx (1{,}67)^5 - 5(1{,}67)^3 + 2{,}8(1{,}67) + \approx -4{,}6$.

10. Вазъияти функсия дар беохирӣ: а) агар $x \to -\infty$, он гоҳ $y \to -\infty$, б) агар $x \to +\infty$, он гоҳ $y \to +\infty$. Ғайр аз ин ба эътибор мегирем, ки графики функсия аз нуқтаи (0; 1) мегузарад.

Графики функсияро месозем (расми 56).

Агар панҷ нуқтаи дар боло қайд гардида: (–2;3,4), (–1;2,2), (0;1), (1;–0,2) ва (2;–1,4) -ро дар график ҷой диҳем (қайд кунед!), мебинем, ки онҳо дар як хати рост мехобанд ва дар ин нуқтаҳо рафтори функсия тағйир меёбад



Расми 56

М и с о л и 2. Графики функсияи

$y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ сохта шавад.

Ҳ а л. Соҳаи муайянӣ - R, ғайр аз $x \neq \pm 1$, яъне ин нуқтаҳо соҳаи муайяниро ба се фосила ҷудо менамоянд:

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Дар системаи координат аз болои нуқтаҳои $x = -1$ ва $x = 1$ хатҳои вертикалӣ мегузаронем.

Сифрҳои функсия: $y = 0$, $\dfrac{x}{x^2 - 1} = 0$, $x = 0$.

Нуқтаи $(0;0)$ ба графики функсия тааллуқ дорад. Як-ду нуқтаи ба он наздикро гирифта, қимати функсияро ёфтан ба мақсад мувофиқ аст, чунончӣ: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{2}{3}$; $f(2) = \dfrac{2}{4-1} = \dfrac{2}{3}$.

Функсия тоқ аст: $f(-x) = -\dfrac{(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x}{x^2 - 1} = -f(x)$.

Бинобар ин, график нисбат ба ибтидои координат симметрӣ мебошад ва функсияро дар фосилаи $[0; +\infty)$ тадқиқ кардан кифоя аст.

Нуқтаҳои критикӣ надорад:

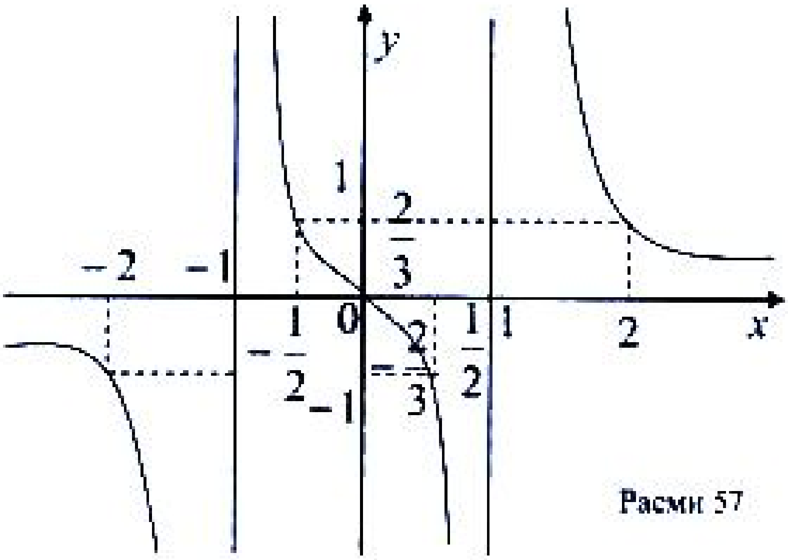
$$y' = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{x^2-1-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = -\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}, \quad x^2+1=0$$

-реша надорад.

Пас, функсия дорои экстремум нест, зеро $f'(x)<0$ барои ҳамаи қиматҳои $x \in D(x)$. Яъне функсия дар ҳамаи фосилаҳои $D(f): (-\infty;-1)$, $(-1;1)$ ва $(1;+\infty)$ кам мешавад.

Ҳолати функсия дар беохирӣ: агар $x \to -\infty$ ва $x \to +\infty$, он гоҳ $y \to 0$; ғайр аз ин, агар $x \to -1$ ва $x \to 1$, $y \to \pm\infty$.

Дар асоси ин маълумотҳо **графики функсияро** месозем (расми 57).



Расми 57

Мисоли 3. Графики функсияи $y=\sin x+\cos x$ сохта шавад.

Ҳал.

$D(f)=R=(-\infty;+\infty)$.

Функсия на ҷуфт ва на тоқ аст:

$$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x \neq \pm f(x).$$

Графики он нисбати тири ордината ва ибтидои координат симметрӣ нест.

Даври функсия: $T=2\pi$.

Функсияро дар фосилаи $[0;2\pi]$ тадқиқ мекунем.

Сифрҳои функсия: $\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$

$$=2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\ \ x=\frac{3\pi}{4}+\pi k.$$

Дар фосилаи $[0;2\pi]$ муодила ду реша дорад: $x=\frac{3\pi}{4}$ ва $x=\frac{7\pi}{4}$. Онҳоро дар тири Ox қайд мекунем.

Ҳосилаи функсия: $y'=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

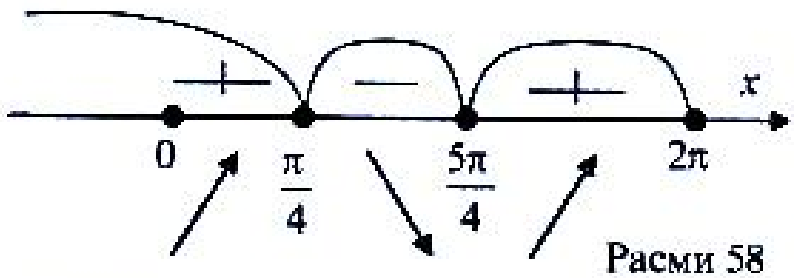
Нуқтаҳои критикӣ: $-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\ \ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$$x-\frac{\pi}{4}=\pi k,\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi k\quad (k\in Z)$$

Азбаски мо танҳо фосилаи $[0;2\pi]$-ро дар назар дорем, пас дар ин фосила фақат $x_1=\frac{\pi}{4}$ ва $x_2=\frac{5\pi}{4}$ решаҳои муодила мебошанд.

Аломати ҳосиларо дар ҳар якеи аз фосилаҳои $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ ва $\left[\frac{5\pi}{4};2\pi\right]$ муайян мекунем (расми 58):

Функсия дар фосилаи $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ ва $\left[\frac{5\pi}{4};2\pi\right]$ афзуда, дар фосилаи $\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ кам мешавад.



Расми 58

<u>**Қиматҳои экстремалӣ:**</u>

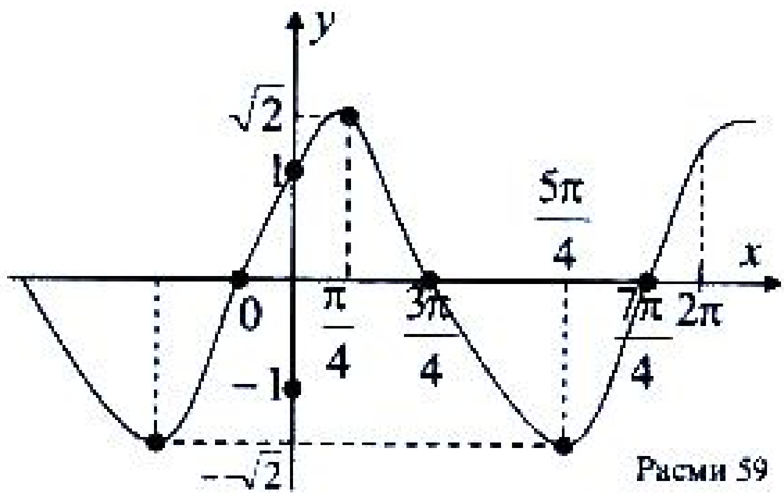
$$y_{\max}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2},\ \text{ҳангоми}\ x=\frac{\pi}{4},$$

$$y_{\min}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2},\ \text{ҳангоми}\ x=\frac{5\pi}{4}.$$

Ба назар мегирем, ки:

$f(0)=\sqrt{2}\cos\frac{4}{\pi}=1,$

яъне $(0;1)$ - нуқтаи буриши графики функсия бо тири ордината мебошад.



Расми 59

Графики функсияро дар фосилаи $[0;2\pi]$ сохта, онро дар маҷмӯи R бо ёрии параллелкӯчонӣ аз рӯи тири абсисса ба дарозии $2\pi k$ $(k\in Z)$ давом медиҳем (расми 59).

?

1. Тартиби умумии тадқиқи функсияро аз синфи 9 ба хотир оред.
2. Тартиби умумии тадқиқи функсияро бо ёрии ҳосила баён намоед.
3. Фарқи онҳо дар чист?

Машқҳо

Функсияҳоро тадқиқ карда, графики онҳоро созед ($15^{\circ}-17^{*}$):

15°. а) $y=x^2+2$; б) $y=2x^2+x$; в) $y=1-x^2$;

г) $y=x^3-3x$; д) $y=2x-7x^2$; е) $y=x^2+\frac{1}{x}$;

ё) $y=x-\frac{1}{x}$; ж) $y=x^2+2x+1$; з) $y=x^2-2x$;

и) $y=\frac{3}{2}x^2-1$; к) $y=\sqrt{2x}$; л) $y=\frac{1}{1-x^2}$.

16. а) $y=2x^2+5x+3$; б) $y=x^3-3x+2$; в) $y=3-5x-2x^2$;

г) $y=x^3-6x+5$; д) $y=x^4-2x^2+3$; е) $y=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}$;

ё) $y=\dfrac{x+2}{x-3}$; ж) $y=x\sqrt{2-x}$;

з) $y=x-\sin x$ дар фосилаи $[0;\pi]$;

и) $y=\cos x+\sin x$ дар фосилаи $\left[\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

17*. а) $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2$; б) $y=1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}$;

в) $y=x^2\sqrt{1+x}$; г) $y=x^2+\dfrac{2}{x}$; д) $y=x^4-2x^3-3$;

е) $y=3x^4+2x^2-5$; ё) $y=\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$; ж) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$;

з) $y=\sin x-\cos x$ дар фосилаи $[0;2\pi]$;

и) $y=\cos 2x+x$ дар фосилаи $[0;\pi]$.

§ 5. Дифференсиали функсия

Мафҳуми дифференсиал ба мафҳуми ҳосила шабеҳӣ дорад ва он яке аз мафҳумҳои муҳимтарини анализи математикӣ ба шумор меравад.

***Таъриф.* Ҳосили зарби ҳосилаи функсияи $y=f(x)$ ба афзоиши аргумент дифференсиали функсия ном дорад.**

Агар $y=f(x)$ - функсияи дода шуда, Δx - афзоиши аргумент бошад, дифференсиали онро бо dy (ё ин ки $df(x)$) ишорат карда менависем:

$$\boxed{dy=df(x)=f'(x)\Delta x} \qquad (1)$$

Мехонанд: «Дэ аз игрек баробар аст ба дэ аз эф аз икс». Нютон ифодаи $f'(x)\Delta x$-ро **момент** ном ниҳода буд.

Қайд мекунем, ки ҳосилаи функсия танҳо аз x вобастагӣ дорад; дифференсиал бошад боз аз Δx ҳам вобаста аст, яъне дифференсиали функсия – функсияи ду тағйирёбандаи новобастаи x ва Δx ҳисоб мешавад.

Бинобар ин,

Ҳеҷ гоҳ ҳосилаю дифференсиалро бо ҳам якҷоя кардан лозим нест!

Маълум аст, ки агар функсия $y = x$ бошад, онгоҳ ҳосилаи он ба адади доимӣ (воҳид) баробар аст. Ва дар ин маврид дифференсиали функсия ба Δx баробар мешавад, яъне $dx = \Delta x$. Формулаи (1) бошад намуди зеринро мегирад:

$$dy = df(x) = f'(x)dx \qquad (2)$$

Аз ин ҷо навишти паҳнгаштаи ҳосила дар намуди нисбати дифференсиалҳо бармеояд:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

Мехонем: «Эф штрих аз икс баробар аст ба дэ игрек аз рӯи дэ икс».

Аз ин рӯ, барои ишораи ҳосила дар баробари аломатҳои y' ва $f'(x)$ боз рамзҳои $\frac{dy}{dx}$ ва $\frac{df(x)}{dx}$-ро истифода мебаранд.

Мисолҳо:

1) $y = x^3$, $dy = d\left(x^3\right) = \left(x^3\right)' dx = 3x^2dx$;

2) $y = \sin x$, $dy = d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x dx$.

Дифференсиали функсия **маънои оддии геометрӣ** дорад. Ба ин мақсад, афзоиши функсия Δy ва дифференсиали он dy-ро муқоиса мекунем. Аз расми 60 бармеояд, ки ҳар чӣ қадар Δx хурд бошад, ҳамон қадар Δy ба dy наздик мешавад (айни ҳол Δy аз калон аст).

Дарвоқеъ, фарқи $(\Delta y - dy)$ -ро ин тавр табдил дода метавонем:

$$\Delta y - dy = \Delta y - f(x) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right) \qquad (4)$$

Мувофиқи таърифи ҳосила агар $\Delta x \to 0$, онгоҳ фарқи $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$ ҳам ба сифр майл мекунад. Ҳангоми онро ба Δx зарб кардан ифодае ҳосил мешавад, ки он ба сифр харчӣ тезтар наздик мешавад. Бинобар ин, аз баробарии (4) формулаи тақрибии зеринро ҳосил мекунем:

$$\boxed{\Delta y \approx dy} \qquad (5)$$

Аз ин рӯ, мегӯянд, ки:

дифференсиал – қисми асосии афзоиши функсия аст.

Афзоиши функсия Δy метавонад аз dy хурд ва ё ба он баробар бошад. Ба ихтиёри шумо месупорем, ки расм кашида ҷой доштани баробарии (5)-ро нишон диҳед.

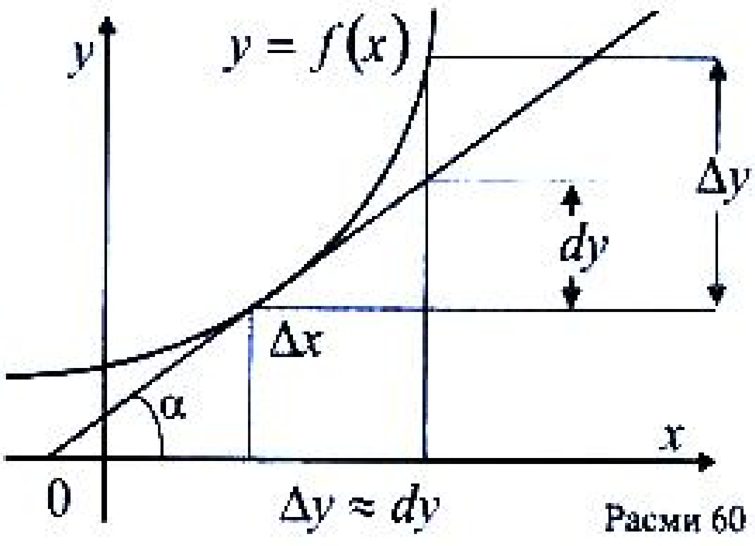
М и с о л. Афзоиш ва дифференсиали функсияи $y = x^2$-ро ҳангоми $x = 1$ ва $\Delta x = 0{,}01$ ҳисоб карда, онҳоро муқоиса кунед.

Ҳ а л. $\Delta y = (1+\Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + \Delta x^2 = 0{,}0201,$

$dy = f'(x)\Delta x = 2x\Delta x = 2\cdot 1\cdot 0{,}01 = 0{,}02.$

Фарқи $\Delta y - dy = 0{,}0201 - 0{,}02 = 0{,}0001$ аст.

