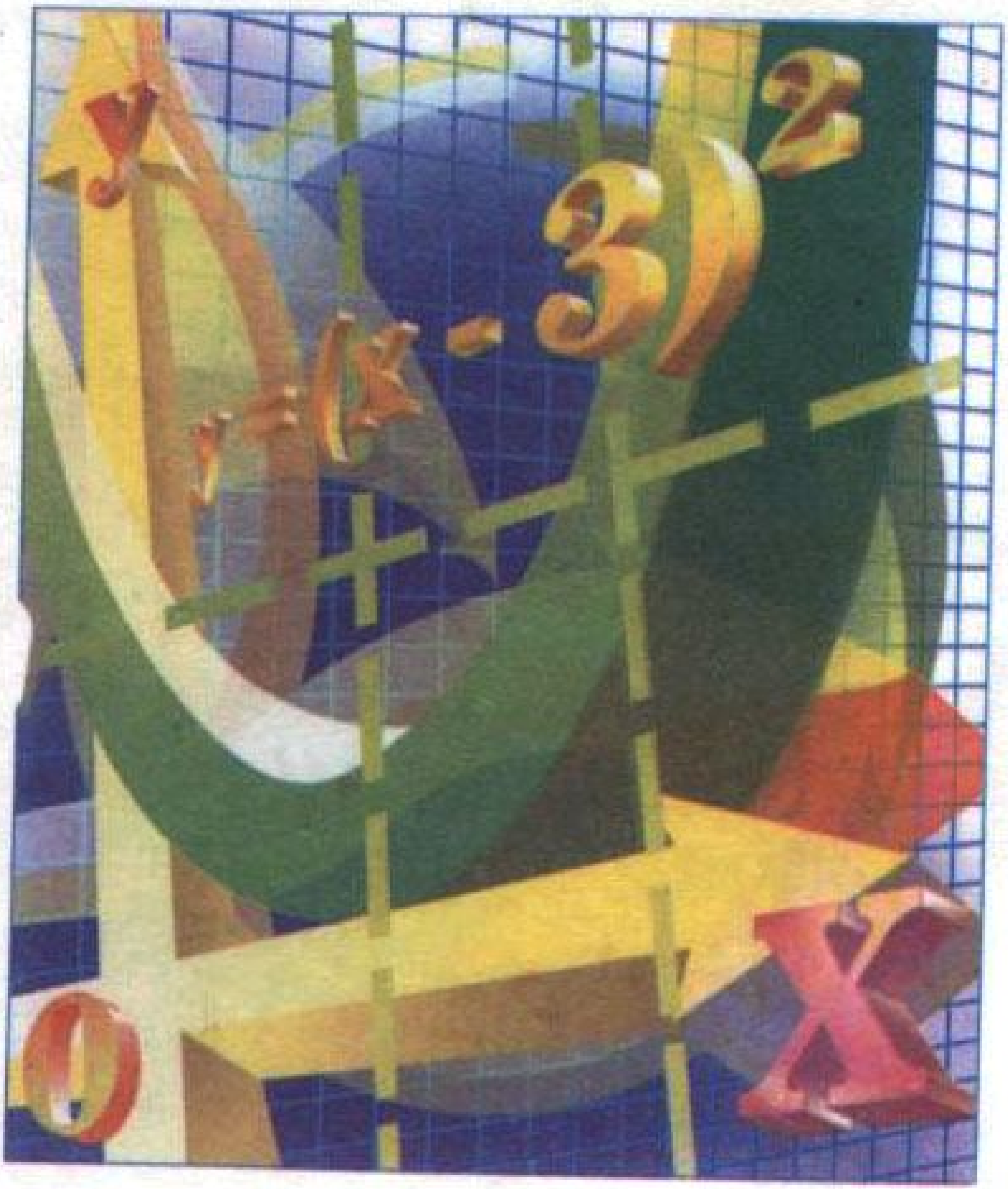
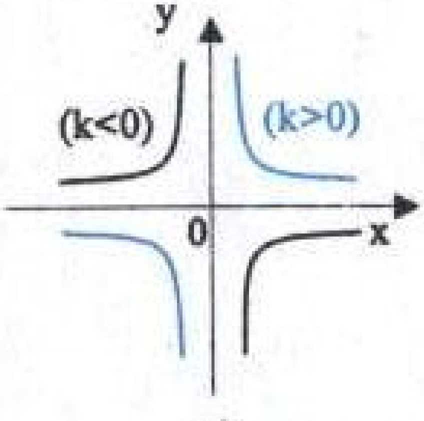
Н. УСМОНОВ, Р. ПИРОВ

АЛГЕБРА

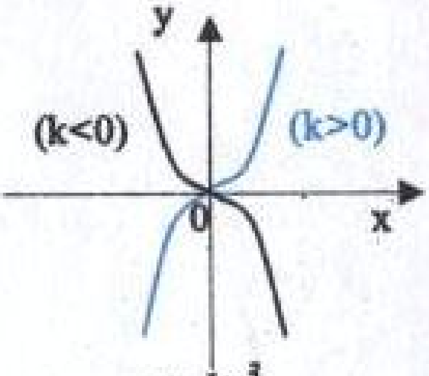


Китоби дарсӣ барои синфи 9

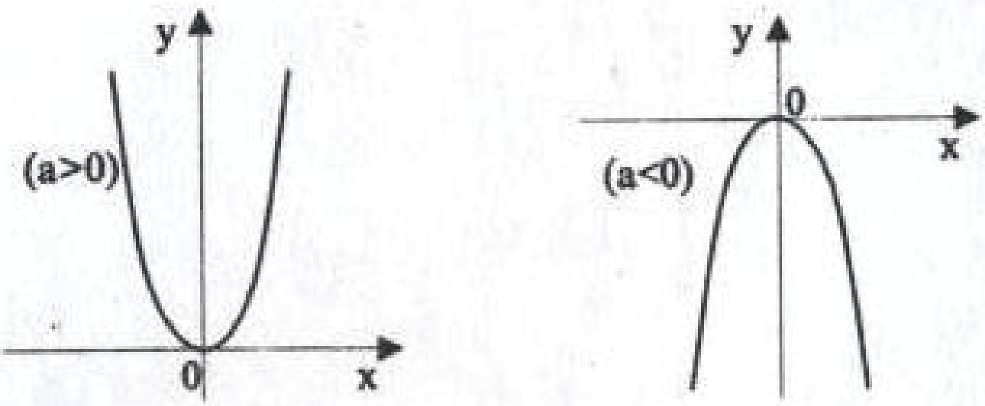
Графики функсияҳо



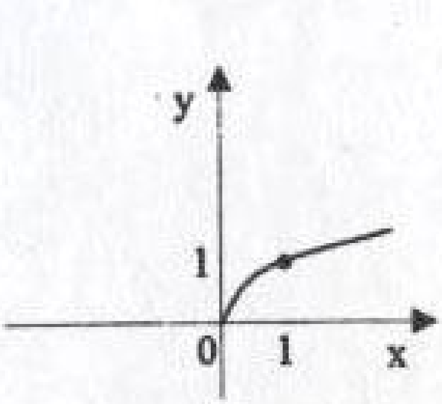
$y = \frac{k}{x}$



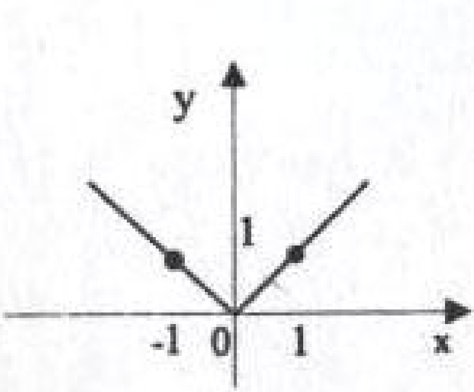
$y=kx^3$



$y=ax^2$



$y=\sqrt{x}$



$y=|x|$

Прогрессияи арифметикӣ

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \in N$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$$

Прогрессияи геометрӣ

$$b_{n+1} = b_n \cdot q \qquad b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \qquad S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q}$$

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

Хосиятҳои дараҷа

1). $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ 2). $a^r : a^s = a^{r-s}$

3). $(a^r)^s = a^{rs}$ 4). $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$

5). $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

ББК 22.14 Я 72
У–73

Ҷадвали истифодаи иҷоравии китоб

№	Ному насаби хонанда	Синф	Соли хониш	Ҳолати китоб (баҳои китобдор)	
				Аввали сол	Охири сол

Муаллимони мӯҳтарам!

Хоҳишмандем фикру мулоҳизаҳои худро оид ба мазмуни китоби мазкур ба нишонии 734024, ш. Душанбе, кӯчаи Айнӣ 45, Пажӯҳишгоҳи улуми педагогии Тоҷикистон ирсол намоед.

Усмонов Н., Пиров Р.

У–73 Алгебра. Китоби дарсӣ барои синфи 9-и мактабҳои таҳсилоти ҳамагонӣ. Соли 2005. 224 саҳифа.

ISBN 5-670-00875-8

$$\text{М}\frac{43060205-12}{504(12)-2005}-2005$$

Боби 1

ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ

§1. ФУНКСИЯҲО ВА ХОСИЯТҲОИ ОНҲО

1. Бузургиҳои доимӣ ва тағйирёбанда. Функсия

Татбиқи математика дар омӯзиши қонунҳои табиат ва истифодабарии он дар техника ва дигар соҳаҳо водор месозад, ки дар математика мафҳуми бузургиҳои доимӣ ва тағйирёбандаро дохил намоем.

Бузургии тағйирёбанда гуфта, ҳамин гуна бузургиеро меноманд, ки дар шарти масъалаи додашуда қиматҳои гуногунро қабул менамояд.

Агар бузургӣ дар шарти масъала қиматашро тағйир надиҳад, онро бузургии доимӣ меноманд.

Ҳамон як бузургӣ дар як масъала тағйирёбанда ва дар масъалаи дигар доимӣ шуда метавонад.

М и с о л. Бузургиҳои зерин доимианд:
а) нисбати дарозии давра, ба диаметраш $\left(\dfrac{c}{d}=\pi\right)$; ($\pi\approx3{,}14$);

б) суммаи кунҷҳои дарунии секунҷа (180°);

в) суръати ҳаракати мунтазам V, ки қонунаш бо формулаи $S=V\cdot t$, $V=\dfrac{s}{t}$, ки дар он S – масофа, t – вакт;

г) шитоби қувваи вазнинӣ g, ки ба 9,81 м/сония^2 баробар аст.

Бузургиҳои зерин тағйирёбанда мебошанд:

а) масофаи байни парашютчии аз тайёра ҷаҳида то сатҳи замин;

б) кунҷи биниш, ки дар таҳти он предмети (қатора, одам, танк ва ғайраҳо) аз мушоҳид дуршаванда дида мешавад.

в) суръате, ки дар вақти тағйирёбии фишор бо он моеъ аз сӯрохии зарф мечакад;

г) ҳарорати ҳаво дар ҳар як соати шабонарӯз.

Одатан бузургиҳои тағйирёбандаро бо ҳарфҳои охири алифбои лотинӣ x, y, z... ва бузургиҳои доимиро бо ҳарфҳои аввалаи алифбои лотинӣ a, b, c... ишорат мекунанд.

Мегӯянд, ки ду бузургии тағйирёбандаи x ва y бо ҳамдигар функсионалӣ вобастаанд, агар ба ҳар як қимати якеи онҳо як ё якчанд қимати муайяни дигараш мувофиқ ояд.

Масалан, дарозии давра ва радиуси он ($S = 2\pi R$) масофаи тайшуда ва суръати ҳаракати мунтазам дар вақти додашуда ($S=V \cdot t$), бо ҳам функсионалӣ вобастаанд.

Т а ъ р и ф. **Чунин вобастагии тағйирёбандаи y аз тағйирёбандаи x, ки дар он ба ҳар як қимати тағйирёбандаи x қимати муайяни тағйирёбандаи y мувофиқ меояд, функсия номида мешавад.**

Тағйирёбандаи x *тағйирёбандаи новобаста ё аргумент* номида мешавад. Тағйирёбандаи y *тағйирёбандаи вобаста* ном дорад. Дар ин ҳолат мегӯянд, ки тағйирёбандаи y функсияи тағйирёбандаи x мебошад. Қиматҳои тағйирёбандаи вобастаро *қиматҳои функсия* меноманд.

Агар вобастагии тағйирёбандаи y аз тағйирёбандаи x функсия бошад, онро мухтасар ин тавр менависанд: $y=f(x)$ (игрек баробар аст ба эф аз икс). Навишти $y=f(x)$ қонун ё қоидаи ба ҳар як қимати додашудаи x мувофиқ омадани қимати муайяни y-ро ифода мекунад.

Масалан агар $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ бошад, он гоҳ барои ёфтани қимати y:

а) қимати аргументи x-ро ба квадрат бардошта;

б) ба квадрати аргумент 1-ро ҷамъ карда;

в) x-ро ба суммаи $1+x^2$ тақсим кардан лозим аст.

Мисолҳои болоро муоина намуда, чунин хулоса карда метавонем:

а) масофаи байни парашютчӣ ва сатҳи замин функсияи вақт аст;

б) кунҷе, ки зери он аз нуқтаи маълум предмет дида мешавад, функсияи масофаи байни мушоҳидачӣ ва предмет аст.

Акнун ду мисоли ҳисоби қиматҳои функсияро муоина мекунем. Чӣ тавре, ки дар боло қайд кардем, барои ин дар формулаи $y=f(x)$ ба ҷои x қимати мувофиқашро гузоштан лозим аст.