Хатоии нисбӣ $\dfrac{0{,}0001}{0{,}02} = 0{,}5\%$ -ро ташкил медиҳад.



Расми 60

Аз расми 60 маълум аст, ки dy ба dx (ё ин ки dx) мутаносиби рост аст. Ин тасдиқ аз формулаи $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ ҳам бармеояд.

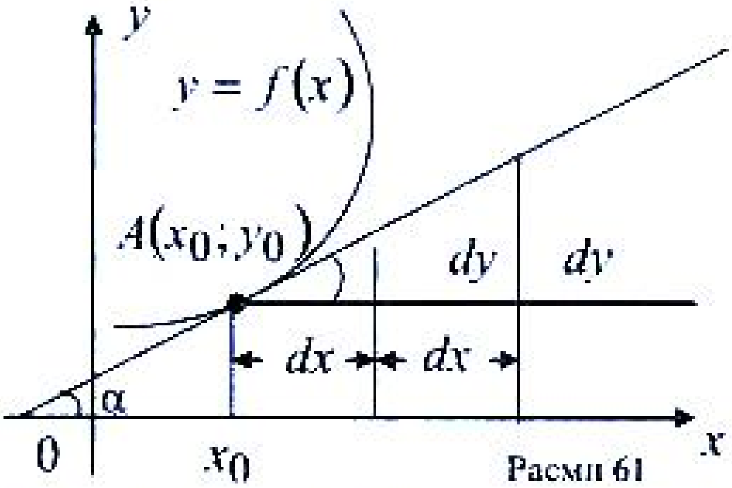
Агар x қимати муайян $x = x_0$ қабул кунад, ҳосила $f'(x_0)$-бузургии доимист. $f'(x_0) = k$ ишорат карда ҳосил мекунем: $\dfrac{dy}{dx} = k$,

Пас,

$$\boxed{dy = kdx} \qquad (6)$$

дифференсиали функсия – функсияи хаттии афзоиши аргумент мебошад.

Муносибати (6)-ро геометрӣ шарҳ медиҳем. Нуктаи $A(x_0; y_0)$-ро дар графики $y = f(x)$ қайд мекунем (расми 61).



Расми 61

Аз расм айён аст, ки ҳангоми тағйирёбии dx силсилаи секунҷаҳои росткунҷае ҳосил мешаванд, ки нисбати катетҳои онҳо ҳамеша ба тангенси кунҷи моилии расанда ба тири абсцисса, яъне ба ҳосила баробар аст:

$$\frac{dy}{dx} = k = tg\alpha .$$

?

1. Дифференсиал чист? Он аз ҳосила чӣ фарқ дорад?
2. Таърифҳои гуногуни дифференсиалро баён кунед.
3. Маънои геометрии дифференсиалро шарҳ диҳед.
4. Кадом баробарии тақрибӣ дифференсиал ва афзоиши функсияро алоқаманд мекунад?

Машқҳо

Дифференсиали функсияҳои зеринро ҳисоб кунед ($18^\circ - 20^*$):

18°. а) $y = x^2 + 1$; б) $y = \frac{1}{3}x^6 - 5x^2 + 0{,}2$;

в) $y = \frac{1}{3}\cos 3x$; г) $c(r) = 2\pi r$.

19. а) $y = \frac{2x-1}{2x+1}$; б) $y = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$;

в) $y = x\cos x$; г) $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

20^*. а) $y = x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$; в) $y = (1 - \cos 2x)^2$.

Муодилаи расандаро ба графики функсияҳо, ки дар нуқтаҳои зерин гузаронида шудаанд, муайян кунед (21°–23^*):

21°. а) $y = 2x^2$, абсциссааш $x_0 = 1$;

б) $y = x^2 + 1$, абсциссааш $x_0 = 2$;

22. а) $y = x^2 - 2x$, абсциссааш $x_0 = 3$;

б) $y = -x^2 + x$, абсциссааш $x_0 = -2$;

23^*.. а) $y = x^2 - 3x + 2$ абсциссааш $x_0 = 3$;

б) $y = \cos x$ абсциссааш $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

§ 6. Ҳисоби тақрибии қимати функсияҳо

Формулаҳои тақрибӣ

Яке аз воситаҳои муҳимтарини тадбиқи ҳосила - ҳисоби тақрибии қимати функсия ҳисоб меёбад. Ба ин мақсад аз баробарии $\Delta y \approx dy = y'\Delta x$ истифода мебарем.

Фарз мекунем, ки функсияи $y = f(x)$ дода шудааст ва қимати он дар нуқтаи x_0 ба $f(x_0)$ баробар аст. Агар Δx-афзоиши аргумент бошад, онгоҳ:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Аз тарафи дигар $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Тақрибӣ ҳисоб намудани қимати функсия маънои онро дорад, ки Δy ба dy иваз карда шавад.

Ҳангоми иваз намудани ифода ба қимати тақрибии он аломати баробарии тақрибӣ $\approx$ истифода бурда мешавад.

Пас,
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

Ва ё

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x} \qquad (1)$$

Азбаски $\Delta x = x - x_0$ аст, формулаи (1) намуди зайлро мегирад:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (2)$$

Формулаи охиринро боз ин тавр навиштан мумкин аст:

$$y \approx y_0 + f'(x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

ё

$$y \approx y_0 + dy \tag{4}$$

Маънои геометрии иваз намудани Δy ба dy аз он иборат аст, ки дар наздикии нуқтаи x мо ба ҷои функсияи $y = f(x)$ функсияи хаттиро дида мебароем, яъне фосилаи хурди графикро ба расанда иваз менамоем.

Дидан душвор нест, ки ҳангоми кифоя хурд будани Δx формулаи (1) ва ё (3) муодилаи расандаро (нигар ба §3 боби 4) медиҳад:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Мисолҳо.

1. Барои функсияи дараҷагии $y = x^n$ формула меёбем. Нуқтаи x_0 -ро қайд карда, аз рӯи (1) ҳосил мекунем:

$$(x_0 + \Delta x)^n \approx x_0^n + nx_0^{n-1} \cdot \Delta x \tag{5}$$

Агар $x_0 = 1$ бошад, $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n \cdot \Delta x$ (6)

мешавад.

Чунончӣ; а) $(1{,}1)^3 = (1 + 0{,}1)^3 \approx 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 0{,}1 \approx 1{,}3$;

б) $(0{,}994)^3 = (1 - 0{,}006)^3 \approx 1^3 - 3 \cdot 0{,}006 \approx 0{,}982$;

в) $(9{,}96)^4 = (10 - 0{,}04)^4 \approx 10^4 - 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}04 \approx 9840$.

2. Муносибати (1)-ро истифода бурда, барои баровардани решаи тақрибӣ аз функсияи $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ формула пайдо мекунем:

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} = (x_0 + \Delta x)^{\frac{1}{n}} \approx x_0^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \cdot x_0^{\frac{1}{n} - 1} \cdot \Delta x \tag{7}$$

Агар $x_0 = 1$ бошад,

$$\sqrt[n]{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{n} \cdot \Delta x \tag{8}$$

мешавад.

Мисол. а) $\sqrt[3]{8{,}002} = \sqrt[3]{8 + 0{,}002} = (8 + 0{,}002)^{\frac{1}{3}} \approx$

$$\approx 8^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} \cdot 0{,}002 \approx 2{,}002 \pm 0{,}001;$$

б) $\sqrt{0,992}=(1-0,008)^{\frac{1}{2}}\approx 1-\frac{1}{2}\cdot 0,008\approx 0,996.$

3. Бигузор Δx дар муқоиса ба x_0 кифоя хурд бошад. Формулаи (8)-ро татбиқ намуда барои (7) формулаи боз ҳам пурқувваттареро ҳосил мекунем:

$$\sqrt[n]{x_0^n+\Delta x}=\sqrt[n]{x_0^n\left(1+\frac{\Delta x}{x_0^n}\right)}=x_0\sqrt[n]{x+\frac{\Delta x}{x_0^n}}\approx x_0\left(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta x}{x_0^n}\right)\approx x_0+\frac{\Delta x}{nx_0^{n-1}}.$$

Яъне,
$$\sqrt[n]{x_0^n+\Delta x}\approx x_0+\frac{\Delta x}{nx_0^{n-1}} \tag{9}$$

ҳангоми $n=2$:
$$\sqrt{x_0^2+\Delta x}\approx x_0+\frac{\Delta x}{2x_0} \tag{10}$$

$n=3$:
$$\sqrt[3]{x_0^3+\Delta x}\approx x_0+\frac{\Delta x}{3x_0^2} \tag{11}$$

ва ғайра.

Қайд мекунем, ки **методи аз тахти решаи ихтиёрӣ тақрибӣ** баровардани адад бори аввал дар Осиёи Миёна кашф карда шуда буд. Формулаҳои (9) – (10)-ро 400 сол пеш аз кашфи дифференсиал математикони тоҷик **Ғиёсиддин Ҷамшед ал-Кошонӣ** (вафоташ 1430), **Алӣ Қушчии Самарқандӣ** (1402-1474) ва дигарон истифода мебурданд. Вале методе, ки онҳо бо ёрии он ин формулаҳоро кашф намуданд, то ҳанӯз ошкор нашудааст.

Мисолҳо. Ҳисоб кунед: **а)** $\sqrt{65}$

Тарзи 1. $\sqrt{65}=\sqrt{8^2+1}\approx 8+\frac{1}{2\cdot 8}=8\frac{1}{16}\approx 8,0625.$

Дар ҷадвалҳои чорраҳамаи В. М. Брадис $\sqrt{65}\approx 8,062$ аст. Саҳви мутлақи натиҷаи ҳисоббарорӣ баробари 0,05 мебошад. Пас, ҳисоббарориро кифоя саҳеҳ ичро намудаем.

Тарзи 2. Функсияи $f(x)=\sqrt{x}$ -ро дида мебароем. Ҳосилаи он $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ аст; $x_0 = 64$ ва $\Delta x = 1$ гузошта, аз рӯи формулаи (1)

меёбем: $y = f(x) = f(64+1) \approx f(64) + f'(64)(65-64) \approx$

$$\approx 8 + 0{,}0625 \cdot 1 \approx 8{,}0625, \text{ зеро } f(64) = \sqrt{64} = 8,$$

$$f'(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{2 \cdot 8} = 0{,}0625.$$

б) $\sqrt[4]{81{,}04} = \sqrt[4]{3^4 + 0{,}04} \approx 3 + \frac{0{,}04}{4 \cdot 3^9} \approx 3{,}004.$

в) $\sin 31^\circ$; мегузорем: $31^\circ = 30^\circ + 1^\circ = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$;

$$x_0 = \frac{\pi}{6}, \quad \Delta x = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017$$

Он гоҳ, $\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ) \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \approx$

$$\approx 0{,}500 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}017 \approx 0{,}500 + 0{,}015 \approx 0{,}515.$$

?

1. Чӣ тавр бо ёрии дифференсиал формулаҳои тақрибӣ ҳосил мешаванд?
2. Маънои геометрии иваз намудани афзоиши функсия ва дифференсиали онро шарҳ диҳед.
3. Дар кадом ҳолат аз формулаи тақрибӣ муодилаи расандаро ҳосил кардан мумкин аст?
4. Формулаҳои тақрибии $(1+\Delta x)^n$, $\sqrt[n]{x_0^n + \Delta x}$, $\sqrt[n]{1+\Delta x}$ -ро нависед.

Машқҳо

Бо ёрии дифференсиал тақрибӣ ҳисоб кунед (24° – 26):

24°. а) $(0{,}994)^3$; б) $\sqrt{0{,}997}$; в) $(1{,}0086)^2$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{1{,}006}}$;

д) $\sqrt{101}$; е) $\sqrt{99}$; ё) $\sqrt[3]{1,07}$; ж) $(6,04)^3$.

25. а) $(3,002)^5$; б) $\sqrt[4]{15,8}$; в) $\sqrt{3,15\cdot 3,96}$; г) $\sqrt[3]{81,012}$.

26. а) $\sqrt[4]{\frac{1,004}{1,007}}$; б) $\frac{5}{\sqrt{15,63}}$; в) $\sqrt[4]{10248}$; г) $\sqrt[3]{999}$.

27*. (Ғ. Кошонӣ). а) Оё дуруст аст, ки:

а) $\sqrt[5]{44240899506197} \approx 536\frac{21}{414237740281}$;

б) Нишон диҳед, ки: $\sqrt[5]{2\frac{2}{31}} = 2\sqrt[5]{\frac{2}{31}}$.

Қимати тақрибии функсияи $y = f(x)$-ро дар нуқтаи x_0 ҳисоб кунед ($28^\circ - 30^*$):

28°. а) $y = 1 + 5x^3$, $x_0 = 1,003$; б) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 9,001$;

в) $y = x^2 + x$, $x_0 = 2,01$.

29. а) $y = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1,001$;

б) $y = x^3 - x^2 + 2x$, $x_0 = 3,03$; в) $y = x^3 - 6x + 2$, $x_0 = 1,002$.

30*. а) $y = x^7 - 3x^3 + 4x^2 - 2$, $x_0 = 1,002$;

б) $y = x\sqrt{x^2 + 5}$, $x_0 = 2,001$; в) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$, $x_0 = 4,1$.

31. Аз рӯи формулаи тақрибии дифференсиал ҳисоб кунед:

а) $\sin 29^\circ$; б) $tg\,44^\circ$; в) $\cos 59^\circ$.

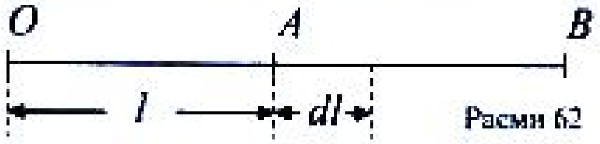
§ 7. Истифодаи дифференсиал дар физика ва техника

Мафҳуми дифференсиал ҳамчун функсияи хаттии афзоиши аргумент барои ҳисоб намудани бузургиҳои зиёди физикӣ ва техникӣ истифода бурда мешавад.

1. <u>Зичии хаттии меҳвар</u>

Фарз мекунем, ки меҳваре ҳаст. Агар он якҷинса бошад, масса ба дарозии меҳвар баробар тақсим мешавад, яъне

$\rho = \frac{m}{l}$. Ҳангоми ғайриякҷинса будани меҳвар дар бораи зичии он умуман сухан рондан мумкин нест, зеро дар қисмҳои гуногуни меҳвар зичӣ ҳархел аст. Фарз мекунем, ки зичиро дар нуқтаи A муайян кардан лозим бошад (расми 62).



Расми 62

Дар он сурат функсияҳои $m = m(l)$ -массаи қитъаи меҳвар аз нуқтаи O то нуқтаи A (ба дарозии l мувофиқ меоянд) ва $p = p(l)$-ро дида баромадан мумкин аст. Агар дар порчаи хурди дарозии меҳвар $[l;l+\Delta l]$ зичиро доимӣ ва баробари $p(l)$ шуморем, онгоҳ ҳосили зарби $\rho(l)\cdot dl$ -дифференсиали масса dm -ро медиҳад.

Ҳамин тариқ, **ҳосилаи масса аз рӯи дарозӣ – зичии хаттии меҳвари ғайриякҷинса аст:** $\rho = m'(l)$.