1) Агар функсия бо формулаи $f(x)=2x^2-6$ дода шуда бошад, он гоҳ барои қиматҳои x–и ба 1; 2,5; −3 баробар қиматҳои мувофиқи $f(x)$ ба $f(1)=2 \cdot 1^2-6=2-6=-4$; $f(2{,}5)=2 \cdot (2{,}5)^2-6=6{,}5$; $f(-3)=2 \cdot (-3)^2-6=12$ баробар аст.

2) Функсия бо формулаи $y=-5x+6$ дода шудааст. Қиматҳояшро ҳангоми ба 2; 3 ва 1,2 баробар будани x меёбем: $f(2)= =-5 \cdot 2+6=-10+6=-4$; $f(3)=-5 \cdot 3+6=-15+6=-9$; $f(1{,}2)=-5 \cdot 1{,}2+6=-6+6=0$.

? **1.** Чӣ гуна бузургиҳо бузургиҳои доимӣ ва чӣ гуна бузургиҳо тағйирёбанда номида мешаванд? **2.** Мисоли бузургиҳои доимӣ ва тағйирёбандаро оред. **3.** Ду бузургӣ дар кадом ҳолат бо ҳам функсионалӣ вобастаанд? **4.** Таърифи функсияро баён кунед. Қимати функсия ҳангоми дода шудани аргумент чӣ тавр ҳисоб карда мешавад?

1. Функсия бо формулаи $f(x)=5x^2+2$ дода шудааст.

   Ёбед: а) $f(1)$; б) $f(-1)$; в) $f(0)$; г) $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. $f(x)=2x^3-6$. Ёбед: а) $f(3)$; б) $f(4)$; в) $f(-2)$; г) $f(-3)$.
3. $f(x)=-5x+6$. Қимати x-ро ёбед, ки дар он: а) $f(x)=17$; б) $f(x)=0$;
   в) $f(x)=6$; г) $f(x)=10$; д) $f(x)=-5$ бошад.
4. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$. Ёбед а) $f(0)$; б) $f(a^2)$; в) $f(2)$; г) $f(3)$; д) $f(-2)$.

Машқҳо барои такрор

5. Муодиларо ҳал кунед:
   а) $2x^2+3x=0$ в) $5x^2-4x=0$ д) $1-4x^2=0$
   б) $3x^2-2=0$ г) $7x-14x^2=0$ е) $2x^2-6=0$.
6. Ҳисоб кунед:

а) $\left(24-3\frac{7}{16}\right)-\left(21\frac{5}{12}-\frac{41}{48}\right)$; б) $\left(3\frac{5}{8}+\frac{1}{4}+2\frac{7}{12}\right)\cdot 0{,}2\left(4\frac{8}{15}-\frac{11}{3}+\frac{17}{45}\right)$.

7. Махраҷи касри оддие аз сураташ ба 3 воҳид калон аст. Агар ба сурат 7 ва ба махраҷ 5-ро ҷамъ кунем он гоҳ касре ҳосил мешавад, ки аз касри аввала ба 1/2 зиёд аст. Касри мазкурро ёбед.

2. Тарзҳои дода шудани функсия. Соҳаи муайянии функсия

Вобастагии байни қиматҳои тағйирёбандаҳои x ва y бо тарзҳои гуногун дода мешаванд.

А) Тарзи аналитикӣ (дар шакли формула). Агар вобастагии байни тағйирёбандаҳои y ва x чунин дода шуда бошанд, ки он барои ёфтани қиматҳои функсия y ҳангоми дода шудани қиматҳои аргумент x тартиби иҷро кардани амалҳоро муайян намояд, он гоҳ мегӯянд, ки функсия аналитикӣ ё дар шакли формула дода шудааст. Масалан, функсияи $y=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ ва $y=x^3+5x^2-x+4$ аналитикӣ дода шудаанд.

Дар баъзе мавридҳо функсия на бо як формула, балки дар фосилаҳои гуногун бо формулаҳои ҳархела дода мешавад. Масалан,

функсияи $y=\begin{cases}2x-1, \text{агар } 0\le x\le 3\\ -x+8, \text{агар } 3<x\le 5\end{cases}$

дар порчаи [0:3] бо формулаи $y=2x-1$ ва дар нимфосилаи [3:5] бо формулаи $y=-x+8$ дода шудааст.

Б) **Тарзи ҷадвалӣ**. Моҳияти чунин тарзи дода шудани функсия аз он иборат аст, ки барои қиматҳои муайяни ададии аргумент қиматҳои мувофиқи функсия дода мешавад. Масалан, ҳарорати ҳаво дар соатҳои бутуни шабонарӯз, микдори ҷамъовардаи пахтаи соҳибкор дар 5 соли охир ва ғайраҳо мисоли функсияҳои ҷадвалианд.

Дар сатри аввала қиматҳои аргумент ва дар сатри дуюм қиматҳои мувофиқи функсия ҷойгир карда мешаванд:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n	...
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n	...

Ҷадвалҳои ба мо маълуми квадратҳо, кубҳо, решаҳои квадратию чанде дигарон аз ададҳои натуралӣ аз рӯи ҳамин тартиб сохта шудаанд. Масалан, ҷадвали

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10\cdot n}$
1	1	1	1.000	3.162
2	4	8	1.414	4.472
3	9	27	1.732	5.477

(Хотиррасон мекунем, ки мо аллакай чунин ҷадвалҳоро дар синфҳои 7–8 барои вобастагиҳои мутаносибии ростаи $y=kx$, хаттии $y=ax+b$, мутаносибии чаппаи $y=\dfrac{k}{x}$ сохта будем).

Агар фарқи ду қимати дилхоҳи аргументи ҳамсоя якхела бошад, яъне $h=x_2-x_1=x_3-x_2=\ldots$ он гоҳ ҷадвалро ҷадвали қиматҳои функсия бо *қадами* h меноманд. Масалан, ҷадвали қиматҳои функсияи $y=x^2+1$ бо қадами $h=\dfrac{1}{2}$ дар порчаи $[0;3]$ чунин аст:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	1	1,25	2	3,25	5	7,25	10

В) **Тарзи графикӣ**. Вобастагии байни аргументи x ва функсияи y-ро ба намуди ягон хат (умуман, хати каҷ) тасвир кардан мумкин аст. Абсиссаи нуқтаи дилхоҳи ин хати каҷ ягон қимати аргументи x, ординатаи он бошад, қимати мувофиқи функсияи y-ро ифода мекунад.

Таърифи 1. **Маҷмӯи ҳамаи нуқтаҳои ҳамворӣ, ки координатаҳои онҳо x ва y баробарии $y=f(x)$-ро қаноат мекунанд, графики $y=f(x)$ номида мешавад.**

Ҳар як вобастагии функсионалии ду тағйирёбандаро дар ҳамворӣ ба таври графикӣ тасвир кардан мумкин аст. Барои амалӣ гардонидани ин мақсад дар ҳамворӣ тирҳои координатавӣ дохил мекунанд. Тири уфуқӣ – *тири абсисса*, тири амудӣ – *тири ордината* ном дорад.

Аз рӯи ягон масштаб дар тири абсисса қиматҳои аргументи x ва дар тири ордината қиматҳои y-ро мегузорем. Ҳар як ҷуфти ададҳо, ки аз як қимати абсисса ва як қимати ордината иборат аст, як нуқтаи графикро муайян мекунад (нигаред ба расми 1, а).

Барои сохтани графики функсияи ба формула додашуда ин тавр амал мекунем:

1) ҷадвали қиматҳои аргументи x ва қиматҳои мувофиқи функсияи y-ро бо ягон қадами h, ки пешакӣ интихоб карда мешавад, тартиб медиҳанд;

2) системаи координатаҳои $x0y$-ро сохта дар ҳар як тири он масштаб интихоб мекунем;

3) ҳар як ҷуфти қиматҳои x ва y-ро, ки дар ҷадвал ҷойгир карда шудааст, ба сифати координатаҳои нуқтаи графики матлуб қабул карда, ин нуқтаҳоро месозем;

4) нуқтаҳои сохташударо пайваст мекунем.

Хати каҷе, ки дар ҳамвории координатавӣ пас аз иҷрои ин амалиётҳо ҳосил мешавад, графики функсия мебошад. Агар миқдори нуқтаҳои қайдшуда ҳарчанд зиёд бошад, графики функсия ҳамон қадар саҳеҳтар мешавад.

Акнун мафҳумҳои соҳаи муайянии функсия ва соҳаи қиматҳои онро дохил мекунем.

Таърифи 2. **Ҳамаи қиматҳои имконпазири тағйирёбандаи новобаста соҳаи муайянии функсия номида мешавад. Ҳамаи қиматҳое, ки функсия ҳангоми дар соҳаи муайяниаш тағйир ёфтани тағйирёбандаи новобаста қабул мекунад, соҳаи қиматҳои функсия ном дорад.**

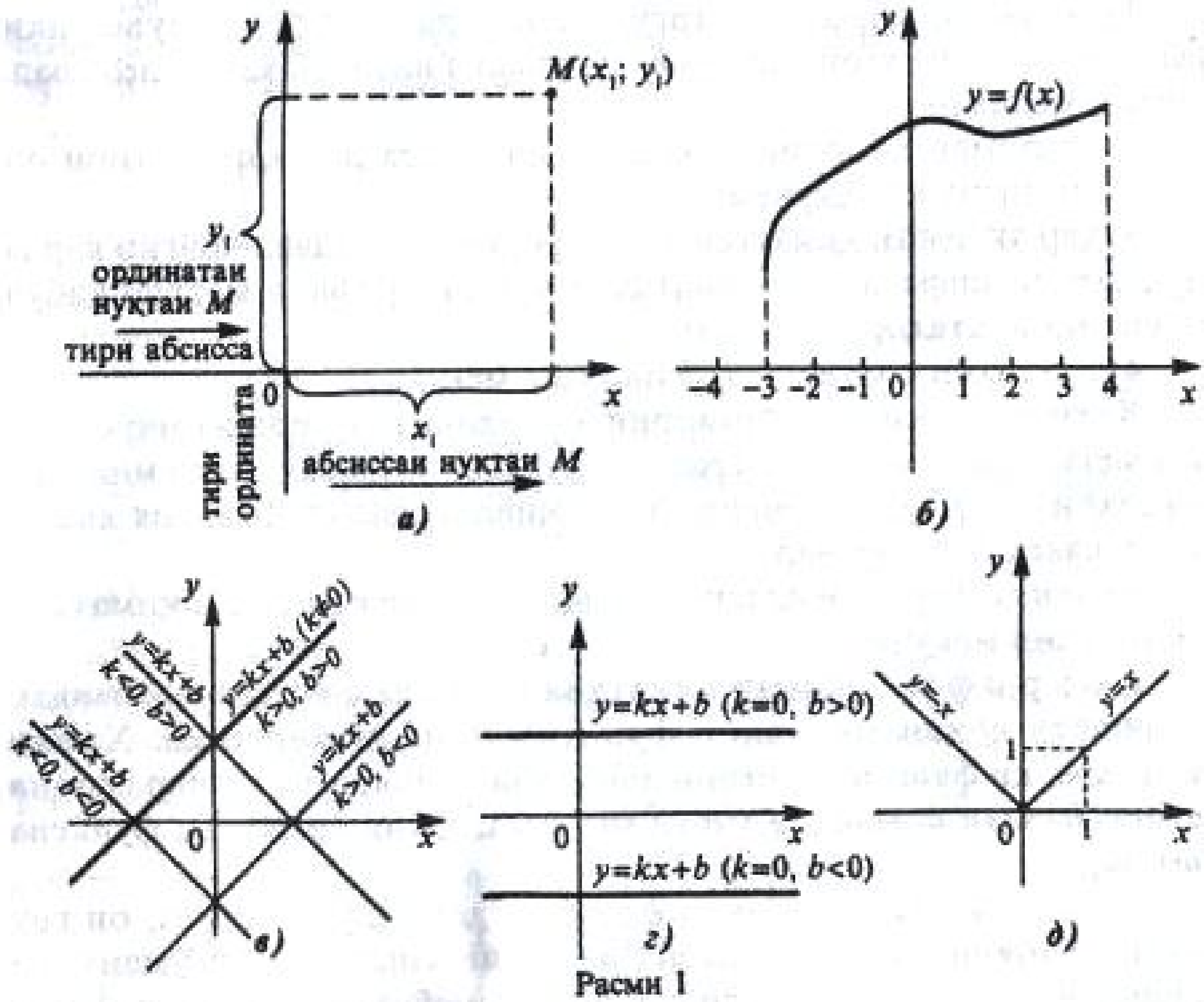
Агар функсия дар шакли формула дода шуда бошад, он гоҳ соҳаи муайянии чунин функсия аз ҳамаи қиматҳои аргумент, ки барояшон формула маъно дорад, иборат мебошад. Масалан, соҳаи муайянии функсияи $f(x)=5x+x^2$ аз маҷмӯи ҳамаи ададҳо; соҳаи муайянии функсияи $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$ аз маҷмӯи ҳамаи ададҳо ғайр аз -3 иборат аст. Соҳаи муайянии функсияи $y=\sqrt{x-2}$ бошад аз маҷмӯи ададҳои аз 2 калон ё ба 2 баробар буда, иборат мебошад.