2. <u>Гармӣ</u>. Бо T° - температура ва бо Q - миқдори гармие, ки барои гарм кардани 1 кг моддаи ҷисми додашуда аз 0° то T° (аз рӯи Селсия) зарур аст, ишорат мекунем. Маълум аст, ки Q аз T вобастагӣ дорад, яъне $Q = Q(t)$ ва он ($Q = mc(T_2 - T_1)$) аз таҷриба муайян карда мешавад. Агар гармиғунҷоиши хоси модда C аз температура вобастагӣ намедошт, он гоҳ ҳосили зарби $C \cdot dT$ тағйирёбии Q-ро муайян мекард. Дар фосилаи аз T то $T + \Delta T$ гарм кардани ҷисм гармигунҷоиши хосро доимӣ шуморида, дифференсиали гармиро ҳосил мекунем: $dQ = c(T)dT$.

Пас, ҳосилаи гармӣ аз температура гармиғунҷоиши ҷисми массааш ба воҳид баробарро медиҳад: $C = Q(T)$.

3. <u>Қувваи ҷараёни электрикӣ</u>. Фарз мекунем, ки q-миқдори заряде (бо кулонҳо) бошад, ки дар вақти t аз буриши кундалангии ноқил мегузарад. Ҳангоми қувваи ҷараён I доимӣ будан дар фосилаҳои баробари вақт dt аз ноқил миқдори баробарӣ электрик мегузарад, ки он ба Idt баробар аст.

Агар қувваи ҷараён тағйирёбанда бошад, дар фосилаи хурди вақт $[t;t+\Delta t]$ он аз рӯи қонуни $I = I(t)$ тағйир меёбад. Ва дар ин порча ҳосили зарби $I(t)dt$ қисми асосии афзоиши миқдори зарядро ташкил медиҳад: $dt = I(t)dt$. Аз ин ҷо мебарояд, ки **ҳосилаи заряд аз рӯи вақт – қувваи ҷараён аст:** $I = q'(t)$.

Ин муносибат алоқамандии се бузургӣ-заряд, вақт ва қувваи ҷараёнро ифода мекунад.

4. <u>Суръати реаксияи химиявӣ</u>. Маълум аст, ки миқдори моддаи m ба реаксияи химиявӣ воридшаванда вобаста ба вақт t тағйир меёбад, яъне $m = m(t)$. Суръати он низ аз рӯи қонуни $v = v(t)$ ифода меёбад. Дар фосилаи хурди вақт $[t;t+\Delta t]$ ҳосили зарби $v(t)dt$ дифференсиали миқдори моддаро медиҳад:

$$dm = v(t)dt$$

Пас, **ҳосилаи массаи модда аз рӯи вақт – суръати реаксияи химиявӣ** аст: $v = m'(t)$

Ҳамин тавр мисолҳои зиёде аз техника овардан мумкин аст, ки барои ҳалли онҳо дифференсиали функсия зарур мешавад. Масалан, муайян кардани коэффитсиенти ҳатти васеъшавии ҷисм, суръати кунҷии ҷисми чархзананда, кори иҷрогардида дар фосилаи вақт ва ғ. ҳамингуна масъалаҳое мебошанд, ки ҳаллашон дифференсиали функсияи мувофиқро талаб мекунанд.

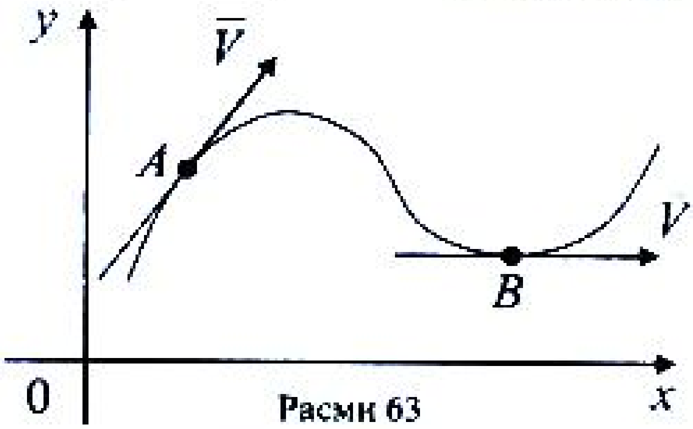
Дар ҳамаи мисолҳои муоина гардида яке аз бузургиҳо ба сифати коэффитсиенти мутаносиби байни дифференсиали ду бузургии дигар ворид гаштааст, яъне ҳар дафъа алоқамандии бузургиҳо бо муносибати $dy = kdx$ ифода меёбад.

5. <u>Суръати ҳаракати каҷхатта</u>. Мо татбиқи ҳосиларо барои муайян кардани ҳолат, ҷойивазкунӣ, суръат ва шитоби ҷисме, ки ростхатта ҳаракат мекунад, дида баромадем. Ба шумо аз курси физика (қисми кинематика) маълум аст, ки **суръати** нуқтаи ҳаракаткунандаи дилхоҳ **бузургии векторӣ** аст. Он бо ёрии вектор ҳамчун ҷойивазкунии нуқта дар фосилаи вақти дода шуда муайян карда мешавад. Дар қисми динамика нишон дода мешавад, ки дар ҳаракати каҷхатта вектори суръат аз рӯи расанда равона аст. Мувофиқи ҳамин нишондод амал мекунем.

Фарз мекунем, ки нуқтаи A аз рӯи траектория (лотинӣ – ҷойивазкунӣ)-и каҷхатта ҳаракат мекунад. Координатаҳои нуктаҳои A-ро дар лаҳзаи вақт t бо

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

ифода мекунем. Ин координатаҳо аз вақт t вобаста буда, худ функсияҳои вақтанд. Агар функсияҳои $x(t)$ ва $y(t)$ бефосила бошанд, он гоҳ ҳангоми тағйирёбии муттасили вақт ҳаракати нуқтаи $A(x;y)$ дар ҳамворӣ **хати каҷро** мекашад (расми 63).



Расми 63

Аз ин рӯ, муодилаҳои (1)-ро **тарзи параметрии дода шудани хати каҷ ва ё муодилаҳои ҳаракат** меноманд.

Суръати лаҳзагии нуқтаи ҳаракаткунандаи A-ро дар лаҳзаи t дида мебароем. Вектори суръати лаҳзагӣ $\vec{v}$ ба траекторияи ҳаракати нуқта расанда буда, координатаҳои он низ аз вақт t вобастагӣ доранд. Нишон медиҳем, ки координатаҳои вектори суръати $\vec{v}$-и нуқтаи A ба $x'(t)$ ва $y'(t)$ баробаранд; дар ин ҷо x' ва y' функсияҳое мебошанд, ки аз x ва y дар нуқтаи A ҳосил шудаанд.

Дар муддати вақти Δt нуқтаи $A(x(t);y(t))$ ба нуқтаи $B(x(t+\Delta t);y(t+\Delta t))$ ҷой иваз мекунад. Координатаҳои вектори $\overrightarrow{AB}$-ро бо ёрии координатаҳои ибтидои вектор нуқтаи A ва интиҳои он нуқтаи B ифода мекунем. Аз курси геометрия (синфи IX) маълум аст, ки вектори $\overrightarrow{AB}$ ба фарқи векторҳои $\overrightarrow{OB}$ ва $\overrightarrow{OA}$ баробар аст (нақшаро кашед!). Бинобар ин, координатаҳои он ба фарқи координатаҳои мувофиқи ин векторҳо баробар мебошад:

$$\overrightarrow{AB}(x(t+\Delta t)-x(t);\ y(t+\Delta t-y(t)))$$

Маълум аст, ки нисбати ҷойивазкунӣ ба вақт суръати миёна ном дорад (§1, боби 4).

Пас, барои вектори суръати миёна навишта метавонем:

$$\vec{V}_{\text{миёна}} = \frac{\overline{AB}}{\Delta t}$$

Координатаҳои он бошад намуди зеринро мегирад:

$$\vec{V}_{\text{миёна}}\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t};\ \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\right)$$

Ҳангоми Δt ҳар чӣ қадар хурд шудан $\vec{V}$ миёна ба вектори суръати лаҳзагӣ наздик мешавад.

Аз рӯи таърифи ҳосила, агар $\Delta t \to 0$, он гоҳ

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \to x'(t), \quad \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \to y'(t).$$

Ба ҳамин тариқ, координатаҳои вектори суръати лаҳзагӣ дар вақти t ба $x'(t)$ ва $y'(t)$ баробар будааст:

$$\vec{V}(x'(t);\ y'(t)) \tag{2}$$

Дар ҳаракати даврзананда нуқта аз рӯи давраи радиусаш r бо суръати кунҷии доимии $\omega = \frac{\alpha}{t}$ дар атрофи тир чарх мезанад. Дар ин маврид суръати хаттиро суръати лаҳзагӣ ҳам меноманд (нақша кашед!).

Ҳангоми ҳаракати доиравии ғайримунтазам суръати кунҷӣ ω тағйир ёфта меистад. Агар дар фосилаи $[t; t+\Delta t]$ нуқта ба кунҷи $\Delta\alpha = \alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)$ гардиш кунад, онгоҳ:

$$\omega_{\text{миёна}} = \frac{\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)}{\Delta t}$$

мешавад.

Мувофиқи таърифи ҳосила, дар ҳолати $\Delta t \to 0$ суръати кунҷии лаҳзагиро ҳосил мекунем:

$$\frac{\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)}{\Delta t} \to \alpha'(t)$$

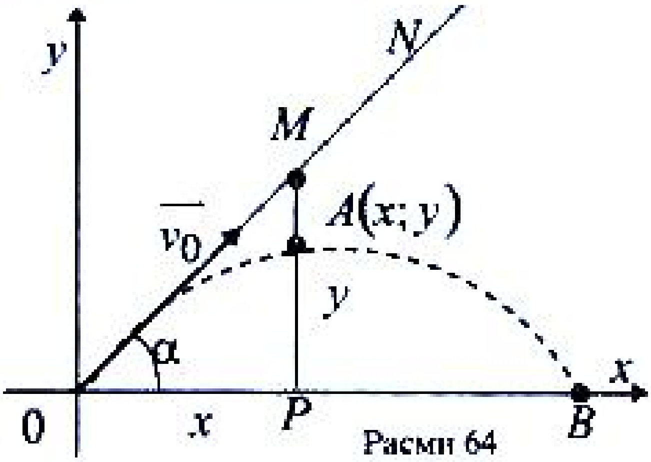
М и с о л. Тири тӯп дар зери кунҷи α бо суръати $\bar{v}_0$ ба ҳамвории горизонталӣ парронда шуд. Агар муқовимати ҳаво ба назар гирифта нашавад, он аз рӯи парабола ҳаракат мекунад. Вектори суръат $\overline{V}$ ба парабола расанда аст.

а) Координатаҳои ҳаракати тири тӯпро муайян кунед;

б) Координатаҳои вектори суръат ба чӣ баробар аст?

в) Ҳангоми $V_0 = 30{,}5м/с$ ва $a = 30^\circ$ буда, координатаҳои суръат, шитоб ва суръатро дар охири сонияи якум маълум кунед.

Ҳ а л. Дар системаи координатаи декартӣ траекторияи парвози тирро мекашем (расми 64).



Расми 64

Ҳолати тирро координатаҳои x ва y-и нуқтаи A (нуқтаи маркази вазнинӣ) муайян мекунад. Агар ба тири тӯп қувваи вазнинӣ таъсир намекард, он аз рӯи хати рости ON ҳаракат карда, дар t сония роҳи $OM = v_0t$ -ро тай менамуд. Вале дар зери таъсири қувваи вазнинӣ тир дар ин муддат ба масофаи $MA = \dfrac{gt^2}{2}$ паст фуромада дар нуқтаи A ҷойгир мешавад.

Аз секунҷаи росткунҷаи OMP меёбем:

$$x = OP = OM\cos\alpha = v_0t\cos\alpha,$$

$$y = PA = PM - AM = OM\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = v_0t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Ҳамин тавр, координатаҳои тир дар нуқтаи A, ки аз вақт вобастагӣ доранд, маълум шуданд:

$$x(t) = v_0t\cos\alpha,$$

$$y(t) = v_0t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \qquad (3)$$

дар ин ҷо v_0 -суръати ибтидоии ҳаракат, α -бузургии кунҷе, ки онро вектори суръат бо ҳамҷоягии тири тӯпи ба ҳаво парронда шуда ташкил медиҳад $(0 < \alpha \le 90^\circ)$, $g = 10 м/с^2$ - шитоби озодафтии ҷисм мебошад. Бо ёрии ин функсияҳо (муодилаҳои ҳаракат) дар муддати дилхоҳи вақт дурии парвоз x ва баландии парвоз y-ро ёфта метавонем.

Координатаҳои вектори суръат $\vec{v}$-ро аз рӯи формулаҳои (3) меёбем:

$$x'(t) = (v_0 t\cos\alpha)' = v_0\cos\alpha \tag{4}$$

$$y'(t) = \left(v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)' = v_0\sin\alpha - gt.$$

Пас, $\vec{V}(v_0\cos\alpha;\ v_0\sin\alpha - gt)$.

Дар формулаҳои (4) $t = 1с$, $v_0 = 30{,}5 м/с$, $\alpha = 30^\circ$ ва $g = 10 м/с^2$ гузошта координатаҳои вектори суръатро ҳисоб мекунем:

$$x' = 30{,}5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 30{,}5\cdot 0{,}866 = 26{,}4 м/с$$

$$y' = 30{,}5\cdot\frac{1}{2} - 10\cdot 1 = 5{,}25 м/с.$$

Аз рӯи ин координатаҳо суръат v-ро маълум мекунем:

$$v = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha + g^2t^2} = \sqrt{30{,}5^2 - 2\cdot 30{,}5\cdot 10\cdot 1\cdot 0{,}5 + 10^2} =$$

$$= \sqrt{727{,}75} \approx 26{,}98 м/с$$

(ҳисоббарорӣ бо ёрии МК иҷро карда мешавад).

Муайян кардани координатаҳои шитоб бошад душворие надорад: $\ddot{x}(t) = 0$, $\ddot{y}(t) = -g = -10 м/с^2$.

?

1. Мисолҳои алоқамандии байни бузургиҳо ва дифференсиали онҳоро оред.
2. Ҳосилаи заряд аз рӯи вақт чиро мефаҳмонад?
3. Муодилаи траекторияи ҳаракати нуқтаро аз рӯи хати каҷ тартиб диҳед.

4. Алоқамандии каоординатаҳои вектори суръати лаҳзагӣ ва вектори суръати миёнаро ошкор намоед.
5. Координатаҳои вектори суръати ҳаракати каҷхатта чӣ тавр муайян карда мешаванд?

Машқҳо

32. а) Суръати ҷисмро, ки аз рӯи қонуни $S(t)=3t+5$ ҳаракат мекунад, ёбед.

б) Ҷисм бо суръати $S=t^3-3$ ҳаракат мекунад. Суръати онро дар лаҳзаи $t=2c$ муайян кунед.

33. Ҷисм бо суръати $v=5t^2-2t+2$ ҳаракат мекунад. Суръати он дар лаҳзае, ки шитоб ба сифр баробар аст, чӣ қадар аст?

34. а) Кунҷи гардиши чарх дар атрофи тир бо формулаи $\varphi(t)=t^2+3t-5$ дода шудааст. Суръати кунҷиро дар лаҳзаи $t=5c$ ёбед?

б) Агар кунҷи гардиш бо қонуни $\varphi(t)=2t^2-\frac{1}{2}t$ ифода ёбад, он дар лаҳзаи $t=10c$ ба чӣ баробар аст?

35. Ҷисми аз рӯи қонуни $S=\frac{2}{3}t^3-2t+3$ ростхатта ҳаракт мекунад. Суръат ва шитобро дар охири сонияи чорум ёбед.

36. а) Ду ҷисм дар як вақт аз рӯи хати рост ба ҳаракат даромаданд: яке аз рӯи қонуни $10t^2$ ва дигаре аз рӯи $\frac{4}{3}t^3$. Қадоме аз онҳо дар лаҳзаи $t=5c$ ва $t=10c$ суръати баландтарро дорад?

б) Ду ҷисм аз рӯи қонунҳои $x_1(t)=4t^2-3t+1$ ва $x_2(t)=t^2+7t-2$ (x_1, x_2-бо метрҳо, t-бо сонияҳо) ҳаракат мекунанд. Суръати онҳоро дар лаҳзае, ки координатаҳояшон бо ҳам баробаранд, ёфта шавад.

37. Ҷисм аз рӯи қонуни $S=30t-t^2$ ростхатта ҳаракат мекунад. Суръати лаҳзавиро дар лаҳзаи $t=3c$ ва $t=10c$ ёбед.

38. Ҳаракати ҷисм аз рӯи қонуни $S = \sqrt{t}$ сустшаванда аст. Чаро?

39. Ҷисм бо суръати космикии 1-ум $v = \sqrt{\frac{gr^2}{r+h}}$ ҳаракат мекунад ($r = 6367$ *км* -радиуси Замин). Агар $h = 0$ бошад суръат чӣ қадар аст? Шитоб – чӣ?

40. Нуқта аз рӯи қонуни $A = A\sin 10t$ ҳаракати ростхаттаи лапанда ичро мекунад. Суръат ва шитоби ҳаракатро дар лаҳзаи $t = \frac{2\pi}{\omega}$ муайян кунед. Нишон диҳед, ки шитоб ба S мутаносиб аст.

41. Ҷисм аз рӯи қонуни $S = 3t^2 + t - 1$ ростхатта ҳаракат мекунад. Суръат ва шитобро дар лаҳзҳои $t = 0$, $t = 1$ ва $t = 2$ ёбед. Графики суръати лаҳзагиро вобаста аз вақт созед.

42. Дар меҳвари ғайриякҷинсаи AB массаи порчаи AM ба квадрати масофа аз нуқтаи M то нуқтаи A мутаносибан меафзояд. Маълум аст, ки дарозии порчаи AM ба 2 см ва массаи он ба 8 кг баробар мебошад. Зичии меҳварро дар нуқтаи C маълум кунед, агар он аз нуқтаи A дар масофаи 5 см воқеъ бошад.

43. Нуқта аз рӯи қонуни $S = 2t(t-5)$ ростхатта ҳаракат мекунад. Баъди чанд вақт суръати нуқта баробари 2 м/с мешавад?

44. Нуқта аз рӯи қонуни $x(t) = 2t^2 - 14t + 45$ ростхатта ҳаракат мекунад. Суръати нуқтаро дар лаҳзае, ки координатаи он ба 25 м баробар аст, ёбед. Ба аломати суръат эътибор диҳед.

Координатаҳои қонуни ҳаракат бо тариқи зайл дода шудаанд ($45^\circ - 47^*$):

45°. а) $\vec{r}(3t-2; -4t)$; б) $\vec{r}(2t^2 - 3; 3t^2)$.

46. а) $\vec{r}\left(t^2; \frac{4}{t^2}\right)$; б) $\vec{r}(2t - 4t^2; t - t^2)$.

47*. а) $\vec{r}(8t^2 - 7; 16t^2 + 4)$; б) $\vec{r}(2t; t^2 + 3)$.

Координатаҳои суръат ва суръати ҳаракатро ёбед.

Муодилаҳои ҳаракатро дар системаи координатаи декартӣ нависед. Траекторияи ҳаракати нуқтаҳоро кашед.

48. Қувваи ҷараён бо формулаи $I = 0{,}2t^2$ дода шудааст. Суръати ҷараёнро дар охири сонияи 10-ум ҳисоб кунед.

49. Миқдори заряде, ки дар вақти t аз ноқил мегузарад бо формулаҳои:

а) $Q = 2t^2 + 5t + 1\ (k)$ б) $Q = 2t^2 + 3t + 1\ (k)$

муайян карда мешавад. Қувваи ҷараёнро дар лаҳзаи $t = 5c$ ва $t = 10c$ ҳисоб кунед.

50. Ҳангоми гарм кардани ҷисм температураи он T° вобаста ба вақт аз рӯи қонуни $T(t) = 0{,}4t^2$ тағйир меёбад. Суръати тағйирёбии температураи ҷисмро дар лаҳзаи $t = 0$ ҳисоб кунед.

51. Ҳаҷми газ V дар температураи t° аз рӯи формулаи $V = 1 + 0{,}0075t$ муайян карда мешавад. Суръати вобастагии онро ёбед.

52. а) Дарозии меҳвари оҳанин дар порчаи $0^\circ \le t^\circ \le 75^\circ$ (Селсия) аз рӯи формулаи $l = l_0\left(1 + 117 \cdot 10^{-7}t + 4{,}7 \cdot t^{-9} \cdot t^2\right)$ тағйир меёбад. Коэффитсиенти хатти васеъшавиро дар лаҳзаи $t = 5^\circ$ ёбед.

б) Дарозии ҷисми сахт дар температураи t° аз рӯи дарозии аввалаи он l_0 ва коэффитсиенти хатти васеъшавӣ α муайян карда мешавад. Таърифи коэффитсиенти хатти васеъшавии ҷисмро баён кунед.

53. Ҷудошавии радиоактивии модда, ки бо роҳи таҷриба муайян карда мешавад бо муодилаи $R = f(t)$ ифода меёбад. Суръати ҷудошавии радиоактивиро таъриф диҳед ва онро дар лаҳзаи t маълум кунед.

§ 8. Ҳалли масъалаҳо доир ба ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарин

Ба инсон кайҳо боз хосиятҳои аҷоиби табиат маълум аст. Масалан, кӣ амалиёти замбури асалро мушоҳида накардааст?

Замбур чакраи асалро аз шукуфаи гул гирифта то ба қутии асал рост парвоз мекунад, ба умеди он, ки қувва ва вақти хешро **сарфа** карда дар давоми рӯз **бештар** рафтуо кунад ва ҳар чӣ **зиёдтар** асал ҷамъ оварад.

Дар замини хушк растанӣ вертикалӣ ба поён реша медавонад, то ки ба нуқтаи **баландтарини** сатҳи намнок рафта расад.

Офтобпараст рӯи худро ба офтоб мегардонад, то ин ки бештар энергияи офтобро гирад.

Олими Юнони қадим Герони Александрӣ (асри I –и мелод) ва 1700 сол баъдтар олими фаронсавӣ П. Ферма ва Р. Декарт дар физика ҳодисаҳои зеринро муқаррар карданд:

Нури равшанӣ дар муҳити гайриякҷинса ҳамингуна траекторияеро интихоб мекунанд, ки барои бартараф намудани монеаи тамоми роҳ вақти **камтарин** сарф шавад. Табиат сарфакор аст!

Дар биология аз замони Дарвин (солҳои 1858) ба ақидае омаданд, ки **бо роҳи интихоби табиӣ беҳтарин** зоти ҳайвонҳо ва растаниҳо ба вуҷуд меоянд.

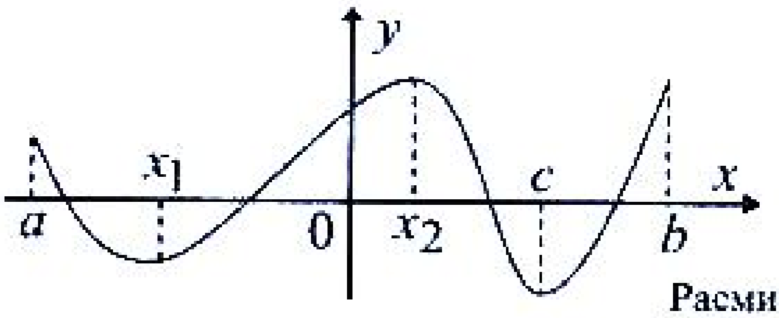
Инсон чун ҷузъи табиат доимо дар кӯшиши он аст, ки масъалаҳои ҳаёт ба миён гузоштаро беҳтару хубтар ҳал кунад. Чора меҷӯяд, ки захираҳои меҳнатиро (баҳри баланд бардоштани сатҳи зиндагии худ) **сарфакорона** истифода барад. Бо **сарфи ками вақт** даромади зиёд ба даст орад, бо харҷи **кам** маҳсулнокии баландро соҳиб шавад ва ғ.

Албатта, ҳамаи ин масъалаҳоро ба забони математикӣ ифода кардан мумкин нест. Вале тадқиқи қисми онҳо, ки ба **ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарини функсия вобастаанд,** бо методҳои таҳлили математикӣ имконпазир аст. Инро нишон медиҳем.

Фарз мекунем, ки функсияи $y = f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ дода шуда, дар ҳамаи нуқтаҳои ин фосила дорои ҳосила аст. Барои ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарини функсия **нуқтаҳои критикиро**, ки дохили ин фосила аст маълум намуда, **қимати функсияро дар ин нуқтаҳо, аввал ва охири порча** ҳисоб мекунем. Баъд аз ададҳои ҳосилшуда калонтарин ва хурдтарини онҳоро маълум мекунем.

Дар расми 65 графики функсияи $y = f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ тасвир ёфтааст. Дар нуқтаи C функсия ба қимати хурдтарин ва дар охири порча – нуқтаи b бошад ба қимати калонтарин соҳиб мешавад.

Мисолҳо.



Расми 65

1. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияро дар фосилаи $[1;3)$ ёбед: $y = 4x - x^2 + 6$

Ҳал. Ҳосилаи функсияро меёбем: $y' = 4 - 2x$.

Решаҳои он: $4 - 2x = 0; \quad x = 2,$

яъне, функсияи y якто нуқтаи критикӣ дорад. Ва он ба фосилаи $[1;3)$ дохил аст. Қиматҳои y-ро танҳо дар нуқтаҳои 1 ва 2 ҳисоб мекунем, зеро 3 ба фосила дохил нест:

Дар фосилаи $[1;3)$:

Ҷавоб: $y_{max} = 10$; функсия қимати хурдтарин надорад.

2. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи $y = \sin^2 x + 4\sin x + 2$-ро дар порчаи $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ёбед.

Ҳал. Масъаларо айни ҳол бе ёрии ҳосила ҳал кардан осонтар аст. Онро ба тарзи оддӣ-**табдилдиҳӣ** ва **истифодаи хосияти маҳдудияти** функсияи $y = \sin x$ ҳал мекунем.

Азбаски $y = \sin^2 x + 4\sin x + 2 = (\sin x + 2)^2 - 2$ ва $|\sin x| \le 1$ аст, қиматҳои функсияро дар охирҳои порчаи $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ҳисоб мекунем:

Ҷ а в о б:

$$y_{max} = \left(\sin\frac{\pi}{2} + 2\right)^2 - 2 = 7, \quad y_{min} = \left(\sin\frac{3\pi}{2} + 2\right)^2 - 2 = -1.$$

Методхое, ки Шумо дар ҳалли масъалаҳо истифода мебаред бояд ба хусусияти ҳар яке аз он мувофиқ бошад. Дар қатори методҳои умумӣ истифодаи тарзҳои хусусии ҳалро, ки онҳо тезтар ва ба осонӣ ба мақсад мерасонанд, аз ёд набароред.

Бисёр масъалаҳои амалӣ ба ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсия дар порчаи дода шуда мутааллиқанд. Ингуна масъалаҳоро - масъалаҳои **экстремалӣ** (лотинӣ - беҳтарин) меноманд.

М и с о л ҳ о.

Масъалаи 1. Туннел (англисӣ – иншооти зеризаминӣ) шакли росткунҷаро дорад, ки бо нимдоира тамом мешавад. Радиуси нимдоира чи гуна бошад, ки дар қимати маълуми периметр P масоҳати бурриш калонтарин бошад?

Ҳ а л. Методи моделиронии математикиро истифода мебарем.

Қадами 1. Расми масъаларо мекашем (расми 66).

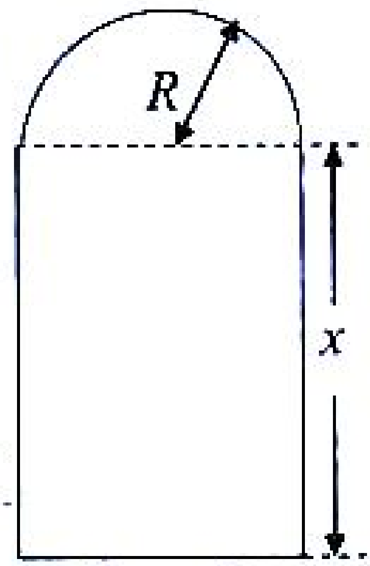
Бо R - радиуси нимдоира ва бо x - баландии росткунҷаро ишорат мекунем.

Қадами 2. Формулаи периметрро менависем:

$P = 2x + 2R + \pi R$

Қадами 3. x ва R-ро тағйирёбанда мешуморем:

$2x = P - 2R - \pi R$



Расми 66

Қадами 4. Масоҳати буриши туннелро ҳамчун функсияи радиуси нимдоира ифода мекунем:

$$S = \frac{\pi R^2}{2} + 2Rx = \frac{\pi R^2}{2} + R(P - 2R - \pi R) = PR - 2R^2 - \frac{\pi R^2}{2}$$

Қадами 5. ҳосила мегирем:

$$S'(R) = \left(PR - 2R^2 - \frac{\pi R^2}{2}\right)' = P - 4R - \pi R$$

Қадами 6. Нуқтаҳои критикиро меёбем:

$$S'(R) = 0, \quad P - 4R - \pi R = 0, \quad R = \frac{P}{4+\pi}.$$

Агар аломати ҳосиларо дар фосилаи $\left(P; \frac{P}{4+\pi}\right]$ муайян кунем дидан душвор нест, ки дар қимати $R = \frac{P}{4+\pi}$ функсия $S(R)$ ба қимати калонтарин соҳиб мешавад:

$$S_{\max} = P \cdot \frac{P}{4+\pi} - \left(\frac{P}{4+\pi}\right)^2 \cdot \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{P^2}{2(4+\pi)}.$$

Ҷ а в о б: $R = \frac{P}{4+\pi}$

Амалиёти баёнгардида **хусусияти алгоритмӣ** дорад. Ва кулли масъалаҳои ба экстремум вобаста ҳамин тавр ҳал карда мешаванд.

Қайд: Баъзан дар масъалаҳо ба ҷои ибораи «масоҳати буриши калонтарин» ибораи «қобилияти гузарониш (ё роҳдиҳи)-и туннел»-ро истифода мебаранд, ки ҳамон як маъно дорад.

Масъалаи 2. Обхӯраи чарогоҳи говҳоро одатан аз се тахтаи якхелаи васеъгиашон $a_м$, ки дар зери кунҷи α мустаҳкам карда шудаанд, тайёр мекунанд. Бузургии кунҷи α бояд чигуна бошад, то ки обхӯраи ғунҷоишаш калонтарин ҳосил шавад?

Ҳ а л. **Тарзи 1.** Ғунҷоиши калонтарин ҳангоми буриши кундалангии калонтарин ҳосил мешавад. Пас, буриши кундалангии обхӯра трапетсияи баробарпаҳлӯ аст (расми 67).