Қайд мекунем, ки агар функсия касран ратсионалӣ бошад, он гоҳ соҳаи муайянии он маҷмӯи ададҳоест, ки барояшон қимати махраҷи каср нул нест (дар назар дошта мешавад, ки ифодаи дар сурат буда барои ҳар гуна қимати аргумент дорои қимат аст). Масалан, соҳаи муайянии функсияи $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$ ҳамаи ададҳои x, ки барояшон $x^2-1\neq0$ аст, яъне $x\neq-1$ ва $x\neq1$ мебошад.

Дар расми 1,б графики функсияи $y=f(x)$ тасвир шудааст. Порчаи $[-3; 4]$ соҳаи муайянии он мебошад.

Графики функсияи $y=kx+b$ (k ва b ададҳо мебошанд) аз хати рост иборат аст (расми 1,в; расми 1,г). Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ соҳаи муайянии он мебошад.

Функсияи бо формулаи $y=|x|$ дода шударо муоина мекунем.



Расми 1

Азбаски ифодаи $|x|$ барои қиматҳои дилхоҳи x маъно дорад, пас маҷмӯи ҳамаи ададҳо соҳаи муайянии ин функсия мебошад. Агар $x \geq 0$ бошад, $|x|=x$ ва агар $x<0$ бошад, $|x|=-x$ аст, яъне

$$y=|x|=\begin{cases} x, \text{ агар } x \geq 0 \text{ бошад}, \\ -x, \text{ агар}, x < 0 \text{ бошад}. \end{cases}$$

Графики ин функсия дар нимпорчаи $[0; \infty)$ бо графики функсияи $y=x$ ва дар фосилаи $(-\infty; 0)$ бо графики функсияи $y=-x$ ҳамҷоя мешавад. Графики функсияи $y=|x|$ дар расми 1,*д* тасвир шудааст. Ин график аз ду нуре, ки аз ибтидои координатаҳо баромада чоряки I ва II-ро ба ду ҳиссаи баробар тақсим мекунад, иборат аст.

Т а ъ р и ф и 3. **Қиматҳои аргумент, ки дар онҳо функсия ба нул баробар аст, нулҳои функсия номида мешаванд.**

Масалан, барои функсияи $y=2x \cdot (x-3)$ ададҳои 0 ва 3 нулҳо мебошанд. Барои функсияи $y=\dfrac{4-x}{5}$ адади 4 нули он аст.

Зоҳиран фаҳмост, ки графики функсия тири абсиссаро маҳз дар ҳамон нуқтаҳое мебурад, ки онҳо нули функсия мебошанд. Масалан, графики функсияи $y=(x+1)(x-2)$ тири абсисса Ox-ро дар нуқтаҳои $x=-1$ ва $x=2$ мебурад.

?

1. Тарзҳои дода шудани функсияро номбар кунед. Онро бо мисолҳои мушаххас шарҳ диҳед. **2.** Соҳаи муайянии функсия чист? **3.** Кадом қиматҳои тағйирёбандаҳо соҳаи муайяни касри ратсионалиро ташкил карда метавонанд? **4.** Соҳаи қиматҳои функсия чист? **5.** Нулҳои функсия гуфта чиро дар назар доранд?

8. Соҳаи муайянии функсияро ёбед.

а) $y=2x-4$; в) $y=\dfrac{x}{3-x}$; д) $y=\dfrac{2}{(x-5)(x+2)}$; ж) $y=\sqrt{10+x}$;

б) $y=x^2-3x+2$; г) $y=\dfrac{3}{x^2+1}$; е) $y=\sqrt{x-4}$; з) $y=\sqrt{100+x}$;

9. Ягон функсияро мисол оред, ки а) маҷмӯи ҳамаи ададҳо ғайр аз 10; б) маҷмӯи ҳамаи ададҳо ғайр аз ададҳои 2 ва 3; в) ҳамаи ададҳои ғайриманфӣ; г) ҳамаи ададҳои аз 20 калон ё ба он баробар соҳаи муайяниаш бошанд.

10. Соҳаи муайянӣ ва соҳаи қиматҳои функсияи: а) $y=x^2$; б) $y=x^3$-ро ёбед.

11. Агар а) $f(x)=x \cdot (x+9)$; б) $f(x)=\dfrac{x+5}{7-x}$; в) $f(x)=x \cdot (x-9)$; г) $f(x)=\dfrac{x-1}{2x}$ бошад, қиматҳои x-ро ёбед, ки барояшон $f(x)=0$ аст.

12. Графики функсияро созед:

а) $f(x)=\frac{1}{2}-5x$; б) $f(x)=4{,}6x$; в) $f(x)=\frac{5}{x}$; г) $f(x)=-2x$.

13. Функсияи $y=x^3-3$, ки дар он $-3\leq x\leq 3$ аст, дода шудааст. Ҷадвали қиматҳояшро бо қадами $h=1$ дар порчаи $[-3;\ 3]$ тартиб диҳед ва графики функсияро созед.

Машқҳо барои такрор

14. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}3x+5y=4;\\7x-3y=24;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x-2y=11;\\4x-5y=3.\end{cases}$

15. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\frac{2x-5}{3}-1>3-x$; б) $\frac{5x-1}{4}>2$.

16. Муодилаи квадратиро ҳал кунед:

а) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)=102$; б) $(x+3)(x-4)=-12$.

17. Оилаи аз панҷ нафар иборатбударо дар як сол (365 рӯз) чанд кг нон истеъмол мекунад, агар маълум бошад, ки ба ҳисоби миёна дар як рӯз ҳар як аъзои оила 0,4 кг нон истеъмол кунад.

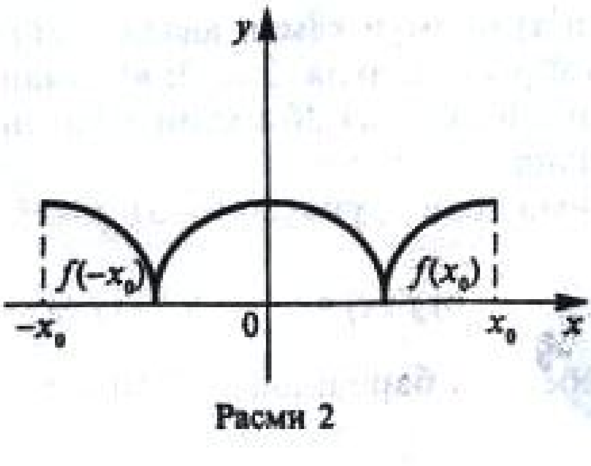
3. Функсияҳои ҷуфт ва тоқ

Пеш аз он ки дар бораи ҷуфт ва тоқ будани функсияҳо сухан ронем, мафҳуми маҷмӯи ададии симметриро дохил мекунем.

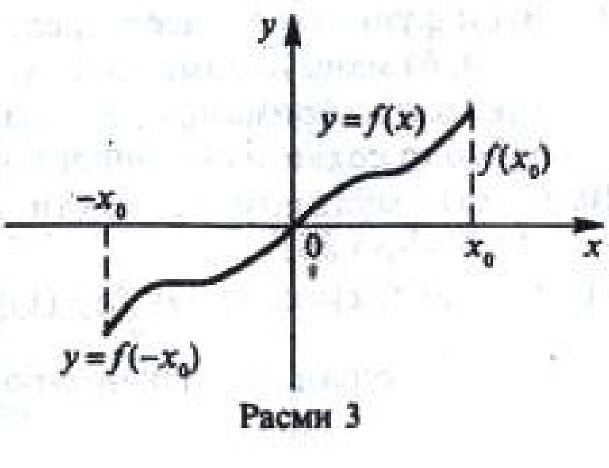
Таърифи 1. **Маҷмӯи ададии D нисбат ба ибтидои координата симметрӣ номида мешавад, агар адади x аз D чӣ гунае бошад, адади $-x$ ҳам мутаалиқи ин маҷмӯъ бошад.**

Ба ин гуна маҷмӯъ мисол шуда метавонад: маҷмӯи ададҳои бутун, ҳамаи касрҳои дуруст, ҳар гуна порчаи $[-a;\ a]$ ё фосилаи $(-a,\ a)$.

Бигузор соҳаи муайянии функсияи $y=f(x)$ маҷмӯи симметрӣ аст.



Расми 2



Расми 3

Т а ъ р и ф и 2. **Функсия ҷуфт номида мешавад, агар вай ҳангоми тағйир ёфтани аломати аргумент қиматашро дигар накунад, яъне:**

$$f(-x)=f(x).$$

Т а ъ р и ф и 3. **Функсия тоқ номида мешавад, агар вай ҳангоми тағйирёбии аломати аргумент аломаташро тағйир дода, қимати мутлақашро нигоҳ дорад:**

$$f(-x)=-f(x)$$

Мувофиқи таърифи функсияи ҷуфт графики он нисбат ба тири ордината симметрӣ (масалан, расми 2) аст ва графики функсияи тоқ бошад, нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ мешавад (масалан, расми 3).

Мисолҳои функсияҳои ҷуфт ва тоқ:

1) $y=kx^2$, дар ин ҷо k адади доимӣ аст. Шарти $k(-x)^2=kx^2$ иҷро мешавад, пас функсия ҷуфт мебошад.

2) Функсияи $y=kx^3$, ки дар ин ҷо k–адади доимӣ мебошад, шарти $k(-x^3)=-kx^3$-ро қаноат мекунонад ва бинобар ин функсия тоқ аст. Умуман, функсияи дараҷагӣ, яъне функсияи $y=kx^m$:

а) ҷуфт аст, агар m адади натуралии ҷуфт бошад;

б) тоқ аст, агар m адади натуралии тоқ бошад.

3) Функсияи қимати мутлақ, яъне $y=|x|$ ҷуфт мебошад, чунки $|-x|=|x|$ аст.

Нишон медиҳем, ки функсияи $y=3x+1$ на ҷуфт ва на тоқ аст.

Барои ин бояд нишон диҳем, ки функсия ақаллан дар ҷуфти нуқтаҳои ба ҳам симметрии соҳаи муайяниаш шартҳои дар таърифҳои 2 ва 3 бударо қаноат намекунад. Дар ҳақиқат, агар $x=1$ гирем, он гоҳ қимати $f(1)=4$ ва $f(-1)=-2$-ро ҳосил мекунем. Муқоисаи бевосита ба $f(1) \neq (f(-1)$ ва $f(-1) \neq -f(1)$ меорад, ки онҳо на ҷуфт ва на тоқ будани функсияи $y=3x+1$-ро тасдиқ мекунад.

М и с о л. Муайян мекунем, ки функсияҳои зерин ҷуфтанд ё тоқ:

а) $y=x+\dfrac{1}{x}$; б) $y=(x-3)^2+(x+3)^2$; в) $y=x^2-x+3$.

а) $y(-x)$-ро муоина мекунем.

Азбаски $y(-x)=(-x)+\dfrac{1}{(-x)}=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-y(x)$ аст, бинобар ин $y=x+\dfrac{1}{x}$ функсияи тоқ мебошад.

б) Барои функсияи $y=(x-3)^2+(x+3)^2$, $y(-x)=(-x-3)^2+(-x+3)^2=$ $=(-(x+3))^2+(-(x-3))^2=(x+3)^2+(x-3)^2=y(x)$.

Ҳамин тавр, $y(-x)=y(x)$, яъне функсияи $y=(x-3)^2+(x+3)^2$ ҷуфт мебошад.

в) $y(-x)$-ро ҳисоб мекунем:

$$y(-x)=(-x)^2-(-x)+3=x^2+x+3.$$

Функсияи $y=x^2-x+3$ на ҷуфт аст ва на тоқ, чунки $y(-x) \neq y(x)$ ва $y(-x) \neq -y(x)$ мебошад.

? 1. Таърифи функсияҳои ҷуфт ва тоқро диҳед. **2.** Графикҳои функсияҳои ҷуфт ва тоқ нисбат ба системаи координатавӣ чӣ тавр ҷойгир мешаванд? **3.** Доир ба функсияҳои ҷуфт ва тоқ мисолҳо оред.

Муайян кунед, ки функсияҳои зерин ҷуфтанд ё тоқ (18–21).

18. а) $y=x^4$; б) $y=x^5$; в) $y=-2x^2$; г) $y=x^7+2x$; д) $y=x \cdot |x|$.

19. а) $y=(x-3)^2-(x+3)^2$; б) $y=\sqrt{9-x^4}$; в) $y=0{,}5x^3-5x^2$; г) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$

20. а) $y=\dfrac{x-3}{x+1}$; б) $y=x^2+x^4$; в) $y=\dfrac{x-x^3}{1+x^2}$; г) $y=\dfrac{1}{x^2}+2$.

21. а) $y=x^3+x$; б) $y=\dfrac{1}{x^5}$; в) $y=x^6-x^4$; г) $y=x^7-x$.

Машқҳо барои такрор

22. Ҳисоб кунед.

а) $\dfrac{1+a-a^2}{1+a+a^2}$-ро ҳангоми $a=0{,}5$;

б) $2a^3+3a^2-5a+6$-ро ҳангоми $a=2$;

в) $|a-b|-|c+d|$-ро ҳангоми $a=-5$, $b=4$, $c=1$, $d=-3$;

г) $\dfrac{|a+x|}{2}-\dfrac{|a-x|}{2}$-ро ҳангоми $a=-2$, $x=-6$ будан.

23. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\dfrac{2^8 \cdot 7^9}{14^{10}} \cdot \dfrac{26^5 \cdot 2^{10}}{13^6 \cdot 8^4}$; б) $\dfrac{2^8 \cdot 7^9}{14^{10}} : \dfrac{26^5}{13^{10} \cdot 8^4}$; в) $\left(\dfrac{51}{60} \cdot \dfrac{12}{17}\right) : \dfrac{3}{10}$; г) $\left(\dfrac{12}{95} : \dfrac{9}{38}\right) \cdot \dfrac{15}{16}$.

24. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) a^3-2a^2-a; в) $3a^2x+6ax^2$; д) $18ab^2-9b^4$;

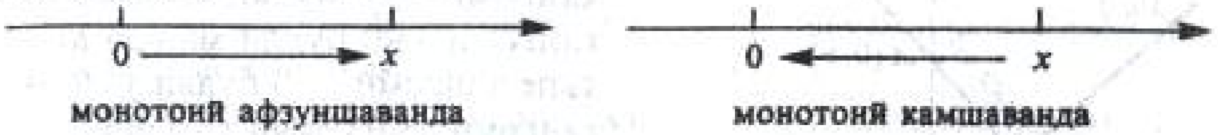
б) $x(a-c)+y \cdot (c-a)$; г) $9a^4-12a^3b$; е) $bx-2b+cx-2c$.

25. Киштӣ бо самти ҷараёни дарё 10 соат ҳаракат намуд. Дар бозгашт ин масофаро дар чанд соат тай мекунад, агар маълум бошад, ки суръати ҳаракати киштӣ дар оби ором 15 км/соат буда, суръати оби дарё 3 км/соат аст.

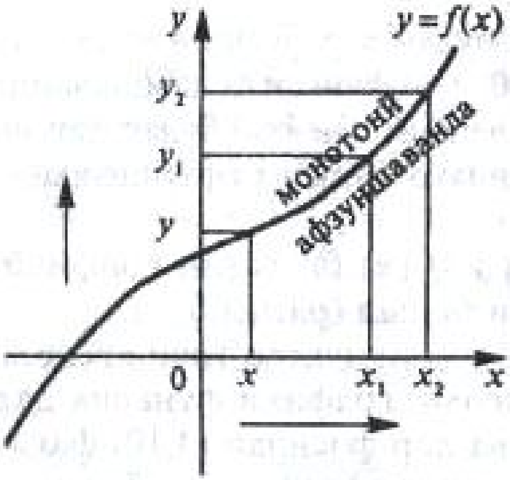
4. Афзуншавӣ ва камшавии функсия

Т а ъ р и ф и 1. **Функсияи $f(x)$ дар ягон фосила афзуншаванда мешавад, агар дар ин фосила ба қимати калони аргумент қи-**

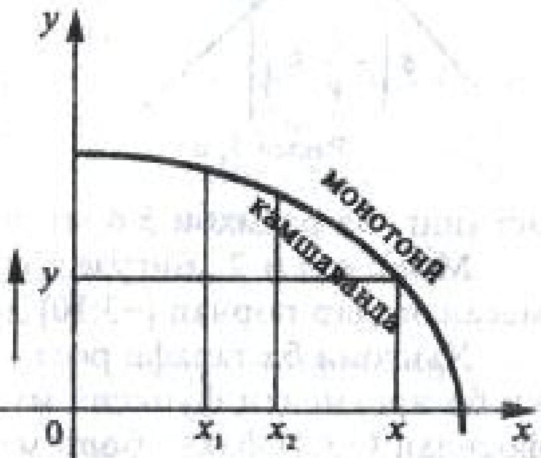
мати калони функсия мувофиқ ояд, яъне дар ҳолати $x_2>x_1$ будан $f(x_2)>f(x_1)$ шавад.



Расми 4



Расми 4, *а*



Расми 4, *б*

Т а ъ р и ф и 2. **Функсия дар ягон фосила камшаванда номида мешавад, агар дар ин фосила ба қимати калони аргумент қимати хурди функсия мувофиқ ояд, яъне дар ҳолати $x_2>x_1$ будан $f(x_2)<f(x_1)$ шавад.**

Бузургии тағйирёбанда монотонӣ номида мешавад, агар вай фақат ба як самт тағйир ёбад, яъне ё фақат афзояд ё фақат кам шавад.

Маълум аст, ки ҳаракати нуқтаи x ба равиши мусбати тири абсисса монотонӣ афзуншаванда буда, ба равиши баръакс бошад, монотонӣ камшаванда мешавад.

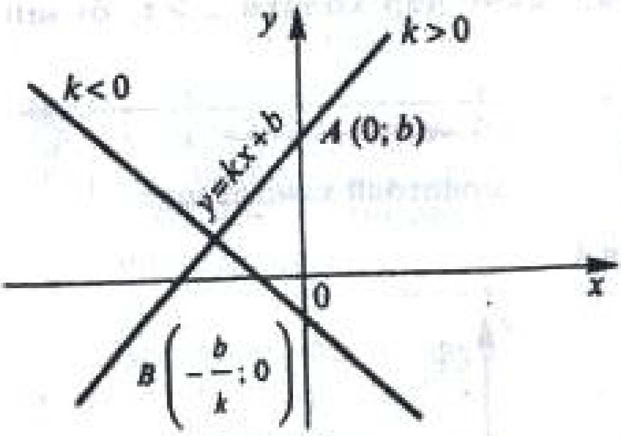
Функсия монотонӣ афзуншаванда номида мешавад, агар ҳангоми афзуншавии аргумент қимати функсия ҳам афзояд (расми 4, *а*).

Функсия монотонӣ камшаванда мешавад, агар ҳангоми афзуншавии аргумент қимати функсия кам шавад (расми 4, *б*).

Ба функсияи монотонӣ функсияи $y=kx+b$ мисол шуда метавонад. Дар ҳолати $k>0$ будан функсия монотонӣ афзуншаванда буда, дар ҳолати $k<0$ будан функсия монотонӣ камшаванда мешавад (расми 5,*а*).

М и с о л и 1. Чанд хосиятҳои $y=\dfrac{k}{x}$ (дар ин ҷо $k\neq0$)-ро меорем.

1. Азбаски касри $\dfrac{k}{x}$ дар ҳеҷ ягон қимати x ба нул табдил намешавад, пас функсияи $y=\dfrac{k}{x}$ нулҳо надорад.



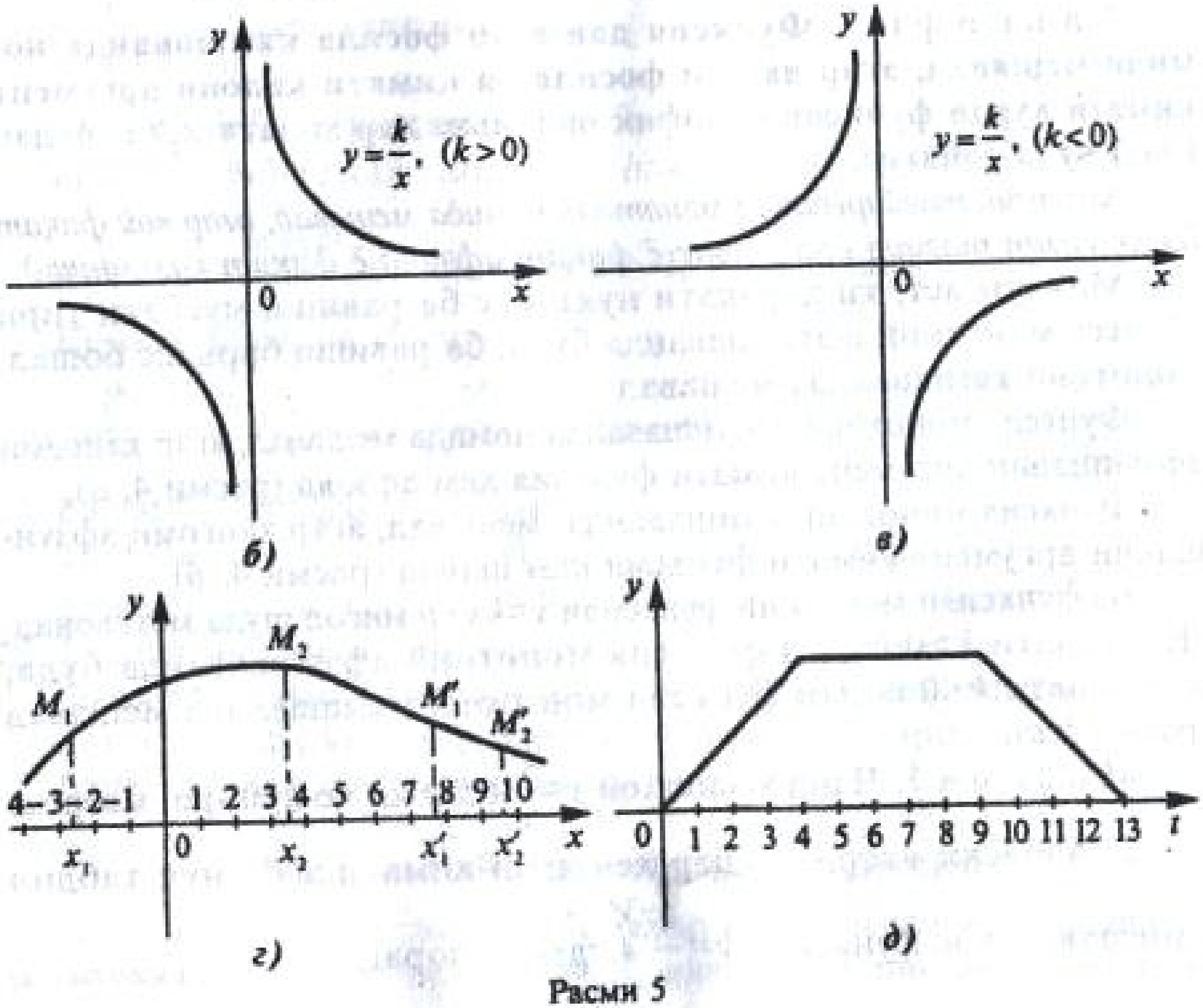
Расми 5, *а*

2. Агар $k>0$ бошад, касри $\frac{k}{x}$ ҳангоми $x>0$ будан мусбат ва ҳангоми $x<0$ будан манфӣ аст, яъне ҳангоми $x>0$ будан $y>0$ ва ҳангоми $x<0$ будан $y<0$ аст.

3. Функсияи $y=\frac{k}{x}$ ҳангоми $k>0$ будан дар фосилаҳои $(-\infty;\ 0)$ ва $(0;\ +\infty)$ функсияи камшаванда аст ва ҳангоми $k<0$ будан дар ин фосилаҳо функсия афзуншаванда аст (ниг. ба расмҳои 5 *б*, *в*).

М и с о л и 2. Бигузор функсияи $y=f(x)$ бо тарзи графикӣ, масалан, дар порчаи $[-3{:}10]$ дода шуда бошад (расми 5, *г*).

Ҳангоми ба тарафи рост ҳаракат кардани нуқтаи тири абсисса, ки ба аргументи функсия мувофиқ меояд, графики функсия дар фосилаи $(-3;4)$ фақат боло мебарояд ва дар фосилаи $(4;10)$ фақат поён мефарояд. Дар бораи функсияе, ки графикаш дар фосилаи



Расми 5

муайян фақат боло мебароянд мегӯянд, ки ин функсия дар ҳамин фосила афзуншаванда мебошад ва дар бораи функсияе, ки графикаш дар фосилаи муайян фақат поён мефароянд, мегӯянд, ки ин функсия дар ҳамин фосила камшаванда мебошад.

Функсияи додашударо дар фосилаи (−3; 4) дида мебароем. Дар графики он ду нуқтаи дилхоҳи $M_1(x_1;y_1)$ ва $M_2(x_2; y_2)$-ро интихоб мекунем. Абсисса ва ординатаи онҳоро муқоиса карда мебинем, ки агар $x_2>x_1$ бошад, он гоҳ $f(x_2)>f(x_1)$ мешавад.

Агар ҳамон функсияро дар фосилаи (4; 10) муоина намоем, он гоҳ барои ҳар гуна ду нуқтаи график $M_1'(x_1'; y_1')$ ва $M_2'(x_2'; y_2')$ аз нобаробарии $x_2'>x_1'$ нобаробарии $f(x_2')<f(x_1')$ ҳосил мешавад. Пас дар фосилаи (4; 10) функсия камшаванда мебошад.

Мисоли 3. Нишон медиҳем, ки функсияи $\varphi(x)=\sqrt{x}$ дар нимпорчаи $[0; \infty)$ афзуншаванда аст.

Бигузор x_1 ва x_2 ададҳои ғайриманфии дилхоҳ бошанд ва дар айни ҳол $x_2>x_1$.

Фарқи $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$ -ро дида баромада,

муқаррар мекунем, ки он мусбат аст, яъне $\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$. Пас функсияи $\varphi(x)$ дар нимпорчаи $[0; +\infty)$ меафзояд.

Мисоли 4. Фарз, мекунем, ки функсияи $y=ax^2+c$ дар фосилаи $(-\infty; +\infty)$ дода шудааст. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии онро меёбем.

Азбаски функсияи $y=ax^2+c$ ҷуфт $(y(x)=y(-x))$ мебошад, пас онро дар фосилаи $(0; \infty)$ муоина намудан кифоя аст. Бигузор x_1 ва x_2 ададҳои мусбати дилхоҳ аз ин фосила ва $x_2>x_1$ бошад. Ҳолатҳои $a>0$ ва $a<0$-ро алоҳида-алоҳида муоина менамоем.

1) $a>0$. Фарқи $y_2-y_1=ax_2^2+c-ax_1^2-c=a(x_2-x_1)(x_2+x_1)$-ро дида баромада, муайян менамоем, ки он мусбат $(y_2-y_1>0)$, $y_2>y_1$ аст. Пас, функсияи $y=ax^2+c$ дар фосилаи $(0; +\infty)$ меафзояд. Аз сабаби графики функсия нисбат ба тири $0y$ симметрӣ буданаш (ниг. п. 3) вай дар фосилаи $(-\infty; 0)$ кам мешавад.