Аз расми 67 маълум аст, ки:

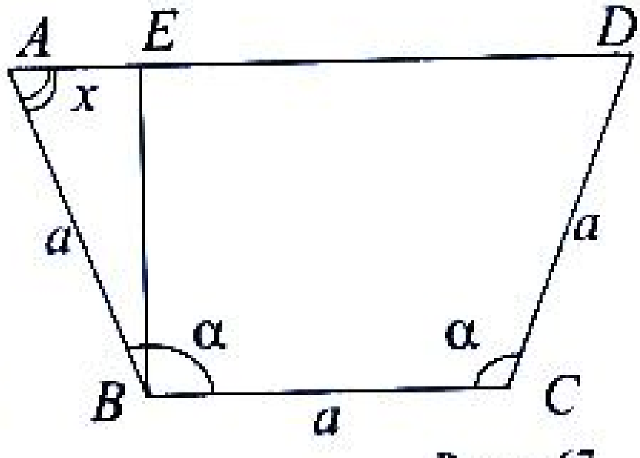
$\angle BAD = x,$

$AD = 2AE + BC = a + 2a\cos x,$

$BE = a\sin x,$

$AB = BC = CD = a.$

Агар бузургии кунҷи x маълум карда шавад, он гоҳ кунҷи α -ро ёфтан мумкин аст.



Расми 67

Масоҳати трапетсия:

$$S(x)=\frac{BC+AD}{2}\cdot BE=\frac{a+a+2a\cos x}{2}\cdot a\sin x=a^2(1+\cos x)\sin x,\ \left(0<x\le\frac{\pi}{2}\right).$$

Нуқтаҳои критикиро меёбем:

$$\frac{ds}{dx}=\left(a^2(1+\cos x)\sin x\right)'=a^2(\cos x+\cos 2x)=$$

(мувофиқи формулаи косинуси суммаи ду кунҷ)

$$=2a^2\cos\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2};$$

$$\frac{ds}{dx}=0,\quad 2a^2\cos\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0,\quad \cos\frac{3x}{2}=0,\quad \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{3};$$

$$\cos\frac{x}{2}=0,\quad \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2},\quad x=\pi\notin\left(0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Ба ҳамин тариқ, ҳангоми $x=\frac{\pi}{3}$ будан S дорои қимати калонтарин мешавад:

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right)=a^2\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Дар ин маврид, $2x + 2\alpha = 360^\circ$, $\alpha = 120^\circ$

Ҷ а в о б: $\alpha = 120^\circ$.

Т а р з и 2. Обхӯра призмаест, ки асосаш $ABCD$ - трапетсияи баробарпаҳлӯ аст. Дарозии тахта (баландии призма)-ро бо l ишора мекунем:

$$V = Sh = la^2(1+\cos x)\cdot\sin x$$

Нуктаҳои критикӣ бошанд:

$$V'(x) = la^2\left(\cos x(1+\cos x) - \sin^2 x\right) =$$

$$= la^2\left(2\cos^2 x + \cos x - 1\right) = 2la^2\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(\cos x + 1)$$

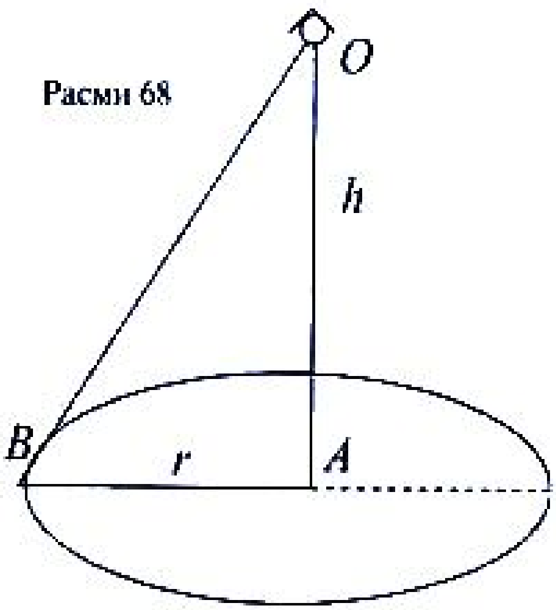
$$V'(x) = 0,\ \cos x = \frac{1}{2},\ x = \frac{\pi}{3},\ \cos x = -1,\ x = \pi \notin \left(0; \frac{\pi}{3}\right],$$

яъне, дар фосилаи $\left(0; \frac{\pi}{3}\right]$ ҳосила танҳо дар нуқтаи $x = \frac{\pi}{3}$ баробари сифр аст. Ва дар ин нуқта функсия V ба қимати калонтарин молик мешавад:

$$V_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 l.$$

Қимати x-ро дониста α-ро меёбем: $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

Масъалаи 3. Саҳни зали мактаб доиравӣ буда, радиусаш ба r баробар аст. Онро бо як лампаи дар марказ овезон равшан кардан лозим меояд. Лампа дар кадом баландӣ бояд овезон бошад, то ки дар сарҳади зал равшаннокии баландтар ҳосил шавад (расми 68).



Расми 68

Ҳ а л. Аз физика маълум аст, ки равшаннокии ягон сатҳ ба квадрати масофа аз манбаъ то сатҳ мутаносиби чаппа буда, ба косинуси кунҷи афтиш мутаносиби роста аст:

$$E = \frac{I}{r^2} \cdot \cos\alpha$$

дар ин ҷо I-сели рушноӣ, r-масофа аз манбаъ то сатҳ.

Равшаннокиро дар нуқтаи B меёбем. Аз расм дида мешавад, ки:

$$OB = \sqrt{r^2 + h^2}, \quad \cos\alpha = \frac{AO}{OB} = \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

Онгоҳ, $E = \frac{I}{OB^2} \cdot \cos\alpha = \frac{I}{(r^2 + h^2)} \cdot \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{Ih}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Азбаски I доимӣ аст, пас равшаннокӣ E танҳо аз h-масофа аз лампа то маркази зал вобастагӣ дорад.

Нуқтаҳои критикиро маълум мекунем:

$$\frac{dE}{dh} = \left(\frac{Ih}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\right)' = \frac{I(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - 3Ih^2(r^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{(r^2 + h^2)^3}.$$

$$\frac{dE}{dh} = 0; \ \sqrt{(r^2 + h^2)^3} - 3h^2\sqrt{r^2 + h^2} = 0; \ r^2 - 2h^2 = 0; \ h = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

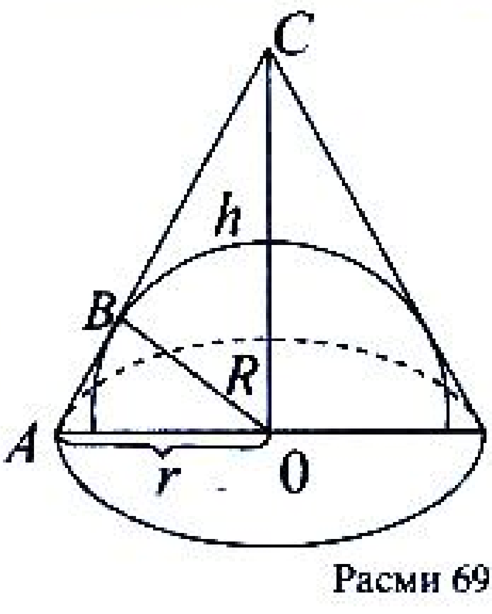
Ҷ а в о б: Равшаннокӣ ҳамон вақт ба қимати максималӣ соҳиб мешавад, ки агар $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$ бошад.

Масъалаи 4. Баландии конуси ҳаҷмаш хурдтаринеро ёбед, ки ба нимкураи радиусаш R берункашида, маркази асосии конус дар маркази кура воқеъ бошад.

Ҳ а л. Бо r ва h мувофиқан радиус ва баландии конусро ишорат мекунем (расми 69).

Ҳаҷми конус: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Дар формула ду номаълум r ва h дохил аст. Онҳоро ба воситаи радиуси нимкура ифода мекунем. Аз расм дида мешавад, ки:



Расми 69

$$\Delta AOC \sim \Delta OBC$$

Бинобар ин, $\frac{OA}{AC}=\frac{OB}{OC}$ (аломати якуми монандии секунҷҳо):

$$\frac{r}{AC}=\frac{R}{h}$$

Аз секунҷаи росткунҷаи AOC меёбем: $AC=\sqrt{h^2+r^2}$.

Онгоҳ, $\frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}}=\frac{R}{h}$ ва $r^2=\frac{R^2h^2}{h^2-R^2}$

Дар натиҷа, $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\frac{h^3}{h^2-R^2}$.

Нуқтаҳои критикиро меёбем:

$$V'(h)=0; \qquad \left(\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\frac{h^3}{h^2-R^2}\right)'=0;$$

$$\frac{\pi R^2h^2\left(h^2-3R^2\right)}{3\left(h^2-R^2\right)^2}=0; \qquad h=R\sqrt{3}.$$

ҳамин тавр, агар $h=R\sqrt{3}$ бошад.

$$V_{\min}=\frac{\pi R^2}{3}\cdot\frac{3R^3}{3R^2-R^2}\cdot R\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi R^3$$

мешавад.

Ҷ а в о б. $V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi R^3$

?

1. Алгоритми ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарини функсияро дар порча баён кунед.
2. Хусусияти алгоритми доштани ҳалли масъалаҳо ба экстремумро шарҳ диҳед. Зарурияти ин гуна масъалаҳоро дар чӣ мебинед?

Машқхо

Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияҳоро дар порчаи дода шуда ёбед ($54^\circ - 57^*$):

54°. а) $y = x^2 - 2, \ [0;2]$; б) $y = x^2 - 4x + 3, \ [1;2]$;

в) $y = \frac{1}{3}x^3 - x, \ [-1;2]$; г) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2, \ [-1;1]$.

55. а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x, \ [-2;4]$; б) $y = 4x^2 + \frac{1}{x}, \ (0;1]$;

в) $y = x\sqrt{3 - x}, \ [1;3]$; г) $y = -x^4 + 4x^3 + 7, \ [-1;3]$.

56. а) $y = \sqrt{100 - x^2}, \ [-6;8]$; б) $y = \sin 2x - x, \ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

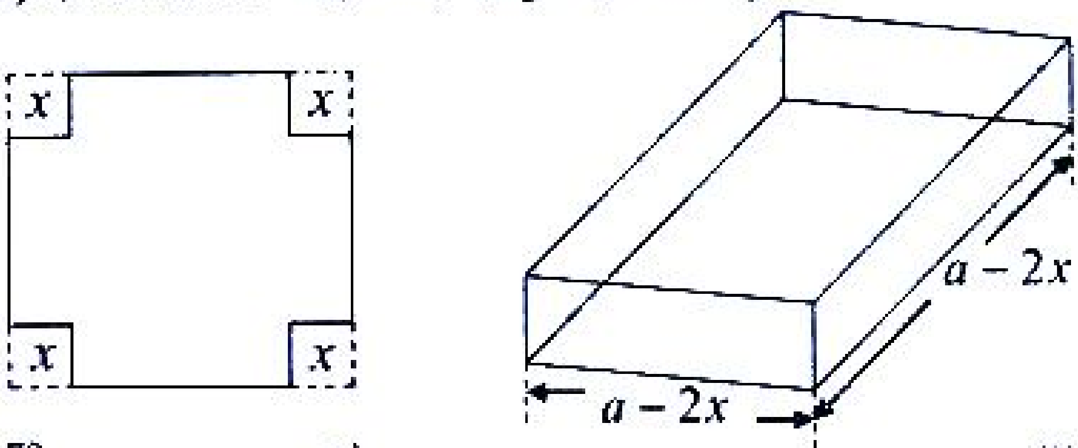
в) $y = x^3 - x + 1, \ [0;3]$; г) $y = -3x^4 + 6x^2 - 1, \ [-2;2]$.

57^*. а) $y = x - |x|, \ [-1;1]$; б) $y = -x^2 + 3|x + 1| + 2, \ [-2;2]$.

58. Аз гӯшаҳои тунукаи квадратшакли тарафаш a квадратҳои якхеларо бурида кат намуданд ва қуттии кушодаи ҳаҷмаш калонтаринро ҳосил карданд (расми 70, а-б)

а) Тарафи квадрати буридашударо ёбед.

б) ҳангоми $a = 1{,}5м$ ҳаҷмро ҳисоб кунед.



Расми 70 а) б)

59. Барои тайёр кардани қуттии кушода аз буридаи тунукаи шакли секунҷаи баробартараф доштаи тарафаш a истифода мебаранд. Барои он ки ғунҷоиши қуттӣ калонтарин шавад, аз бурида порчаи росткунҷаи масоҳаташ калонтаринро буридан лозим аст. Ин корро чӣ тавр бояд иҷро кард?

60. Дар секунҷаи баробартарафи тарафаш $a = 30см$ росткунҷаи масоҳаташ калонтаринро кашидан лозим аст. Тарафҳои росткунҷа чи гуна бояд бошанд?

61. Дар майдончаи спортии назди мактаб роҳи дарозиаш l-ро барои давидан тайёр намуданд. Қарор доданд, ки дар қисми ба роҳ маҳдуд буда, ки шакли нимдоираҳоро доранд, гул шинонанд. Барои он ки масоҳати шакли дар расми 71 тасвир ёфта калонтарин бошад, бузургиҳои AB ва AD бояд чи гуна бошанд?

Расми 71

Расми 71

Масоҳатро барои $l = 100м$ ҳисоб кунед. – Чаро $y = 0$?

62. Траекторияи ҷараёни обе, ки насоси обкашӣ ба боло мепартояд, бо параболаи $y = 3x - \frac{1}{8}x^2$ ифода меёбад. Баландии калонтарин ва дурии калонтарини афтиши обро муайян кунед.

63. Дар саҳифаи китоб матни нашрӣ $S\ см^2$-ро ишғол мекунад. Васеъгии қисми болоӣ ва поёнии саҳифа a см, аз чап ба рост бояд b см бошад.

а) Сарфи қоғазро дар назар дошта, андозаҳои саҳифаро тарзе маълум кунед, ки масоҳати саҳифаи матндор калонтарин бошад.

б) Ҳисоббарориро ҳангоми $S = 150см^2$, $a = 3см$ ва $b = 2см$ иҷро кунед.

64. Сохтани канали обёрикунандаи буришаш росткунҷа ба лоиҳа даровarда шудааст. Андозаҳои буриш чи гуна бояд бошанд, то ки барои рӯйкашкунии деворҳо ва чуқурии канали дарозиаш l миқдори камтарини материал сарф шавад? Барои рӯйбасткунии 1 км канал сарфи камтарини материал чӣ қадар аст?

Масоҳати сатҳи рӯйкашкунандаро дар мавриди:

а) $x = 3$ м, $y = 1{,}5$ м ва $S_{буриш} = 4{,}5\ м^2$;

б) $x = 2{,}25$ м, $y = 2$ м ва $S_{буриш} = 4{,}5\ м^2$;

ҳисоб карда, онҳоро муқоиса кунед.

65. Буриши канал шакли росткунҷа дошта, периметри он бе қисми болоӣ (хати расиши моеъ) ба p ва дарозии канал ба l баробар аст. Ҳамин гуна андозаҳои буришро муайян кунед, ки ҳангоми бо об пур кардани канал ҳаҷми он калонтарин бошад.

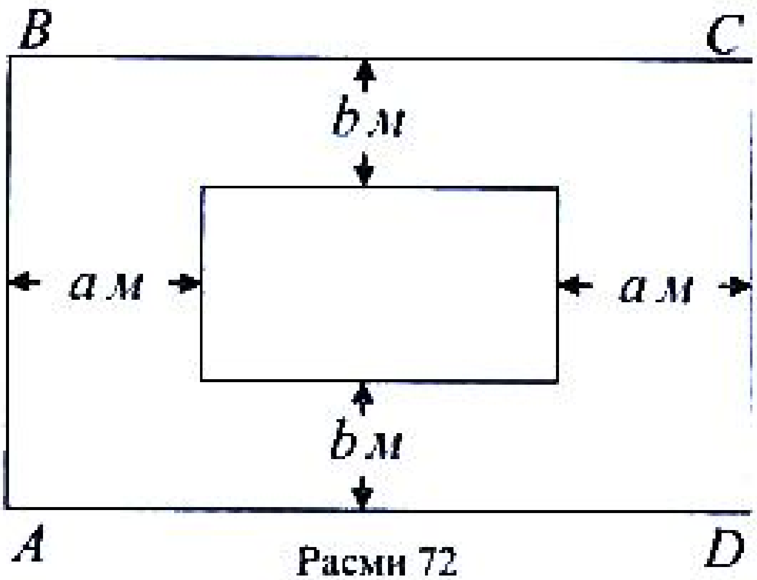
Ҳаҷми оби каналро дар ҳолати:

а) $p = 12$ м, $x = 6$ м, $y = 3$ м ва $l = 250\ м$;

б) $p = 12$ м, $x = 4$ м, $y = 4$ м ва $l = 250\ м$;

ҳисоб карда, хулоса бароред.