2) $a<0$. Он гоҳ

$$y_2-y_1=a(x_2+x_1)(x_2-x_1)$$

-ро муоина намуда муайян мекунем, ки $y_2-y_1<0$, аз ин ҷо $y_2<y_1$ пас функсия дар фосилаи $(0; \infty)$ кам мешавад.

Мисоли 5. Бигузор функсияи $y=x^4$ дар фосилаи $(-\infty; \infty)$ дода шуда бошад. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии онро меёбем.

Азбаски функсияи додашуда ҷуфт мебошад (ниг. п. 3 ба мисоли 2), пас онро дар фосилаи $(0; \infty)$ муоина кардан кифоя аст. Бигузор

x_1 ва x_2 ададҳои мусбати дилхоҳ аз ин фосила ва $x_2>x_1$ бошад. Азбаски

$$x_2^4-x_1^4=(x_2^2+x_1^2)(x_2^2-x_1^2)=(x_2^2+x_1^2)(x_2+x_1)(x_2-x_1)$$

мебошад, пас аломати фарқи $x_2^4-x_1^4$ мусбат аст. Ин нишон медиҳад, ки функсияи додашуда дар фосилаи $(0;\ \infty)$ меафзояд. Аз сабаби нисбат ба тири $0y$ симметрӣ будани графики $y=x^4$ функсия дар фосилаи $(-\infty;\ 0)$ кам мешавад.

? 1. Таърифи функсияи афзуншаванда ва камшавандаро баён кунед. 2. Доир ба функсияҳои афзуншаванда ва камшаванда мисолҳо оред. 3. Функсияи $y=\dfrac{k}{x}$ дар ҳар яке аз фосилаҳои $(-\infty;\ 0)$ ва $(0;\ +\infty)$ чӣ тавр тағйир меёбад? Мавридҳои $k>0$ ва $k<0$ буданро алоҳида таҳлил кунед.

26. Дар расми 5*д* графики вобастагии вақти ҳаракати велосипедчӣ t ва тағйирёбии суръати ӯ V, тасвир шудааст. Фосилаи вақтеро ёбед, ки дар муддати он суръати велосипедчӣ: а) меафзояд; б) кам мешавад; в) доимӣ мемонад.

27. Графики ягон функсияи соҳаи муайяниаш $[-3;\ 4]$-ро чунон кашед, ки ин функсия:

а) дар порчаи $[-3;\ 0]$ афзояд ва дар порчаи $[0;\ 4]$ кам шавад;

б) дар порчаи $[-5;\ 1]$ кам шавад ва дар порчаи $[1;\ 4]$ афзояд.

28. Графики функсияеро (параболаеро) кашед, ки ададҳои:

а) -3 ва 3; б) -4 ва 2; в) $-3;\ 2$ нулҳои он бошад.

29. Нулҳои функсияро ёбед (агар онҳо мавҷуд бошанд):

а) $y=-0{,}8x+12$; в) $y=\dfrac{4+2x}{x^2+5}$;

б) $y=(3x-10)(x+6)$; г) $y=\dfrac{6}{(x-1)(x+8)}$.

30. Оё функсияҳои зерин нулҳо доранд:

а) $y=2{,}1x-70$; в) $y=\dfrac{6-x}{x}$; д) $y=-x^2-2$?

б) $y=4x(x-2)$; г) $y=x^2+9$;

31. Барои кадом қиматҳои x функсияи $y=f(x)$ ба нул мубаддал мегардад, қиматҳои мусбат ва манфӣ қабул мекунад, агар:

а) $f(x)=-2x+6$; б) $f(x)=20x+10$ бошад?

Графики ин функсияҳоро кашед.

32. Кадоме аз функсияҳои хаттии: а) $y=8x-5$; б) $y=-3x+1$; в) $y=-49x-100$; г) $y=x+1$; д) $y=1-x$ функсияи афзуншаванда ва кадоме функсияи камшаванда мебошад?

33. Графики функсияро созед ва хосиятҳояшро номбар кунед:
а) $y=1{,}5x-3$; в) $y=-4-x$; д) $y=0{,}5(1-3x)$.
б) $y=0{,}6x+5$; г) $y=2x-2$;

34. Функсия бо формулаи $f(x)=-13x-78$ дода шудааст. Барои кадом қиматҳои x: а) $f(x)=0$; б) $f(x)>0$; в) $f(x)<0$ аст?

35. Графики функсияро созед ва хосиятҳояшро номбар кунед:

а) $y=\dfrac{4}{x}$; б) $y=-\dfrac{5}{x}$.

Машқҳо барои такрор

36. Муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2x}{3}=14$; б) $\dfrac{5(x-2)}{x+2}-\dfrac{2(x-3)}{x+3}=3$.

37. $f(x)=\dfrac{2+3x}{2-3x}$. Ёбед: $f(0)$ ва $f(1)$-ро.

38. Ҳисоб кунед: а) $\left[6-4\cdot\left(\dfrac{5}{16}\right)^0\right]^{-2}$; б) $\dfrac{1}{11+2\sqrt{30}}+\dfrac{1}{11-2\sqrt{30}}$.

39. Ифодаро содда намоед:
а) $(2a-3ab)^2-(3a-2ab)^2$; б) $(2a-3)\cdot(2a+3)^2-8a^3+27$.

40. Аз фурудгоҳ дар як вақт ба ҷои муқарраршуда, ки масофааш 1600 км буд, ду тайёра парвоз намуданд. Суръати яке аз тайёраҳо аз дигараш 80 км/соат зиёд буд, бинобар ин вай як соат пеш ба ҷои муқарраршуда омада расид. Суръати ҳар яке аз тайёраҳоро муайян кунед.

§2. СЕАЪЗОГИИ КВАДРАТӢ ВА ҶУДОКУНИИ ОН БА ЗАРБКУНАНДАҲО

5. Ҷудо кардани квадрати пурра аз сеаъзогии квадратӣ

Сеаъзогии квадратӣ нисбат ба бузургии тағйирёбандаи x гуфта ифодаи намуди ax^2+bx+c-ро меноманд, ки дар он a, b ва c ададҳо буда $a\neq0$ мебошад.

Ҳангоми ҳал кардани масъалаҳо баъзан сеаъзогии квадратии ax^2+bx+c ба намуди

$$a(x-m)^2+n^2 \qquad (1)$$

(ки дар ин ҷо m ва n ададҳо мебошанд) навиштан муфид аст.

Табдилдиҳие, ки ба баробарии (1) меорад, *тарзи ҷудо кардани дуаъзогӣ ё квадрати пурра аз сеаъзогии ax^2+bx+c ном дорад.*

Схемаи умумии ҳосил кардани баробарии (1)-ро барои сеаъзогии квадратӣ баён мекунем.

Сеаъзогии квадратии ax^2+bx+c-ро ба таври

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

менависем. Ифодаи $\frac{b}{a}x$-ро дар намуди $2\frac{b}{2a}x$ (дучандаи ҳосили зарби $\frac{b}{2a}$ бар x) тасвир карда ҳосил мекунем:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Ба ифодаи дар дохили қавси қисми рост буда $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$-ро ҷамъ ва тарҳ мекунем:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right].$$

Акнун баробарии $x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$-ро истифода карда сеаъзогии квадратиро ба намуди зерин менависем:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right],$$

Ҳамин тавр, $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$ (2)

Баробарии ҳосил кардаи (2)-ро бо (1) муқоиса карда мебинем, ки $m=\frac{b}{2a}$ ва $n^2=-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ аст.

Э з о ҳ. Дар синфи 8 ҳангоми ҳосил кардани формулаи решаи муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$ айнан чунин табдилдиҳиҳоро гузаронида будем (ниг. ба китоби дарсӣ, боби III, пункти 28). Яъне, баъди ҳосил кардани (2) барои решаҳои муодила ҳангоми $a\neq0$ будан формулаи маълуми

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ ҳосил шуда буд.

М и с о л и 1. Аз сеаъзогии квадратии $\frac{1}{4}x^2-x+2$ квадрати пурраро ҷудо мекунем.

Ҳ а л. Зарбшавандаи $\frac{1}{4}$-ро аз қавс мебарорем:

$$\frac{1}{4}x^2-x+2=\frac{1}{4}(x^2-4x+8).$$

Ифодаи дохили қавсро табдил медиҳем:

$$\frac{1}{4}x^2 - x + 2 = \frac{1}{4}\left[(x-2)^2 + 4\right] = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1.$$

Пас, $\frac{1}{4}x^2 - x + 2 = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1.$

Мисоли 2. Аз сеаъзогии $-2x^2 - 4x + 5$ бо ёрии (2) квадрати пурраро ҷудо мекунем

$$-2x^2 - 4x + 5 = -2\left(x^2 + 2x - \frac{5}{2}\right) = -2\left(x^2 + 2x + 1 - 1 - \frac{5}{2}\right) =$$

$$= -2\left[\left(x^2 + 2x + 1\right) - 1 - \frac{5}{2}\right] = -2\left[(x+1)^2 - \frac{7}{2}\right] = -2(x+1)^2 + 7.$$

Мисоли 3. Сеаъзогии $\frac{x^2}{3} - 5x + 7$-ро ба намуди (2) меорем:

$$\frac{x^2}{3} - 5x + 7 = \frac{1}{3}(x^2 - 15x + 21) = \frac{1}{3}\left(x^2 - 2\cdot\frac{15}{2}\cdot x + 21\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 - 2\cdot\frac{15}{2}x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4} + 21\right) = \frac{1}{3}\left[\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{141}{4}\right] = \frac{1}{3}\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{47}{4}.$$

? **1.** Таърифи сеаъзогии квадратиро оред. Сеаъзогии квадратӣ чандто реша дошта метавонад? **2.** Аз сеаъзогии квадратӣ дуаъзогиро чӣ тавр ҷудо кардан мумкин аст? Инро дар мисоли x^2+4x+1 нишон диҳед.

Дар ифодаҳои зерин квадрати пурра ҷудо карда шавад (41–49):

41. а) $x^2-16x-16$; б) $x^2-8x-65$; в) $3x^2+4x+3$; г) x^2-6x+8.

42. а) $\frac{1}{3}x^2-4x+16$; б) $x^2+6x+10$; в) x^2-2x-2; г) x^2-2x.

43. Сеаъзогиҳои квадратии $x^2-6x+11$ ва $-x^2+20x-110$ дода шудаанд. Исбот кунед, ки барои дилхоҳ x сеаъзогии якум қимати манфӣ ва сеаъзогии дуюм қимати мусбат қабул намекунад.

44. Исбот кунед, ки барои қимати дилхоҳи x сеаъзогии квадратӣ:
а) $x^2-6x+10$ қимати мусбат;
б) $5x^2-10x+5$ қимати ғайриманфӣ;
в) $-x^2+20x-100$ қимати ғайримусбат;
г) $-2x^2+16x-33$ қимати манфӣ
қабул мекунад.

45. Аз сеаъзогии квадратӣ дуаъзогиро ҷудо кунед:
а) x^2-4x+7; б) x^2+2x-1; в) $-2x^2-6x-3{,}5$.

Машқҳо барои такрор

46. Муодилаи квадратиро ҳал кунед:
а) $2x^2-5x-3=0$; б) $3x^2-8x+5=0$; в) $36x^2-12x+1=0$.

47. Қаиқ дар кӯл 12 км шино карда, баъд ба муқобили самти ҳаракати оби дарё 11 км ҳаракат кард. Қаиқ ба ҳамаи роҳ 1 соат вақт сарф кард. Суръати ҷараёни оби дарё 2 км/соат. Суръати ҳаракати қаиқро дар кӯл ёбед.

48. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y=\dfrac{5}{x-7}$ б) $y=\dfrac{19}{2x+72}$

6. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кардани сеаъзогии квадратӣ

Дар синфи 7 амалиёти тасвири бисёраъзогиро дар намуди ҳосили зарби дуаъзогиҳо ҷудо кардани он номида будем. Дар ҳамон ҷо нишон дода будем, ки ин амалиёт бо тарзҳои аз қавс баровардани зарбкунандаи умумӣ, гурӯҳбандӣ ва омехта амалӣ карда мешавад. Акнун як тарзи дигари ба зарбкунандаҳо ҷудо карданро муоина менамоем, ки он ба муайян будани решаҳои (нулҳои) бисёраъзогӣ такя мекунад. Ин тарзро дар мисоли сеаъзогии квадратӣ баён менамоем.

Хулоса, масъалаи зеринро мегузорем: коэффитсиентҳои сеаъзогии квадратии ax^2+bx+c чӣ гуна бояд бошанд, то ки онро дар намуди ҳосили зарби $(a_1x+b_1)(ax_2+b_2)$, ки дар ин ҷо a_1, b_1, a_2, b_2, $(a_1\neq 0,\ a_2\neq 0)$ ададҳои ҳақиқианд, ифода кардан мумкин бошад? Яъне баробарии

$$ax^2+bx+c=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2) \qquad (1)$$

ҷой дошта бошад.

Фарз мекунем, ки баробарии (1) дуруст аст. Қисми рости (1) ҳангоми $x=-\dfrac{b_1}{a_1}$ ва $x=-\dfrac{b_2}{a_2}$ будан ба нул баробар мешавад, яъне дар ин ҳолат ададҳои $-\dfrac{b_1}{a_1}$ ва $-\dfrac{b_2}{a_2}$ решаҳои муодилаи $ax^2+bx+c=0$ мебошанд.

Бинобар ин дискриминанти сеаъзогии квадратии ax^2+bx+c, ки ба b^2-4ac баробар аст, бояд адади ғайриманфӣ бошад.

Фарз мекунем, ки дискриминанти сеаъзогии квадратӣ $D=b^2-4ac$ ғайриманфӣ аст. Он гоҳ ин сеаъзогӣ решаҳои ҳақиқии x_1 ва x_2-ро дорад. Теоремаи Виетро истифода карда ҳосил мекунем:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2\right]=$$
$$=a\left[(x^2-x_1\cdot x)-(x_2\cdot x-x_1\cdot x_2)\right]=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]=$$
$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Ҳамин тавр, $ax^2+bx+c=\cdot a(x-x_1)(x-x_2)$. Коэффитсиенти a-ро ба яке аз зарбшавандаҳои хаттӣ дохил кардан мумкин аст. Масалан, $a(x-x_1)(x-x_2)=(ax-ax_1)(x-x_2)$. Натиҷаҳои дар боло овардашударо ба намуди теоремаи зерин ҷамъбаст менамоем.

Т е о р е м а. **Сеаъзогии квадратии ax^2+bx+c-ро фақат ва фақат дар ҳамон ҳолат дар шакли ҳосили зарби зарбшавандаҳои хаттӣ бо коэффитсиентҳои ҳақиқӣ навиштан мумкин аст, агар дискриминанти он ғайриманфӣ бошад (яъне, агар сеаъзогӣ дорои решаҳои ҳақиқӣ бошад).**

Э з о ҳ. Умуман, агар дараҷаи бисёраъзогӣ ба миқдори решаҳо баробар бошад, он гоҳ зарбкунандаҳо, ки аз дуаъзогиҳои хаттӣ иборатанд, ҷудо карда мешавад. Дар айни ҳол ҳар як решаи бисёраъзогӣ решаи дуаъзогии хаттӣ аст ва баръакс.

Масалан:

$x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=(x-1)(x-1)(x+1)(x+1)$;

$2x^3+5x^2+x-2=(2x-1)(x+1)(x+2)$.

М и с о л и 1. Сеаъзогии квадратии $6x^2-x-1$-ро ба зарбкунандаҳои хаттӣ ҷудо мекунем.

Ҳ а л. Решаҳои ин сеаъзогии квадратӣ $x_1=\frac{1}{2}$ ва $x_2=-\frac{1}{3}$ мебошанд.

Бинобар ин $6x^2-x-1=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(2x-1)(3x+1)$.

М и с о л и 2. Сеаъзогии кадратии x^2+x+1-ро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем.

Ҳ а л. Дискриминанти ин сеаъзогии квадратӣ манфӣ мебошад: $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$. Пас сеаъзогии квадратӣ реша надорад. Аз ҳамин сабаб аз рӯи теорема вай ба зарбкунандаҳо ҷудо намешавад.

М и с о л и 3. Касри $\frac{2x^2-7x+3}{6x^2-11x+4}$-ро ихтисор мекунем.

Ҳ а л. Барои ин ифодаҳои дар сурат ва махраҷи каср бударо ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем. Муодилаҳои квадратии $2x^2-7x+3=0$ ва $6x^2-11x+4=0$-ро ҳал карда мебинем, ки ададҳои $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=3$ ва $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ решаҳои ин муодилаҳо мебошанд. Пас мувофиқи теорема навишта метавонем:

$$2x^2-7x+3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)=(2x-1)(x-3),$$

$$6x^2-11x+4=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot3\left(x-\frac{4}{3}\right)=(2x-1)(3x-4).$$

Ҳамин тариқ, $\frac{2x^2-7x+3}{6x^2-11x+4}=\frac{(2x-1)(x-3)}{(2x-1)(3x-4)}=\frac{x-3}{3x-4}$.

Ҳолатҳое имконпазиранд, ки агар дар каср ба ҷои тағйирёбандаи сеаъзогии квадратӣ ягон қимат гузорем, сурат ва махраҷи он ба нул баробар мешавад. Дар ин гуна ҳолатҳо аввало сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо намудан ба мақсад мувофиқ аст.

Мисоли 4. Қимати $\frac{3x^2-3x-6}{2x^2+2x-12}$-ро баъди соддакунии ифода ҳангоми x=2 будан меёбем.

Ҳал. Агар бевосита дар ифода x=2 гузорем, он гоҳ сурат ва махраҷ ба нул мубаддал мешавад. Ифодаҳои дар сурат ва махраҷ бударо ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем. Муодилаҳои квадратии $3x^2-3x-6=0$ ва $2x^2+2x-12=0$-ро ҳал намуда, меёбем: $x_1=-1$; $x_2=2$ ва $x_1=2$; $x_2=-3$ решаҳои онҳо мешаванд.

Ҳамин тавр: $\frac{3x^2-3x-6}{2x^2+2x-12}=\frac{3(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+3)}=\frac{3(x+1)}{2(x+3)}=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 5}=\frac{9}{10}$.

Мисоли 5. Қимати $\frac{5x^2-5}{6x^2+6x-12}$-ро баъди соддакунии ифода ҳангоми x=1 будан меёбем.

Ҳал. Монанди мисоли 4 муҳокима ронда ҳосил мекунем: $5x^2-5=0$, $x=1$; $x=-1$; $6x^2+6x-12=0$; $x=1$; $x_2=-2$.

Ҳамин тавр:

$$\frac{5x^2-5}{6x^2+6x-12}=\frac{5(x-1)(x+1)}{6(x-1)(x+2)}=\frac{5(x+1)}{6(x+2)}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 3}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}.$$

? **1.** Теоремаро дар бораи ба зарбкунандаҳо ҷудо кардани сеаъзогии квадратӣ, ки дорои решаҳо мебошад, баён кунед. **2.** Татбиқи теоремаро дар ҳалли мисолҳои мушаххас нишон диҳед.

Сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед (49–53):

49. а) $(x+3)^2-16$; б) $4a^2-x^2+2xy-y^2$; в) $6x^2+24xy+24y^2$.

50. а) $3x(x-3)-x+3$; б) $m(m-1)+(1-m)^2$; в) x^2+x-2.

51. а) $4a^2(b^2-1)+4b^2(1-b^2)$; б) $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$; в) $-y^2+16y-15$.

52. а) $2x^2-5x+3$; б) $2x^2+2x+\frac{1}{2}$; в) $-9x^2+12x-4$; г) $16a^2+24a+9$;

53. а) $0{,}25m^2-2m+4$; б) $-m^2+5m-6$; в) $3x^2+5x-2$; г) $6x^2-13x+6$.

Касрҳоро ихтисор кунед (54–57):

54. а) $\dfrac{3x-12}{x^2+x-20}$; б) $\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2+3x}$; в) $\dfrac{2m^2-7m+3}{2m^2-3m-2}$

55. а) $\dfrac{5a+10}{2a^2+13a+18}$; б) $\dfrac{b^2-8b+15}{b^2-25}$; в) $\dfrac{y^2-5y-36}{81-y^2}$.

56. а) $\dfrac{2a^2-5a-3}{3a-9}$; б) $\dfrac{2y^2+7y+3}{y^2-9}$; в) $\dfrac{3x^2+16x-12}{10-13x-3x^2}$.

57. а) $\dfrac{4x+4}{3x^2+2x-1}$; б) $\dfrac{p^2-11p+10}{20+8p-p^2}$; в) $\dfrac{2m^2-8}{m^2+6m+8}$.

Айниятро исбот кунед (58–59):

58. $10x^2+19x-2=10(x-0{,}1)(x+2)$.

59. $0{,}5(x-6)(x-5)=0{,}5x^2-5{,}5x+15$.

60. Қимати касрро ёбед: $\dfrac{4x^2+8x-32}{4x^2-16}$ ҳангоми $x=-1$; 5, 10 будан.

Машқҳо барои такрор

61. Амалҳоро иҷро намоед:

а) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$; б) $\dfrac{4\frac{1}{2}\cdot 5\frac{2}{3}}{6\frac{3}{4}}$; в) $\dfrac{4\frac{1}{4}}{11\frac{1}{3}\cdot 5\frac{1}{4}}$;

62. Муодиларо ҳал намоед:

а) $x+\dfrac{1}{x}=a+\dfrac{1}{a}$; б) $\dfrac{2x-a}{b}=\dfrac{4x-b}{2x+a}$.

63. 12%-и адади 120-ро ёбед.

64. Ҳисоб кунед:

$$\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):\frac{x+y}{2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right]\frac{xy}{(x+y)^2}$$ ҳангоми $x=-\dfrac{1}{2}; y=-2$ будан.

65. Ҳосили зарби ду адади пай дар паи натуралӣ ба 156 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

66. $\dfrac{3}{5}$-ро дар шакли касри даҳӣ нависед.

67. Амалҳоро иҷро намоед:

а) $a^{-3}\cdot a^{-5}$; б) $\left(-\dfrac{2}{5}a^4x^3y^2\right):\left(-\dfrac{1}{2}a^3xy^2\right)$.

68. Решаҳои сеаъзогии квадратиро ёбед:

а) $9x^2-9x+2$; б) $0{,}2x^2+3x-20$.

69. а) Се дона гулмоҳӣ 11,3 кг аст. Вазни ғулмоҳии якум $\frac{4}{5}$ ҳиссаи вазни дуюм, вазни дуюмаш 70% вазни сеюмро ташкил медиҳад. Вазни ҳар як гулмоҳиро ёбед.

б) Барои 0,8 тонна гандум ва 1,4 тонна ҷавдор 505,02 сомонӣ доданд. Агар 1 тонна ҷавдор аз 1 тон гандум 0,7 камтар сомонӣ бошад, 1 тон ҷавдор ва 1 тон гандум чанд сомонӣ меистад?

§ 3 ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ, ХОСИЯТҲО ВА ГРАФИКИ ОН

7. Функсияи квадратӣ ва хосиятҳои он

Дар соҳаҳои гуногуни илм ва техника бо бузургиҳои тағйирёбанда дучор мешавем, ки онҳо байни худ бо вобастагии функсионалии намудаш $y=ax^2+bx+c$ алоқаманданд.

Масалан, вобастагии байни диаметри доира d ва масоҳати он s бо формулаи

$$S=\frac{\pi}{4}d^2$$

ифода меёбад.

Мо дар ин мисол бо функсияе дучор шудем, ки онро бо формулаи намуди $y=ax^2$ (дар ин ҷо x – тағйирёбандаи новобаста ва a – ягон адад) ифода кардан мумкин аст. Боз як мисол аз физика меорем.

Масофае, ки ҷисм ҳангоми ҳаракати ростхаттаи мунтазам тезшаванда тай мекунад, бо формулаи

$$s=\frac{at^2}{2}+v_0t+s_0$$

ифода карда мешавад. Дар ин ҷо t– вақт, s-роҳи тайкардашуда, s_0 – ибтидои роҳ, v_0 – суръати ибтидоӣ, a – суръатнокӣ мебошад.

Мисоли дар боло овардашуда мисоли функсияи намуди $y=ax^2+bx+c$ мебошад.

Т а ъ р и ф. **Функсияе, ки бо формулаи намуди $y=ax^2+bx+c$ (дар ин ҷо x-тағйирёбандаи новобаста, a, b ва c - ададҳо ва $a\neq0$) ифода карда мешавад, функсияи квадратӣ номида мешавад.**

Графики функсияи квадратии $y=ax^2+bx+c$-ро **парабола** меноманд. Баъзан зери мафҳуми парабола худи функсияи квадратиро дар назар доранд.

Мо омӯзиши хосиятҳои функсияи квадратиро аз мавриди ҷузъӣ, аз функсияи $y=ax^2$ ҳангоми $a>0$ будан оғоз менамоем:

1. Агар $x=0$ бошад, $y=0$ мешавад.

2. Агар $x\neq0$ бошад, $y>0$ мешавад.

3. Функсияи ҷуфт мебошад, зеро $y(x)=y(-x)$ аст. Графики он нисбат ба тири Oy симметрӣ мебошад ё чӣ тавре мегӯянд, он тир **тири симметрияи** функсия аст. Муодилаи ин тир $x=0$ мебошад.

4. Функсия дар нимфосилаи $(-\infty; 0]$ кам мешавад ва дар нимпорчаи $[0; \infty)$ меафзояд.

5. Нимпорчаи $[0; \infty)$ соҳаи қиматҳои функсия мебошад.

Хосиятҳои 1–3 маълум аст. Хосияти 4-ро исбот мекунем.

Фарз мекунем, ки x_1, x_2 ду қимати аргументӣ (дар айни ҳол $x_2>x_1$ аст) ва y_1, y_2 қиматҳои ба онҳо мувофиқи функсия мебошанд. Фарқи y_2-y_1-ро тартиб медиҳем:

$$y_2-y_1=ax_2^2-ax_1^2=a(x_2^2-x_1^2)=a(x_2+x_1)(x_2-x_1).$$

Азбаски $a>0$ ва $x_2-x_1>0$ аст, пас аломати ҳосили зарби $a(x_2+x_1)(x_2-x_1)$ бо аломати зарбшавандаи x_2+x_1 як хел аст. Агар ададҳои x_2 ва x_1 ба фосилаи $[-\infty; 0)$ таалуқ дошта бошанд, он гоҳ ин зарбшаванда манфӣ аст. Агар ададҳои x_2 ва x_1 ба нимпорчаи $[0; \infty)$ таалуқ дошта бошанд, он гоҳ зарбшавандаи x_2+x_1 мусбат аст. Дар мавриди якум $y_2-y_1<0$, яъне $y_2<y_1$ аст; дар мавриди дуюм $y_2-y_1>0$, яъне $y_2>y_1$ аст. Пас функсия дар нимфосилаи $[-\infty; 0)$ кам мешавад ва дар нимпорчаи $[0; \infty)$ меафзояд.