66. Барои сохтани иморати росткунҷашакли масоҳаташ S майдони росткунҷаеро ҷудо карданд, ки сарҳади он аз сохтумон ба масофаи a м ва b м дур аст (нигаред ба расми 72). Андозаҳои бино чигуна бояд бошанд, ки масоҳати майдони $ABCD$ хурдтарин шавад? Ҳангоми $a = 36$ м, $b = 16$ м ва $S = 400\ м^2$ масоҳати хурдтарини майдонро ҳисоб кунед.



Расми 72

67. Барои системаи марказии гармидиҳӣ зарфи васеъкунандаи болояш пӯшида сохтанд, ки он шакли параллелепипеди росткунҷаро дорад.

Агар ҳаҷми зарф V ва баландиаш h бошад, дар кадом андозаҳои параллелепипед барои сохтани он миқдори камтарини материал сарф мешавад?

Дар мавриди $V = 75$ *л*, $h = 900$ *мм*, $S_{\min}$-ро ҳисоб кунед.

68. Тайёр кардани зарфи слиндрии аз боло кушодаи ҳаҷмаш a л зарур аст. Андозаҳои он чи гуна бояд бошанд, то ки барои сохтани зарф материали камтарин сарф шавад?

69. Андозаҳои зарфи слиндрии аз боло кушода чи гуна бояд бошанд, то ки ҳангоми маълум будани масоҳати сатҳи он S зарфи ҳаҷмаш калонтарин сохта шавад.

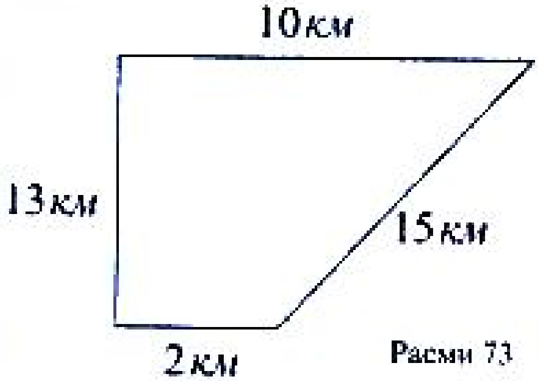
70. Аз 32 гӯгирд росткунҷаи масоҳаташ калонтарин созед.

71. (Кеплер). Дар доираи радиусаш R росткунҷаи масоҳаташ калонтарин созед.

Агар $R = 6$ *см* бошад, масоҳати калонтарин чӣ қадар аст?

72. (Евклид). Аз ҳамаи росткунҷаҳои периметрашон p кадомаш масоҳати калонтарин дорад?

73. (Л. Н. Толстой). Пах-қаҳрамони ҳикояи «Оё ба одам замини зиёд лозим аст?» бо бошқирдҳо ба чунин қарордод омад: ба маблағи 1000 рубл ба ӯ ҳамон қадар замине медиҳанд, ки чӣ қадаре вай дар тамоми рӯз аз баромад то фурӯравии Офтоб давр зада баромада тавонад. Ӯ дар ин вақт тарҳи трапетсияеро тай намуд, ки дар расми 73 оварда шудааст. Периметри он 40 км, масоҳаташ –78 км². Оё Пах метавонист, ки 40 км тай карда, тарҳи чоркунҷаи масоҳаташ калонтаринро давр зада барояд?



Расми 73

74. Исбот кунед, ки аз ҳамаи призмаҳои асосашон чоркунҷа ва масоҳати сатҳашон S-куб ҳаҷми калонтарин дорад.

75. (Кеплер). Дар кураи дода шуда слиндри ҳаҷмаш калонтаринро созед. Нисбати диаметри асос ба баландии он чӣ қадар аст?

76. Ду ҷисм дар як вақт аз рӯи тарафҳои кунҷи рост ба ҳаракат даромаданд. Яке **аз қулла** бо суръати 10 км/соат ва дигаре **ба**

қулла бо суръати 30 км/соат ҳаракат мекард. Агар дар ибтидои ҳаракат масофаи байни онҳо 120 км бошад, баъди чанд вақт масофаи байнашон хурдтарин мешавад?

77. Аз пункти A ва B дар як вақт аспсавор бо суръати v_1 км/соат ва велосипедрон бо суръати v_2 км/соат аз рӯи тарафҳои кунҷи рост ба ҳаракат даромаданд. Агар дар ибтидои ҳаракат яке дар масофаи a км ва дигаре дар масофи b км аз қуллаи кунҷ 0 воқеъ бошад, баъди чанд вақт масофаи байни онҳо хурдтарин мешавад?

78. Деги бӯғӣ аз слиндре, ки бо ду нимсфера ба анҷом расидааст, иборат мебошад. Дар кадом қимати радиус барои тайёр кардани деги ҳаҷмаш v л об материали камтарин сарф мешавад?

79. Ҳамингуна ададеро ёбед, ки суммаи он ба квадрати худи адад қимати хурдтарин дошта бошад.

80. Дар зарфи слиндршакли пӯшидаи ҳаҷмаш V нисбати диаметри асос ба баландии он чӣ гуна бояд бошад, то ки барои сохтани зарф материали камтарин сарф шавад?

§ 9. Истифодаи ҳосила дар исботи айниятҳо ва нобаробариҳо

Дар баъзе ҳолатҳо истифодаи ҳосила имконият медиҳад, ки айниятҳо ва табдидиҳиҳои алгебравӣ ба осонӣ иҷро карда шавад.

Барои исботи айнияти $f(x) = \varphi(x)$ дар порчаи $[a;b]$ иҷро шудани шартҳои зерин кифоя аст:

1) Функсияҳои f, φ дар порчаи $[a;b]$ бефосилаанд.

2) Барои нуқтаи ихтиёрии $x \in [a;b]$, $f'(x) = \varphi'(x)$

3) Ақалан дар як нуқтаи $x_0 \in [a;b]$ шарти $f(x_0) = \varphi(x_0)$ иҷрошаванда бошад.

Инро дар мисолҳо нишон медиҳем.

1. Исбот мекунем, ки баробарии

$$(x+m+n)^2+(m+n-x)^2+(x-m+n)^2+(x+m-n)^2=4(x^2+m^2+n^2)$$

айният аст; дар ин ҷо m, n -доимиҳо.

Ҳ а л. Тарафи чап ва рости баробариро ҳамчун функсияи аргументи x дар $D(f)$ дида баромада, аз рӯи формулаи дараҷа ва функсияи мураккаб ҳосила мегирем:

$$f'(x)=\left((x+m+n)^2\right)'+\left((m+n-x)^2\right)'+\left((x-m+n)^2\right)'+$$

$$+\left((x+m-n)^2\right)'=2(x+m+n)(x+m+n)'+2(m+n-x)(m+n-x)'+$$

$$+2(x-m+n)(x-m+n)'+2(x+m-n)(x+m-n)'=2(x+m+n)\cdot 1+$$

$$+2(m+n-x)\cdot(-1)+2(x-m+n)\cdot 1+2(x+m-n)\cdot 1=8x;$$

$$\varphi'(x)=\left(4(x^2+m^2+n^2)\right)'=8x.$$

Азбаски $f'(x)=\varphi'(x)=8x$, пас баробарӣ айният аст. Агар ба назар гирем, ки ифодаҳои дар қавс буда, квадрати суммаи се ададро ифода мекунад, онгоҳ ин мисолро бе истифодаи ҳосила, бо тарзи муқаррарӣ низ ҳал кардан мумкин буд.

Вале дар мисоли зер, ки табдилдиҳии зиёди тригонометриро талаб мекунад, истифодаи ҳосила ҳалли онро хеле осон мегардонад.

2. Дурустии айниятро нишон диҳед:

$$2\cos^2 x-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}=\cos^4 x+\frac{5}{8}$$

Ҳ а л. Ишорат мекунем:

$$f(x)=2\cos^2 x-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}, \qquad D(f)=R;$$

$$f_1(x)=\cos^4 x+\frac{5}{8}, \qquad D(f_1)=R.$$

Ҳосилаҳои функсияҳоро меёбем:

$$f'(x)=\left(2\cos^2 x-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}\right)'=-4\cos x\sin x+\sin 2x-\frac{\sin 4x}{2}=$$

$$=-2\sin 2x+\sin 2x-\sin 2x\cos 2x=-\sin 2x(1+\cos 2x)=$$

$$=-2\sin\ 2x\cos^2\ x;$$

$$f_1'(x)=\left(\cos^4 x+\frac{5}{8}\right)'=-4\cos^3 x\sin x=$$

$$=-4\cos^2 x\cdot\cos x\sin x=-2\sin 2x\cos^2 x.$$

Ҳосилаҳои ҳар ду тараф баробар шудаанд, пас баробарӣ айният будааст.

Барои исботи нобаробариҳо бо ёрии ҳосила маълумотҳое, ки дар § 4 ифода ёфтаанд, кифоя аст.

***Ба ёд меорем*, ки аз шарти зарурии экстремум далели зерин бармеояд:**

Агар функсияи $y=f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ муайян ва бефосила бошад, онгоҳ вай дар ин фосила қимати хурдтарин (m) ва калонтарин (M)-ро доро буда шарти

$$m\le f(x)\le M \qquad \textbf{(1)}$$

ҷой дорад.

Аз ин далел **алгоритми** зерини ҳалли нобаробарӣ дар порчаи $[a;b]$ бармеояд.

1) Ҳосилаи f'-ро меёбем.

2) Нуқтаҳои критикиро дар порчаи дода шуда маълум мекунем.

3) Аломати ҳосиларо дар ин нуқтаҳо меёбем. Фарз мекунем, ки функсия дар нуқтаи $x_0\in[a;b]$-минимум ва дар нуқтаи x_1 -максимум дорад. Онҳоро ҳисоб мекунем.

4) Қиматҳои функсияро дар охирҳои порча меёбем. $f(a)=m$, $f(b)=M$.

5) Барои ҳамаи $x \in [a; b]$ хулоса мебарорем.

3. Нишон диҳед, ки барои ҳамаи $x \in [-2; 4]$ нобаробарии $-20 \le x^3 - 3x^2 \le 16$ дуруст аст.

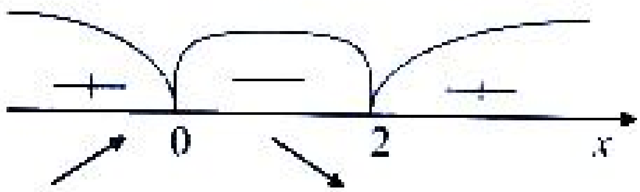
Ҳал.

1) Мегузорем: $f(x) = x^3 - 3x^2$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$;

2) Нуқтаҳои критикӣ: $f'(x) = 0$; $3x(x-2) = 0$; $x = 0$, $x = 2$.

3) Аломати ҳосиларо дар ин фосилаҳо маълум мекунем (расми 74):

$$f_{\max}(0) = 0 \quad \text{ва} \quad f_{\min}(2) = -4$$



Расми 74

4) Қиматҳои функсияро дар охирҳои порча меёбем:

$f(-2) = -8 - 12 = -20$; $\qquad f(4) = 64 - 48 = 16$.

5) Мувофиқи тасдиқи (1) нобаробарии $-20 \le x^3 - 3x^2 \le 16$ дар фосилаи $[-2; 4]$ дуруст аст.

?

1. Ҳангоми исботи айниятҳо дар ягон порча ичрои кадом шартҳо кифоянд?
2. Алгоритми исботи нобаробариҳоро дар ягон порча баён кунед.
3. Моҳияти истифодаи ҳосила ҳангоми исботи айниятҳо ва нобаробариҳо дар чӣ ифода меёбад?

Машқҳо

Айниятҳоро бо ёрии ҳосила исбот кунед ($81^\circ - 83^*$):

81°. а) $\dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = \dfrac{1 + tgx}{1 - tgx}$; б) $\sin^2 x \cos^2 x = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8}\cos 4x$;

в) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 x$; г) $(1-x)(1 + x + x^2 + x^3) = 1 - x^4$.

82. а) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2-1;$

б) $\sin^2 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1;$

в) $\sin^2 x+\cos(60^\circ+x)\cdot\cos(60^\circ-x)=\frac{1}{4};$

г) $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{2}\sin^2 2x;$

83*. а) $16\sin^4 x-(\sin^2 x-3\cos^2 x)^2=24\sin^2 x-9;$

б) $4(\cos 3x\cdot\sin^3 x+\sin 3x\cdot\cos^3 x)=3\sin 4x;$

в) $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=-1.$

84. Дурустии нобаробариҳоро барои фосилаҳои дода шуда нишон диҳед:

а) $8\sqrt{x+1}>8-2x-x^2,\ [0;\,8];$

б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}\le\frac{\sin x}{2+\cos x}\le\frac{\sqrt{3}}{3},\quad x\in R;$

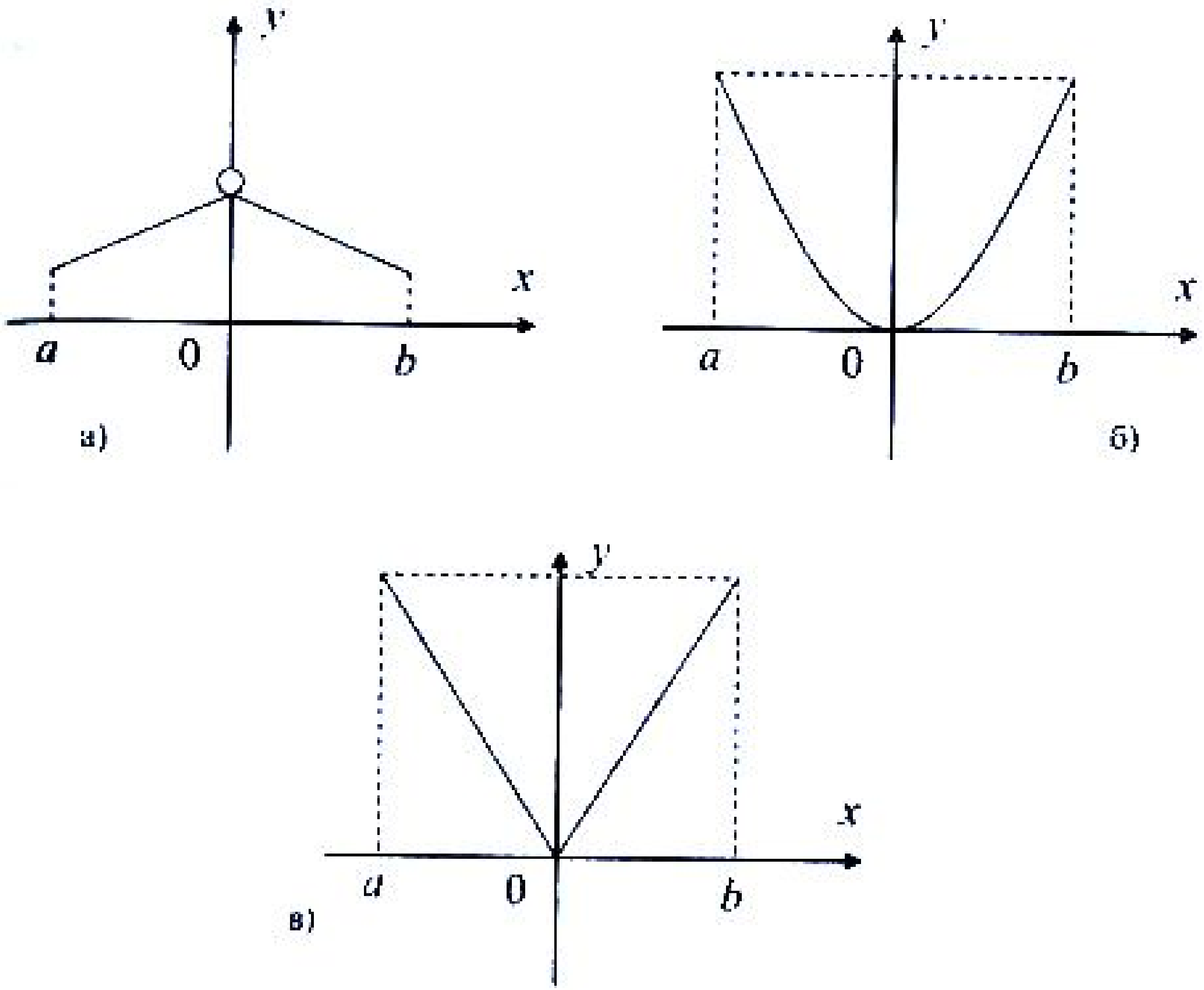
в) $0\le\sin x+tgx\le\frac{\sqrt{2}}{2}+1,\quad x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right].$

Худро санҷед!