Акнун хосиятҳои функсияи $y=ax^2$-ро ҳангоми $a<0$ будан баён мекунем.

1. **Агар $x=0$ бошад, $y=0$ мешавад.**
2. **Агар $x\neq0$ бошад, $y<0$ мешавад.**
3. **Функсияи ҷуфт аст. Графики он нисбат ба тири Oy симметрӣ мебошад** (дар ин ҳолат мегӯянд, ки тири ордината Oy **тири симметрияаш аст).**
4. **Функсия дар нимфосилаи $(-\infty; 0]$ меафзояд ва дар нимпорчаи $[0; \infty)$ кам мешавад.**
5. **Нимпорчаи $(-\infty; 0]$ соҳаи қиматҳои функсия мебошад.**

Хосияти 4–ум мисли мавриди $a>0$ исбот карда мешавад.

Аз хосиятҳои номбаршуда натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $a>0$ будан **шохаҳои парабола** $y=ax^2$ (қисмҳои график, ки ба фосилаҳои $(-\infty; 0)$ ва $(0; \infty)$ рост меоянд) ба боло ва ҳангоми $a<0$ будан поён равон аст. Тири Oy **тири симметрияи** парабола мебошад. Нуқтаҳои буриши параболаю тири симметрияи онро **қуллаи парабола** меноманд. Қуллаи параболаи $y=ax^2$ бо ибтидои координатаҳо ҳамҷоя аст.

Э з о ҳ. Агар функсияи квадратӣ бо формулаи $y=ax^2+\gamma$ дода шуда бошад, он гоҳ хосиятҳои он ба хосиятҳои 1–5-и функсияи $y=ax^2$ монанданд.

Масалан, ҳангоми $a>0$ будан вай дар фосила $(0; \infty)$ афзуншаванда ва дар $(-\infty; 0)$ камшаванда буда, хати рости $x=0$ яъне тири Oy

тири симметрияш мебошад. Қуллааш дар нуқтаи $(0; \gamma)$ яъне дар тири ордината чойгир аст. Айнан, агар функсияи $y=\alpha(x-\beta)^2+\gamma$-ро ($\alpha$, β, γ– ададҳои ҳақиқӣ) муоина намоем, мебинем, ки хати рости $x=b$ тири симметрии он буда, қуллааш дар нуқтаи $(\beta; \gamma)$ чойгир аст. Шохаҳои парабола ба боло равонанд, агар $a>0$ бошад.

Акнун хосиятҳои функсия $y=ax^2+bx+c$-ро баён мекунем.

Чунонки дар §2 п.5 қайд шуд, функсияи $y=ax^2+bx+c$-ро ба намуди

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

навиштан мумкин аст. Баробарии охиронро чунин менависем:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$$

ки дар ин чо $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$, $\beta=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Мулоҳизаҳои дар эзоҳ овардашударо ба эътибор гирифта, ба хулоса меоем: **графики функсияи $y=ax^2+bx+c$ параболаест, ки қуллааш дар нуқтаи $\left(-\dfrac{b}{2a};\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ мебошад. Хати рости $x=-\dfrac{b}{2a}$ тири симметрияи ин парабола аст. Шохаҳои парабола ҳангоми $a>0$ ба боло ва ҳангоми $a<0$ ба поён равонанд.**

Параболаи $y=ax^2+bx+c$ бо тири Oy нуқтаи буриш дорад. Абсиссаи нуқтаи буриш ба нул ва ординатааш ба c баробар аст. Агар дар ифодаи ax^2+bx+c, $x=0$ гузорем, ординатаи нуқтаи буриш ҳосил мешавад. Масалан, нуқтаи буриши параболаи $y=x^2+4x+3$ ва тири Oy дорои координатаҳои $(0; 3)$ аст.

На ҳар гуна параболаи намуди $y=ax^2+bx+c$ бо тири абсисса Ox нуқтаи буриш дорад. Агар дискриминант $D=b^2-4ac$ мусбат бошад, он гоҳ муодилаи $ax^2+bx+c=0$ ду решаи ҳақиқии гуногун дорад:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Дар ин маврид параболаи $y=ax^2+bx+c$ тири Ox-ро дар ду нуқтаи абсиссаҳояшон мувофиқан x_1 ва x_2 мебурад. Чунончӣ, барои сеаъзогии квадратии x^2+4x+3, $D=16\text{-}12>0$. Ин сеаъзогии квадратӣ ду реша дорад: $x_1=-1$; $x_2=-3$. Бинобар ин параболаи x^2+4x+3 тири Ox-ро дар ду нуқта мебурад, ки абсиссаҳояшон ба -1 ва -3 баробар аст.

Агар $D=b^2-4ac=0$ бошад, муодилаи $ax^2+bx+c=0$ як решаи ҳақиқӣ дорад: $x=-\dfrac{b}{2a}$. Дар ин маврид муодилаи параболаро ба намуди

$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ навиштан мумкин аст.

Ординатаи нуқтаи абсиссааш $-\frac{b}{2a}$ ба нул баробар аст. Дар дигар нуқтаҳои атрофи $-\frac{b}{2a}$ буда, y мусбат мебошад. Дар ин ҳолат мегӯянд, ки нуқтаи $-\frac{b}{2a}$ **нуқтаи расиши** парабола бо тири абсисса Ox аст. Масалан, барои сеаъзогии квадратии x^2-2x+1 $D=0$ аст. Муодилаи $x^2-2x+1=0$ як решаи $x=1$ дорад. Бинобар ин нуқтаи абсиссааш 1 нуқтаи расиши параболаи $y=x^2-2x+1$ ба тири Ox мебошад.

Агар $D=b^2-4ac<0$ бошад, муодилаи $ax^2-bx+c=0$ решаҳои ҳақиқӣ надорад. Дар ин маврид парабола тири Ox-ро намебурад. Масалан, барои сеаъзогии x^2+2x+3 $D=-8<0$. Муодилаи $x^2+2x+3=0$ решаҳои ҳақиқӣ надорад. Параболаи $y=x^2+2x+3$ тири Ox-ро намебурад.

Акнун якчанд мисолҳоро, ки онҳо гуфтаҳои болоро равшан мекунанд, меорем.

М и с о л и 1. Қуллаи параболаи $y=2x^2-4x+5$-ро меёбем.

Ҳ а л. $y=2x^2-4x+5=2\left(x^2-2x+\frac{5}{2}\right)=2(x-1)^2+3.$

Ҷ а в о б: Қуллаи парабола дар нуқтаи (1; 3) ҷойгир аст.

М и с о л и 2. Нуқтаҳои буриши параболаи $y=3x^2-9x+6$-ро бо тирҳои координатаҳо меёбем.

Ҳ а л. Дар параболаи $y=3x^2-9x+6$, x-ро ба 0 баробар карда $y=6$-ро ҳосил мекунем, баъд y-ро ба 0 баробар карда, муодилаи $3x^2-9x+6=0$-ро ҳал намуда, решаҳои он $x_1=1$, $x_2=2$-ро ҳосил менамоем. Параболаи додашуда тири Ox-ро дар нуқтаҳои (1; 0), (2; 0) ва Oy-ро дар нуқтаи (0; 6) мебурад.

М и с о л и 3. Функсияи квадратии $y=2x^2-2x+12$ дода шудааст. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии онро меёбем.

Ҳ а л. Функсияи квадратиро ба намуди $2x^2-2x+12=2(x-0{,}5)^2+11{,}5$ табдил медиҳем. $x=0{,}5$ – тири симметрияи он буда, қуллааш дар нуқтаи (0,5; 11,5) ҷойгир аст. Азбаски $a=2>0$ мебошад, бинобар ин шохаҳои парабола ба боло равонанд. Вай дар фосилаи $(0{,}5; \infty)$ афзуншаванда ва дар фосилаи $(-\infty; 0{,}5)$ камшаванда мешавад.

? 1. Таърифи функсияи квадратиро баён кунед. 2. Хосиятҳои функсияи квадратии $y=ax^2$-ро: а) ҳангоми $a>0$ будан; б) ҳангоми $a<0$ будан баён кунед. 3. Хосиятҳои функсияи квадратии $y=ax^2+bx+c$-ро баён кунед.

70. Самти равиши шохаҳои параболаро муайян намоед.

а) $y=-7x^2+6x+1$; в) $y=3x^2+2x$;

б) $y=x^2-3x+1$; г) $y=-x^2+4x+8$.

71. Координатаҳои қулла ва муодилаи тири симметрии функсияро ёбед.

а) $y=3x^2+4$; в) $y=3x^2-12x$ д) $y = 2x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{8}$

б) $y=-2(x-2)^2+3$; г) $y=-5x^2+4x+1$; е) $y=-7x^2+6x+1$.

72. Нулҳои функсияро ёбед:

а) $y=3x^2-7x+4$; в) $y=3x^2-13x+14$;

б) $y=5x^2-8x+3$; г) $y=2x^2-9x+10$.

73. Нуқтаи буриши параболаро бо тири ордината ёбед:

а) $y=5x^2-7x+1$; в) $y=-x^2+4$;

б) $y=3x^2+x+2$; г) $y=x^2-3x+5$.

74. Магар парабола тири абсиссаро мебурад? Агар бурад, координатаҳои нуқтаҳои буришро ёбед.

а) $y=2x^2-5x-3$; в) $y=5x^2+9x+4$;

г) $y=3x^2-2x+1$; г) $y=36x^2-12x+1$.

75. Координатаҳои нуқтаи расиши параболаро муайян кунед:

а) $y=2x^2-12x+18$; в) $y=x^2-2x+1$;

б) $y=-x^2+x-0{,}25$; г) $y=x^2-4x-1$.

76. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияро ёбед?

а) а) $y=-x^2+x$; в) $y=-2x^2+12x-19$; д) $y=3(x+1)^2$;

б) $y=3x^2-7x+4$; г) $y=\frac{1}{4}x^2+x+1$; е) $y=-2x^2+4x+4$.

Машқҳо барои такрор

77. Касрҳоро ихтисор кунед:

а) $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$; *б)* $\frac{y^2-x^2}{(x+y)^2}$; *в)* $\frac{m-n}{(n-m)^2}$.

78. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{8}{1-4x^2}$; *б)* $\frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} + \frac{1+3x}{3x-1}$.

79. Парвиз ва Фирдавс дар якҷоягӣ 100 саҳифа китоб хонданд. Агар маълум бошад, ки Парвиз аз Фирдавс 4 саҳифа кам китоб хондааст, Парвиз ва Фирдавс чанд саҳифагӣ китоб хондаанд?

80. Сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $-y^2+6y-5$; б) $-x^2-5x+6$; в) $2x^2-5x+3$; г) $5y^2+2y-3$.

8. Экстремуми функсияи квадратӣ

Чӣ тавре дидем соҳаи муайянии функсияи квадратии $y=ax^2+bx+c$ маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ $R=(-\infty;\ \infty)$ аст. Соҳаи қиматҳояш низ ҳамин ададҳо мебошанд.

Т а ъ р и ф. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияро **қимати экстремалӣ ё экстремуми** он меноманд. Нуқтаҳое, ки дар он ин қиматҳо қабул карда мешаванд, **нуқтаҳои экстремалӣ ё экстремал** ном доранд.

Тарзи ёфтани экстремум ва экстремалҳои функсияи дилхоҳро истисно карда, дар ин пункт мо танҳо тарзи ёфтани онҳоро барои функсиян квадратӣ нишон медиҳем. Омӯзишро аз ҳолати хусусӣ сар мекунем.

Бигузор дар формулаи функсия коэффитсиент $b=0$ бошад, яъне $y=ax^2+c$ аст. Аз сабаби ҷуфт будани функсия муоинаи он дар фосилаи $(0;\ \infty)$ кифоя аст.

а) $a>0$ функсия афзуншаванда аст. Инчунин ҳар гуна қимати он аз адади c хурд нест, барои ҳар гуна x; $ax^2+c\geq c$ чунки қимати ифодаи ax^2 адади ғайриманфӣ аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки қимати хурдтарини функсия ба c баробар буда, ин қиматро функсия дар нуқтаи $x=0$ соҳиб мешавад. Функсия қимати калонтарин надорад, ки он аз афзуншаванда буданаш бармеояд.

Ҳамин тариқ, агар бо $y_{min}=c$; $x=0$ ишорат кунем.

Ё ҳар ду баробариро ҳамҷоя карда ин тавр навиштан мумкин аст: $y_{min}=y(0)=c$; (*min* решаи калимаи лотинии **minimum**, ки маъноям хурдтарин аст).

б) $a<0$ функсияи $y=ax^2+c$ дар ин маврид камшаванда буда, қиматаш барои ҳар гуна қимати аргументи x аз қимати c зиёд нест, чунки қимати ифодаи ax^2 барои ҳар гуна қимати аргумент адади ғайримусбат аст.

Ҳангоми $x=0$ бошад, $y=c$ аст. Пас қисмати калонтарини функсия ба адади c баробар аст. Аз сабаби камшаванда буданаш функсия қимати хурдтарин надорад.