Оё дуруст аст, ки:

1. Ҳаргуна функсия қимати калонтарин дорад.
2. Ҳаргуне функсияи аз боло маҳдуд қимати калонтарин дорад.
3. Агар ягон адад ҳамаи қиматҳои функсияро маҳдуд карда, бо яке аз онҳо мувофиқ ояд, онгоҳ ин адад-қимати калонтарини функсия аст.
4. Ба расми 75 бо диққат назар кунед: ба қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияҳо чӣ ҳолат рӯй медиҳад?

5.



Расми 75

Кори амалии № 5

Мақсади кор: Истифоди функсияҳои тригонометрӣ барои бо тарзи параметрӣ дода шудани хати кач.

<u>Омӯзиши траекторияи ҳаракати тир</u>

Муодилаҳои ҳаракати тири тӯп бо тарзи параметрӣ дода шуда аст:

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha \qquad (1)$$

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \qquad (2)$$

дар ин ҷо v_0 -суръати ибтидоии тир, α -кунҷи моилии тири парвозкунанда ба ҳамворӣ, $g = 9{,}8\, м/с^2$

1. Агар $v_0 = 400\,м/с$ ва $\alpha = 60^\circ$ бошад вобаста ба t дар фосилаи $[0;40]$ ҷадвали дурӣ ва баландии парвози тирро тартиб диҳед (ҷадвали 11). Қимати t-ро баъди ҳар як 5 сония $(t = 0,5,10,15,...,30,35,40)$ гирифта ҳисоббарориро то бутунҳо яклухт кунед.

Ҷадвали 10

t	1	5	10	15	20	25	30	35	40
$x(t)$	0	1000м	...						...
$y(t)$	0	1600м	...						...

2. Масштаби мувофиқ интихоб намуда, нуктаҳоро аз рӯи координатаҳои ёфташуда дар системаи координати декартӣ қайд кунед.

3. Нуктаҳои сохташударо аз рӯи хати кач пайваст кунед. Ин хати кач – траекторияи ҳаракати тир аст.

4. Аз нақша координатаҳои нуктаҳоро дар лаҳзаи $t = 1;4;9;12;16,5;22,5;37;39,5$ маълум кунед.

5. Аз муодилаҳои (1) ва (2) t-ро хориҷ карда, нишон диҳед, ки траекторияи ҳаракат

$$y = ax^2 + bx \qquad (3)$$

парабола ҳаст (дар ин ҷо, $a = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}$, $b = tg\alpha$).

6. Дурии парвози тирро муайян кунед.

7. Аз муодилаи (1) истифода бурда вақти парвози тирро маълум кунед.

8. Координатаҳои суръатро ёбед.

9. Суръати ҳаракати тирро дар лаҳзаи $t = 0,1,2,3,...,10$ ҳисоб кунед.

Супориши мустақилона доир ба боби V

Варианти 1°

1. Функсияи $y = x^3 - x + 1$-ро тадқиқ намуда, графикашро созед.

2. Нуқта аз рӯи қонуни $x(t) = t^3 - 3t^2 + 2t - 1$ ростхатта ҳаракат мекунад (x-бо метрҳо, t-бо сонияҳо). Шитоби нуқтаро дар лаҳзаи $t = 3c$ ёбед.

3. Қимати тақрибии $f(x) = 4x^3 - 10x^2 - 5x + 12$ ҳангоми $x = 1{,}995$ ёфта шавад.

4. Қимати хурдтарин ва калонтарини функсияи $y = -3x^2 + x - 1$-ро дар порчаи $[0;3]$ ёбед.

Варианти 2

1. Адади 9-ро ба ду зарбшавандаҳои мусбат тавре ҷудо намоед, ки суммаи хурдтаринро дошта бошад.

2. Нуқта аз рӯи қонуни $S(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4t$ ҳаракат мекунад. Шитоби онро дар лаҳзаи $t = 2c$ ёбед.

3. Функсияи $f(x) = -3x^2 + x$-ро тадқиқ карда, графики онро созед. Дар кадом қимати a муодилаи $f(x) = -a$ ду реша дорад?

4. Қимати тақрибии $\dfrac{1}{0{,}999^{20}}$-ро ҳисоб кунед.

Варианти 3*

1. Функсияи $y = -x^2 + 4x$-ро доир ба экстремум тадқиқ кунед.

2. Функсияи $y = x^4 - 8x^2 - 9$ дода шудааст:

а) қимати калонтарин ва хурдтарини онро дар фосилаи $[-1;1]$ ёбед.

б) Қимати тақрибии онро ҳангоми $x = 0{,}15$ ҳисоб кунед.

в) Функсияро тадқиқ карда, графики онро созед.

3. Қонуни ҳаракати ростхаттаи ҷисм бо муодилаи $S = -t^3 + 3t^2 + 9t + 3$ дода шудааст. Суръати максималии ҳаракати ҷисм (S -бо метрҳо, t -бо сонияҳо)-ро ёбед.

4. Бо истифодаи ҳосила дурустии айниятро нишон диҳед: $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

МАШҚҲОИ ИЛОВА ОИД БА БОБИ V

Ба параграфҳои 1-3

85. Фосилаҳои афзуншавӣ (камшавӣ)-и функсияҳои зеринро ёбед:

1) $y = \dfrac{x}{x+1}$; 2) $y = 2x^2 + 3x + 4$;

3) $y = 3x^2 + 2x + 1$; 4) $y = 3x^2 - 2x + 1$.

86. Экстремумҳои функсияҳои зеринро ёфта, графики онҳоро созед.

1) $y = 3x^2 - x^3$; 2) $y = x^4 - 2x^3 + 3$;

3) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$; 4) $y = \dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$.

Ба параграфи 4

87. Функсияро тадқиқ намуда, графикашро созед:

а) $y = x^2 - 5x + 6$; б) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x - 2$;

в) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 1$; г) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Ба параграфҳои 5-7

88. Дифференсиали функсияҳои зеринро ёбед:

а) $y = 3x^4 - 2x^3 + 4x - 1$; б) $y = \sin 4x + 2x$;

в) $y = x^2(x-2)$; г) $y = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x}$.

89. Қимати тақрибии ифодаҳои зеринро ёбед:

а) $\sin 31^{\circ}$; б) $\sqrt{209}$;

в) $0{,}99^3$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{9{,}09}}$.

90. Суръат ва шитоби ҷисмеро, ки ростхатта ҳаракат мекунад ёбед, агар ҳаракати нуқта бо муодилаҳои зерин дода шуда бошанд:

а) $x = t^3 + 5t^2 + 3;\quad t = 2c.$

б) $x = \sqrt{t+4},\quad t = 5c.$

в) $x = t^2 - 3t + 1,\quad t = 3c.$

г) $x = \sqrt[3]{2t+6},\quad t = 1c.$

Ба параграфҳои 8-9

91. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияҳои зеринро ёбед:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9,$ дар порчаи $[-2; 2]$;

2) $y = x^3 + 6x^2 + 9x,$ дар порчаи $[-4; 0]$;

3) $y = x^4 - 2x^2 + 3,$ дар порчаи $[-4; 3]$;

4) $y = x^4 - 8x^2 + 5,$ дар порчаи $[-3; 2]$.

ҶАВОБҲО

Боби I

8*. в) $a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}-b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}$; г) $\left|x^{\pi}-y^{\pi}\right|$. **10°.** в) 19; г) 1. **11°.** а) 25, г) 8. **12.** г) 6; **13.** б) 8. **14.** а) 3; в) 3. **15.** г) 1. **16.** а) 4; в) 8. **17.** в) 5. **19.** а) -2; г) 0. **20*.** б) $\frac{5}{4}$; г) 84. **21*.** г) 5. 23. в) (4; 1), (1; 4). **24.** б) (0; 0); в) (25; 49). **25.** а) (81; 16). **26.** в) (25; 9). **27*.** в) (1; 9), (9; 1). **28.** а) (9; 16), (16; 9). **35.** а) (16; 4), $\left(36; 1\frac{7}{9}\right)$. **36*.** в) (9; 4).

Боби II

2. $-\frac{84}{85}$ ва $-\frac{36}{85}$. **3.** $-1\frac{7}{19}$ ва $\frac{14}{29}$. **5.** а) 0; в) 0,5. **6.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0. **7°.** б) $-\cos(\alpha-\beta)$. **8.** а) $\sin 20°$; в) $\cos(\alpha-\beta)$. **9.** а) $\cos\beta$; б) $ctg\alpha$. **10*.** а) 0,5; б) 0. **11°.** б) $\sqrt{3}$. **12.** а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.** а) 1; б) $\sqrt{3}$. **14*.** $\frac{a^2+b^2-2}{2}$. **15°.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **16.** а) $\frac{5-12\sqrt{3}}{26}$. **17.** а) $\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

20. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{17}{81}$; г) $\sin 2\alpha=\frac{120}{169}$; $tg 2\alpha=\frac{120}{169}$.

21. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-tg 75°$; г) 0,36 ва 0,28. **23°.** а) $2\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$; г) $\cos^2\alpha$; г) $\sin 40°$; е) 1. **24.** а) 1; б) $ctg^2\alpha$; в) 1; г) $\sin 2\alpha$. **25.** а) $2\cdot(1-\cos\alpha)$; б) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$. **29.** а) $0{,}5\sqrt{2-\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{2}-1$. **30.** г) $\sqrt{0{,}1}$; $\sqrt{0{,}9}$ ва 0,(3). **31.** а) $-\frac{4}{\sqrt{17}}$; $-\frac{1}{17}$ ва 4.

34°. 1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{3}{5}$. **36*.** 1) 9; 2) $\frac{1}{4}$. **39.** а) $\sqrt{2}\cos 20^\circ$; б) $\cos 10^\circ$;

в) $2\sin 15^\circ \cdot \cos 5^\circ$; г) $\sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$. **40.** а) $-\sqrt{3}tg8$; б) $\sqrt{2}\cos\alpha$;

в) $-4\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha$; г) $4\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 5\alpha$. **46°.** б) 0,25;

в) $\frac{1}{2}\left(\cos\ 26^\circ - \frac{1}{2}\right)$. **47.** а) 1; б) $\sin^2\alpha - \cos^2\beta$;

в) $\frac{1}{2}(\sin\beta + \sin(\alpha + 3\beta))$. **48.** а) $\sin 3\alpha$; б) $-\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$. **49*.** а) $\frac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}$;

б) $\frac{1}{16}$. **50°.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$. **51.** г) 0. **52*.** в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

53°. а) $\frac{1}{2}$; г) 1. **54.** б) $\cos 2\alpha$; в) 1. **55*.** в) $\cos 4\alpha$; г) 1. **59°.** б) $-\frac{1}{2}$.

60. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$; **66*.** $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $tg\alpha = -\frac{12}{5}$.

67°. а)-б) ҳа. **68.** а) – б) ҳа. **76°.** а) π; в) $\frac{\pi}{3}$. **77.** а) 4π; в) $\frac{2}{5}\pi$.

78. а) 2π; б) π; в) 2π. **88.** а) ҷуфт; б) тоқ; в) тоқ; г) тоқ.

89. а) тоқ; г) ҷуфт. **95°.** а) $[2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in Z$;

б) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; в) $x \neq \pi k, k \in Z$. **96.** а) $x \neq 2\pi k, k \in Z$;

б) $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$; г) тири ададӣ, ғайр аз $x = \pi k, k \in Z$.

97. а) $\left[\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right], k \in Z$; г) $x \neq 2\pi k, k \in Z$. **98°.** а) $[0;2]$; б) $[0;2]$;

в) $[1;5]$; г) $(-\infty;+\infty)$. **99.** а) $[1;7]$; б) $[0;1]$; в) $[1;5]$; г) $[0;+\infty)$.

100. а) $[-2;2]$; **103°.** б) афзуншавӣ- $[4\pi k-2\pi;4\pi k]$ ва камшавӣ - $[4\pi k;2\pi-4\pi k]$, $k\in Z$.

104. а) афзуншавӣ - $\left[2\pi-k-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; камшавӣ - $\left[2\pi k+\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$.

105. а) афзуншавӣ - $\left[\pi k;\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right]$ ва камшавӣ - $\left[\pi k-\dfrac{\pi}{2};\pi k\right]$;

б) афзуншавӣ - $[6\pi k-3\pi-6;-6+6\pi k]$ ва камшавӣ - $[6\pi k-6;3\pi-6+6\pi k]$, $k\in Z$

в) афзуншавӣ - $\left(-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2};-\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}\right)$, $k\in Z$; г) камшавӣ - $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\dfrac{5\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. **107.** в) $ctg2$, $\cos 1$, $\sin 1$, $tg1$.

108. в) $ctg3$, $tg2$, $\cos 2$, $\sin 2$. **112.** а) $x_{\max}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$, $y_{\max}=5$; $x_{\min}=-\dfrac{5}{2}\pi+2\pi k$, $k\in Z$; $y_{\min}=-1$;

б) $x_{\max}=2\pi k$, $k\in Z$, $y_{\max}=1$; $x_{\min}=\pi+2\pi k$, $k\in Z$, $y_{\min}=-5$;

в) $x_{\max}=\dfrac{2\pi}{7}+2\pi k$, $k\in Z$, $y_{\max}=3$; $x_{\min}=\dfrac{9\pi}{7}+2\pi k$, $k\in Z$, $y_{\min}=-3$; г) $x_{\max}=\dfrac{5\pi}{28}+\pi k$, $k\in Z$,

$y_{\max}=1$; $x_{\min}=-\dfrac{9\pi}{7}+2\pi k$, $k\in Z$, $y_{\min}=-1$.

1°. б) $\frac{\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) вуҷуд надорад; е) $-\frac{\pi}{4}$; ё) $-\frac{\pi}{3}$. **2.** б) $\frac{5\pi}{9}$; в) π; г) $-30°$. **3.** а) $75°$. **4°.** а) $30°$; б) $\frac{\pi}{4}$. **6.** а) $\frac{8\sqrt{3}}{49}$. **8°.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) 0; г) π; д) вуҷуд надорад. **9.** $\frac{3\pi}{4}$. **10.** а) $\frac{19\pi}{12}$; б) π.

11°. а) $<$; б) $<$. 12. а) $>$; б) $=$. **13.** а) $=$. **15°.** а) 0; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{\pi}{4}$; г) 0; д) $\frac{\pi}{4}$. **17.** а) 0; б) $-\frac{\pi}{2}$. **19°.** а) 0; б) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

20. а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 21. а) $\frac{8}{7}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{\sqrt{14}}{5}-\frac{3\sqrt{2}}{20}$. **23.** ё) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. **24.** а) $x=\frac{5\pi}{24}-\frac{5}{4}\pi k$ ва $x=-\frac{5\pi}{12}-\frac{5\pi k}{2},\ k\in Z$.

25. а) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ ва $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **27.** а) $x=\pi k+\frac{\pi}{2},\ k\in Z$; б) $x=\frac{\pi}{6}(2k+1),\ k\in Z$; г) $x=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

28. а) $\frac{\pi n}{5},\ n\in Z$; б) $x=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$. **29*.** а) $\frac{\pi k}{12},\ k\in Z$; б) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. **30°.** а) $x=\frac{\pi}{6}(2k+1),\ k\in Z$; б) $x=\frac{\pi}{6}(2k+1),\ k\in Z$. **31.** а) $x=2\pi k,\ k\in Z$; б) $x=\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z$.

32. а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=2\pi k,\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5},\ k\in Z$

б) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $x=\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$.

33*. а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\frac{2\pi k}{5}$, $k\in Z$;

б) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

34°. а) $x=2\pi k$, $x=2arctg\frac{3}{4}+\ +2\pi k$, $k\in Z$

35. а) $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x=2k\pi-2arctg\frac{1}{7}$, $k\in Z$.

36. а) $x=-\frac{\pi}{6}+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **37°.** а) 1 ва $\sqrt{2}$; в) 5 ва 1. **38.** а) 5 ва – 3; б) 2,25 ва 0,25; в) 10 ва 1. **39.** а) 1 ва – 1; б) 3 ва – 1; в) надорад. **40°.** а) $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$;

б) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **41.** г) $x=-3\pi+4\pi k$, $k\in Z$ ва

$x=\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi k$, $k\in Z$. **42.** а) $\pm 30^\circ+180^\circ k$, $k\in Z$;

б) $x=\pm\frac{\pi}{4+\pi k}$, $k\in Z$. **43°.** б) $x=\pi k$, $k\in Z$;

г) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. **44*.** а) $x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

Нишондод. Суммаи дарачаҳои чорро то квадрати суммаи ду ифода пурра кунед, баъд формулаи $\sin 2\alpha$ -ро истифода баред;

б) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **45.** а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

46*. а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$; б) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$.

47°. а) $x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; б) $x = 180^\circ k$; в) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$;

д) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k,\ k \in Z$. **48.** б) $x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;

г) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\quad x = arctg2 + \pi k,\quad k \in Z$. **50*.** а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$x = arctg\frac{8}{15} + \pi k,\ k \in Z$; б) $x = \pi k,\ x = -arctg\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

52°. а) $x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(k + 2\pi),\quad y_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(k - 2\pi)$ ва

$x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(k + 2\pi),\ y_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(k - 2\pi),\ k, n \in Z$;

г) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi(k + n),\ y = \pm\frac{\pi}{6} + \pi(k - n),\ k, n \in Z$.

53. б) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi(k + n),\ y = \pm\frac{\pi}{6} + \pi(k - n),\ k, n \in Z$.

в) $x = y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. **54.** а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi(k + n)$,

$y = \frac{\pi}{4} + \pi(k + n),\ k, n \in Z$; в) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(k + n)$,

$y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(k - n),\ k, n \in Z$. **55°.** а) $x = \frac{\pi}{4} - \pi k,\ y = \pi k,\ k \in Z$;

б) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ y_1 = -2\pi k,\ x_2 = 2\pi k,\ y_2 = \frac{\pi}{2} - 2\pi k,\ k \in Z$.

56. а) $x_1 = \pi k,\ y_1 = \frac{\pi}{4} - \pi k$, ва $x_2 = \frac{\pi}{4} - \pi n,\ y_2 = \pi n,\ n \in Z$.

57*. а) $x_1 = 45^\circ + 180^\circ k$, $y_1 = 30^\circ - 180^\circ k$; $x_2 = 30^\circ + 180^\circ k$; $y_2 = 45^\circ - 180^\circ k$, $k \in Z$. **58°.** б) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;

в) $2\pi k - \frac{5\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$;

г) $2\pi k - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. **59.** б) $\pi k - \frac{3\pi}{8} < x < -\frac{\pi}{8} + \pi k$;

г) $\pi k \le x < \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

60. а) $\frac{\pi}{2}(2k-1) + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\arcsin 0{,}2 < x < \pi k + \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\arcsin 0{,}2$;

б) $\frac{4}{3}\pi k + \frac{2}{3}\arcsin\frac{1}{3} < x < -\frac{2}{3}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\pi(2k+1)$;

в) $2\pi k - \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$

Боби IV

3*. б) $\frac{x^2\Delta x + x(\Delta x)^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 - \Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$. **4°.** а) 3; 2 ва 0,4.

5. а) 0,5. **7°.** а) 0,5; б) $4x + \Delta x$. **10°.** б) $\Delta y = 0{,}08$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}2$.

33°. а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) – 5%; г) 3. **34.** а) $6x$; б) $8x+1$; в) x; г) $6x+2$.

35. а) $-\frac{5}{x^2}$; б) $-\frac{2}{3x^2}$; в) $-\frac{2}{x^3}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **36.** а) 6; б) 9. **37.** а) b; б) – 3; в) – 5; г) 1; д) – 2; е) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **38*.** а) $y = 2x - 1$; б) $y = 2x - 4$;

б) $y = x + 2\frac{3}{4}$; г) $y = -2x + 3$. **44°.** а) -3; б) -1; в) 1; г) 3. **45.** а) 6;

б) 2. **46*.** а) 1; в) 3. **47.** а) 1; в) 1; е) $\frac{1}{2}$. **48*.** а) 3; в) $-\frac{1}{2}$.

49°. 1) $4x$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - 4$; 14) $x(9x+4)$. **50.** 1) $2x^5 + 4x^7$;

18) $3x^2 + 10x - 1$. **51*.** 1) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3} - 15x^2$; 18) $\frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

56. а) $S = 5 + 3t - t^2$; б) $S = \frac{2t + 0{,}75t^2}{5}$. **57*.** б) $S = 1 - t$;

в) $y = \sqrt{1 - x^2}$. **65.** а) -2; 0; 2. **74.** г) $\frac{7}{2\sqrt{7x-3}}$.

75. б) $4(x^2 + 4x - 1)\cdot(x+2)$. **76*.** в) $\frac{2}{\sqrt{4x+5}}$. **78°.** а) 3; г) 3.

79. а) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{4}{3}$. **80*.** г) a. **84*.** а) $-\frac{a}{\sin^2(ax+k)}$.

85. а) $2\omega\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$. **90.** а) 0; 2; г) 0; $\frac{2}{3}$. **99.** $0{,}2\ ^{м}/_{сония^2}$.

Боби V

1°. б) $[2;\infty)$-меафзоянд; $(-\infty;2)$-кам мешаванд;

в) $(-\infty;-3)$-кам мешаванд; $(-3;+\infty)$-меафзоянд;

е) $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right]$-меафзоянд; $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$-кам мешаванд;

ё) $(-\infty;0)$-кам мешаванд; $(0;+\infty)$-меафзоянд.

2. в) $(-1;+\infty)$-меафзоянд; $(-\infty;-1)$-кам мешаванд;

г) $(-\infty;0,25)$-кам мешавад; $(0,25;+\infty)$-меафзояд;

д) $(-\infty;+\infty)$-меафзояд; е) $(-\infty;0)$ ва $(2;+\infty)$-меафзояд; $(0;2)$-кам мешавад; ё) $(-\infty;0)$ -кам мешавад; $(0;+\infty)$-меафзояд.

3. в) $(-\infty;0)$ ва $[3,2;5)$-кам мешавад; $(0;3,2]$-меафзояд.

4*. а) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ ва $(1;+\infty)$-меафзояд; $\left(\frac{1}{3};1\right)$-кам мешавад; в) $[0;8]$ ва $[12;+\infty)$-меафзояд; $(-\infty;0)$ ва $[8;12]$-кам мешавад.

5°. а) $x=-1$ нуқтаи min; б) $x=4$ нуқтаи max; г) Экстремум надорад; д) $x=2,5$ нуқтаи max. **6.** а) $x=0$ нуқтаи max, $x=3$ нуқтаи min; б) $x=1$ нуқтаи max; $x=2$ нуқтаи min; в) $x=2$ нуқтаи max; $x=-\frac{3}{2}$ нуқтаи min. **7.** а) $x=3$ нуқтаи max; б) $x=\frac{4}{3}$ нуқтаи max; в) $(1;2)$ нуқтаи max, $(-1;-2)$-нуқтаи min; д) экстремум надорад. **9.** а)-б) x_0 нуқтаи max, $f(x_0)$-max. функсия; в)-г) x_0-нуқтаи min, $f(x_0)$-min. функсия; д)-е) функсия экстремум надорад (қатъшавӣ); ё)-ж) функсия экстремум надорад (қатъшавӣ). **10*.** Нишондод: қимати хурдтарини функсия $\frac{4ac-b^2}{4a}=-12$, ҳангоми $x=-\frac{b}{2a}=6$ ҳосил мешавад. Коэффитсиенти ***a, b, c***-ро ёфта функсияро тадқиқ кунед. $x=6$-нуқтаи min. **11°.** а) $x_{max}=\frac{a}{2}$, $y_{max}=\frac{a^2}{4}$; б) $x_{max}=\frac{a}{4}$, $y_{max}=\frac{a^2}{8}$. **12.** а) $x_{max}=\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $y_{max}=\frac{a^4}{2}$.

13. а) $x_{min}=a+1$, $y_{min}=a+2$; б) $x_{max}=\frac{3a}{4}$, $y_{max}=\frac{27a^4}{256}$.

14. а) $x_{\min}=1,\quad y_{\min}=-4$; б) $x_{\max}=-1,\ y_{\max}=\frac{1}{3}$ ва $x_{\min}=1,$

$y_{\min}=-2\frac{1}{3}$. **21°.** а) $y-4x+2=0$. **22.** а) $y-4x+9=0$;

б) $y+3x=0$. **23*.** б) $y-3x=\frac{\pi}{2}$. **25.** б) 1,9938. **30*.** а) 0,0140.

33. 1,8м/с. **34.** а) 13. **36.** б) 21м/с ва $-\frac{1}{3}$ м/с; 13м/с ва $7\frac{2}{3}$ м/с.

39. $7{,}8\,{}^{км}\!/_{с}$. **40°.** $A\omega$; 0. **42.** Нишондод: аз $m=kx^2$ коэффитсиенти k-ро маълум намуда, дифференсиали онро ёбед. $20\,{}^{г}\!/_{см}$. **43.** $t=3с$. **44.** $\pm 6\ м/с$. **45°.** а) $x'(t)=3,\ \ y'(t)=-4,$ $v=5$ ва $3y+4x+8=0$. **46.** б) $x'(t)=2-8t;\quad y'(t)=1-2t;$ $v=|2t-1|\sqrt{5}$; $16y^2+8xy-x^2-4y+28=0$.

47*. а) $x'(t)=16t,\ \ y'(t)=32t$; **54°.** в) $y_{\max}=\frac{2}{3},\ y_{\min}=-\frac{2}{3}$;

г) $y_{\max}=2,\ \ y_{\min}=-12$. **55.** а) $y_{\max}=\frac{8}{3},\ y_{\min}=-\frac{2}{3}$; б) $y_{\max}=5,$ $y_{\min}=3$; в) $y_{\max}=2,\ \ y_{\min}=0$ дар нуқтаи $x=0$ ва $x=3$;
г) $y_{\max}=34,\ \ y_{\min}=2$. **56.** а) $y_{\max}=10,\ y_{\min}=6$;

б) $y_{\max}=\frac{\pi}{2},\ y_{\min}=-\frac{\pi}{2}$; в) $y_{\max}=25,\ y_{\min}=\frac{9-2\sqrt{3}}{9}$;

г) $y_{\max}=2,\ \ y_{\min}=2{,}5$. **57*.** а) $y_{\max}=0,\ \ y_{\min}=-2$;

в) $y_{\max}=7\frac{1}{4},\ \ y_{\min}=-1$. **58.** а) $x=\frac{a}{2}$, б) $\frac{2a^3}{27}$. **61.** $x=\frac{l}{\pi},\ y=0$.

62. 18м ва 24м. **63.** $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$. **64.** $x = \sqrt{25}$ ва $y = \sqrt{\frac{5}{2}}$;

а) $S_{\min} = 6000\,м^2$; б) $S_{\min} = 6500\,м^2$.

65. $x = \frac{p}{2}$, $y = \frac{p}{4}$ ва $v_{\max} = \frac{p^2 l}{8}$; а) $V_{\max} = 4500\,м^3$;

б) $V_{\max} = 4000\,м^2$. **66.** $x = \sqrt{\frac{as}{b}}$, $y = \sqrt{\frac{bs}{a}}$; $S_{\min} = 4620\,м^2$.

67. $x = y = \sqrt{\frac{V}{h}}$; $S_{\min} = 2\left(\frac{V}{h} + 2\sqrt{Vh}\right)$; $S_{\min} = 121\,дм^2$.

69. $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. **70.** $x = y = 8$. **71.** $x = y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, $S_{\min} = \frac{R^2}{2}$.

72. $x = \frac{a}{2}$. 75. $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{d}{h} = \sqrt{2}$. **76.** Баъди 3 соату 3 дақ. ҳаракат. **77.** $x = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}$. **78.** $R = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$, $v = \frac{4\pi R^3}{3}$-дег бояд сферикӣ бошад. **80.** $h = 2r$.

Мундарича

БА ХОТИР ГИРЕД!

Хосиятҳои дараҷа

1. $a^0=1$
2. $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$
3. $a^r a^s=a^{r+s}$
4. $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$
5. $(a^r)^s=a^{rs}$
6. $(ab)^r=a^r b^r$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$

Амалҳо бо решаҳо

1. $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$
2. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$
3. $\sqrt{a^2}=|a|$
4. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
5. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
6. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k=\sqrt[n]{a^{mk}}$
7. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$
8. $\sqrt[mn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^k}$

Ҳосилаи функсияҳо

1. $(C)^{1}=0$

2. $(KX+в)^{1}=K$

3. $(x^{n})^{1}=nx^{n-1}$

4. $(\sin x)^{1}=\cos x$

5. $(\cos x)^{1}=-\sin x$

6. $(tg\, x)^{1}=\frac{1}{\cos^{2}x}$

7. $(ctg\, x)^{1}=-\frac{1}{\sin^{2}x}$

Қоидаҳои дифференсиронӣ

1. $f^{1}(x)=\underset{\triangle x\to 0}{Lum}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$

2. $(Cu)^{1}=Cu$, C - доими

3. $(u+v)^{1}=u^{1}+v^{1}$

4. $(uv)^{1}=u^{1}v+uv^{1}$

5. $\left(\frac{u}{v}\right)^{1}=\frac{u^{1}v-uv^{1}}{v^{2}}$

u *ва* v *функсияҳо*

6. $f(\varphi(x))^{1}=f^{1}(\varphi(x))\cdot\varphi^{1}(x)$

6. *Мубодилаи расанда ба графики функсияи* $y=f(x)$

$$y-y_{0}=f^{1}(x_{0})(x-x_{0})$$