Ҳамин тариқ, агар бо y_{max} қимати калонтарини функсия ва бо x_{max} нуқтаи экстремалиро ишорат намоем, пас

$$y_{max}=c;\quad x_{max}=0 \quad \text{ё} \quad y_{max}=y(0)=c$$

(*max* – решаи калимаи **maximum**,ки маънояш калонтарин мебошад).

Ҳар ду ҳолатро ҳамҷоя карда ба хулосаи зерин меоем.

Функсияи $y=ax^2+c$ ҳангоми $a>0$ будан дорои қимати хурдтарин буда қимати калонтарин надорад. Ин функсия ҳангоми $a<0$ будан қимати калонтарин дошта қимати хурдтарин надорад. Дар ҳар ду маврид қимати экстремалӣ ба адади c баробар буда, дар нуқтаи $x=0$ қабул карда мешавад.

Акнун ба ҳолати умумӣ бармегардем, яъне ба функсияи $y=ax^2+bx+c$.

Чӣ тавре дар пункти 5 нишон додем, ҳар гуна функсияи квадратиро дар намуди

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (1)$$

навиштан мумкин аст. Муқоисаи (1) бо функсияи $y=ax^2+c$ нишон медиҳем, ки дар (1) ба ҷои x ифодаи $x + \frac{b}{2a}$ ва ба ҷои c ифодаи $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ меояд. Мулоҳизаронихои дар қисмчаҳои а) ва б)-и боло барои функсияи $y=ax^2+c$ гузаронидаамонро айнан барои функсияи (1) такрор карда чунин натиҷаро ҳосил мекунем, ки он яке аз хосиятҳои асосии парабола мебошад:

А) Функсияи квадратии $y=ax^2+bx+c$ ҳангоми $a>0$ будан қимати хурдтарин дорад. Ин қимат ба $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ баробар буда, дар нуқтаи x, ки барояш $x + \frac{b}{2a}=0$ ё $x = -\frac{b}{2a}$ аст, ҳосил мешавад. Яъне

$$y_{min} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}; \quad x_{min} = -\frac{b}{2a}.$$

Функсия қимати калонтарин надорад.

Б) Ҳамин функсия ҳангоми $a<0$ будан қимати калонтарин дорад. Ин қимат $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ буда, дар нуқтаи $x = -\frac{b}{2a}$ ҳосил мешавад.

Яъне $y_{max} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}; \quad x_{max} = -\frac{b}{2a}.$

Функсия қимати хурдтарин надорад.

Эзоҳи 1. Натиҷаҳои ҳосилшуда нишон медиҳанд, ки нуқтаи экстремалии функсияи квадратӣ қуллаи парабола (ниг. ба пункти 7) мебошад. Оянда ҳангоми сохтани графики функсияи квадратӣ аз ин натиҷа истифода хоҳем кард.

Эзоҳи 2. Қимати хурдтарини функсияро минимум ва қимати калонтаринро максимум ҳам мегӯянд.

Мисоли 1. Нуқтаи экстремалӣ ва экстремуми функсияи $y=2x^2+3$-ро меёбем.

Ҳал. Барои ёфтани экстремум ва экстремали функсия чунин рафтор мекунем. Азбаски функсия ҷуфт мебошад, бинобар ин онро дар фосилаи $(0; \infty)$ муоина намудан кифоя аст. Дар ин ҷо $a=2>0$. Аз ҳамин сабаб функсия афзуншаванда мебошад. Азбаски ҳамеша $2x^2+3\geq3$ аст, пас қимати хурдтарини функсия ба 3 баробар буда, функсия онро ҳангоми $x=0$ будан қабул менамояд. Ҳамин тавр қимати хурдтарин ё минимуми функсия ба 3 баробар аст:

$$y_{min}=3,\quad x_{min}=0 \text{ ё } y_{min}=y(0)=3.$$

Мисоли 2. Экстремум ва экстремали функсияи $y=-3x^2+4$-ро меёбем.

Ҳ а л. Функсия дар фосилаи $(0; \infty)$ камшаванда буда, қиматаш барои ҳар гуна қимати x аз 4 калон нест, чунки ифодаи $-3x^2$ барои ҳар гуна қимати x ғайримусбат аст. Ҳангоми $x=0$ будан $y=4$ аст. Пас қимати калонтарини функсия ба 4 баробар аст. Аз сабаби камшаванда буданаш функсия қимати хурдтарин надорад.

$$y_{max}=4,\quad x_{max}=0 \quad \text{ё} \quad y_{max}=y(0)=4.$$

Мисоли 3. Экстремум ва экстремали функсияи $y=2(x-3)^2+5$-ро бо ду тарз меёбем.

Ҳ а л. Тарзи якум. Қавсро кушода ҳосил мекунем:

$$y=2x^2-12x+23.$$

Азбаски $a=2>0$ мебошад. Бинобар ин функсия қимати хурдтарин дорад. Ин қимат ба $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=-\dfrac{144-184}{8}=\dfrac{40}{8}=5$ баробар буда, дар нуқтаи $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{12}{4}=3$ қабул карда мешавад.

Ҳамин тариқ, $y_{min}=5$; $x_{min}=3$.

Функсия ба қимати калонтарин доро нест.

Тарзи дуюм. Бевосита аз $y=2(x-3)^2+5$ маълум мешавад, ки $x_{min}=3$; $y_{min}=5$ мебошад.

Мисоли 4. Экстремум ва экстремалҳои функсияи $y=-3x^2+12x-8$-ро меёбем.

Ҳ а л. Азбаски $a=-3<0$ мебошад, бинобар ин функсия қимати калонтарин дорад. Ин қимат $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=\dfrac{12^2-4(-3)\cdot(-8)}{4\cdot(-3)}=\dfrac{144-96}{12}=\dfrac{48}{12}=4$ буда, дар нуқтаи $x=-\dfrac{2}{2a}=-\dfrac{12}{2(-3)}=2$ қабул карда мешавад. Яъне $y_{max}=4$, $x_{max}=2$.

Функсия қимати хурдтарин надорад.

Функсияи додашударо ба намуди $y=-3(x-2)^2+4$ нависем, он гоҳ бевосита $y_{max}=4$, $x_{max}=2$ навишта метавонем.

? 1. Экстремум ва экстремали функсия чист? 2. Функсияи квадратӣ дар кадом ҳолат қимати хурдтарин ва дар кадом ҳолат қимати калонтарин дорад? Магар барои функсияи квадратӣ ҳардуи ин қиматҳо вуҷуд доранд? 3. Қиматҳои экстремалии функсияи квадратӣ ва экстремали он ба чӣ баробар аст?

81. Кадоме аз функсияҳои зерин қимати калонтарин ва кадоме қимати хурдтаринро доранд:

а) $y=2x^2+12x+13$; в) $y=x^2+x-6$; д) $y=-2x^2+6x-6$;
б) $y=-2x^2-4x-5$; г) $y=-0,5x^2+1,5x+2$; е) $y=3x^2-6x+5$;

82. Экстремуми функсияро ёбед:

а) $y=x^2-2x-15$; в) $y=x^2+2x+1$; д) $y=2x^2+2x$;

б) $y=-x^2+6x-7$; г) $y=-2x^2-4x+1$; е) $y=-3x^2+18x-26$.

83. Экстремали функсияи квадратиро ёбед:

а) $y=2x^2+3$; в) $y=-4x^2+16x-13$; д) $y=-x^2+2x$;

б) $y=x^2-x$; г) $y=4x^2+4$; е) $y=2x^2+12x+10$.

84. Экстремум ва экстремали функсияро ёбед:

а) $y=3(x+2)^2-1$; в) $y=2(x+3)^2+1$; д) $y=-4(x-2)^2+1$;

б) $y=-3(x+2)^2-1$; г) $y=4(x-2)^2-1$; е) $y=3x^2-18x+30$.

Машқҳо барои такрор

85. Амалҳоро иҷро кунед:

а) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$; б) $\frac{x^2+4x+3}{x-5}\cdot\frac{x^2-5x}{x+3}$.

86. Муодилаи квадратиро ҳал кунед:

а) $x^2+12x-64=0$; б) $x^2-4x=45$.

87. Самти равиши шохаҳои параболаҳоро муайян намоед:

а) $y=-\frac{1}{3}x^2+4x+10$; б) $y=5x^2-\frac{1}{3}x+\frac{4}{5}$.

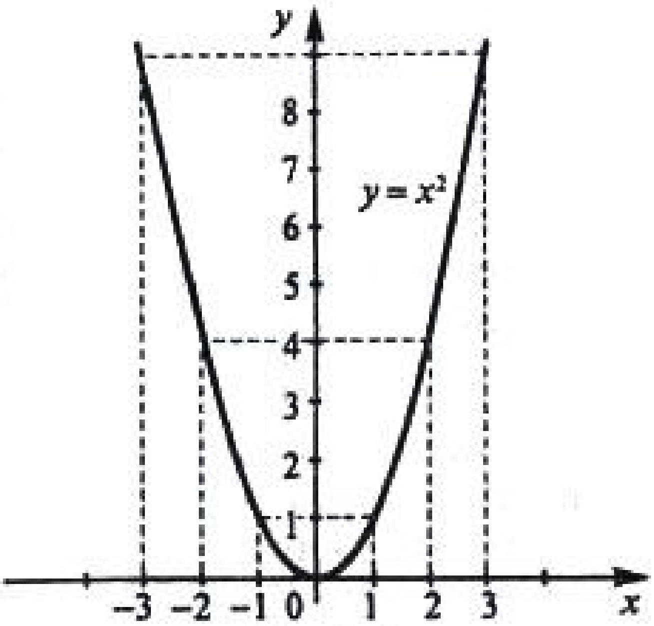
88. Аз 3200 нафар аҳолии деҳа 60%-ро коргарони совхоз ташкил медиҳанд. Дар совхоз чанд нафар коргар истиқомат дорад?

9. Графики функсияи квадратӣ

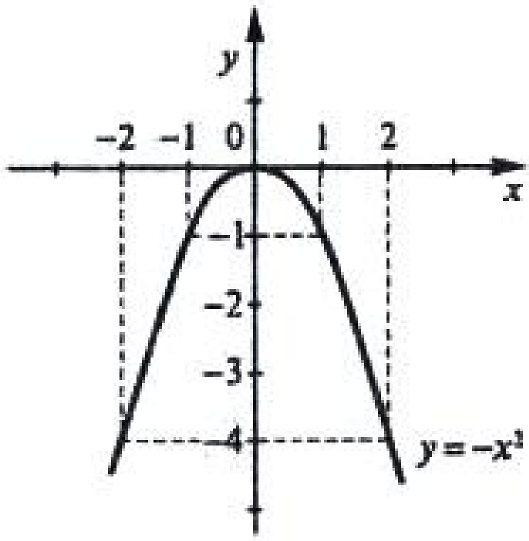
Дар пункти 2 мафҳуми графики функсияи $y=f(x)$-ро ҳамчун маҷмӯи нуқтаҳои ҳамворӣ, ки координатаҳояшон $(x; y)$ баробарии $y=f(x)$-ро қаноат менамоянд дохил карда будем. Дар пунктҳои пасоянд ҳангоми омӯхтани хосиятҳои функсияи квадратӣ чандин маротиба ба рафтори графики ин функсия ишора кардем. Вале мо то ҳол боре ҳам графики ягон параболаро насохтем. Акнун ба сохтани графики парабола ё функсияи квадратии $y=ax^2+bx+c$ шурӯъ менамоем. Чун ҳамеша аз функсияи квадратии оддитарин $y=ax^2$ сар мекунем. Барои ин аз схемаи кашидани графики функсияи формулааш додашуда, ки дар қисми (*b*)–и пункти 2 баён шудааст, истифода мекунем.

А) Фарз мекунем, ки $a=1$ аст, он гоҳ функсияи квадрати намуди $y=x^2$-ро мегирад. Графики ин функсияро аз рӯи нуқтаҳояш месозем. Барои ин мақсад ҷадвали зеринро тартиб медиҳем.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	2	3	–	–	–
$y=x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	1	4	9	–	–	–



Расми 6



Расми 7

Аз рӯи координатаҳояшон нуқтаҳоро дар ҳамворӣ сохта баъд онҳоро бо хати кач мепайвандем. Ин хати кач п а р а б о л а аст, ки дар расми 6 тасвир шудааст. Параболаи $y=x^2$ ба хосиятҳои зерин молик аст.

Вай дар нимҳамвории болоӣ ҷойгир аст. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки функсияи $y=x^2$ фақат қиматҳои ғайриманфиро қабул менамояд. Шохаҳои парабола ба боло равонаанд. Вай дар фосилаи $(-\infty; 0)$ камшаванда шуда, дар $(0; \infty)$ афзуншаванда аст. Парабола дар ибтидои координата бо тири абсисса расиш дорад. Ин нуқта, ки нуқтаи поёнии график аст, **қуллаи парабола** мебошад.

Тири Oy **тири симметрияи** ин парабола мебошад, яъне муодилаи тири симметрия хати рости $x=0$ аст. Ин чунин маъно дорад, ки агар графики дар расми 6 тасвиршударо аз рӯи тири Oy қат намоем, он гоҳ қисми рост ва чапи он ҳамҷоя мешаванд.

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки қимати функсияи $y=x^2$ ҳангоми ивазшавии аломати аргумент тағйир намеёбад, яъне $(-x)^2=x^2$. Ин гуна функсияҳоро функсияи ҷуфт гуфта будем, ки графикашон нисбат ба тири Oy симметрӣ мебошад.

Бигзор акнун $a=-1$ бошад, яъне $y=-x^2$. Барои сохтани графики ин функсия ҷадвали зеринро тартиб медиҳем:

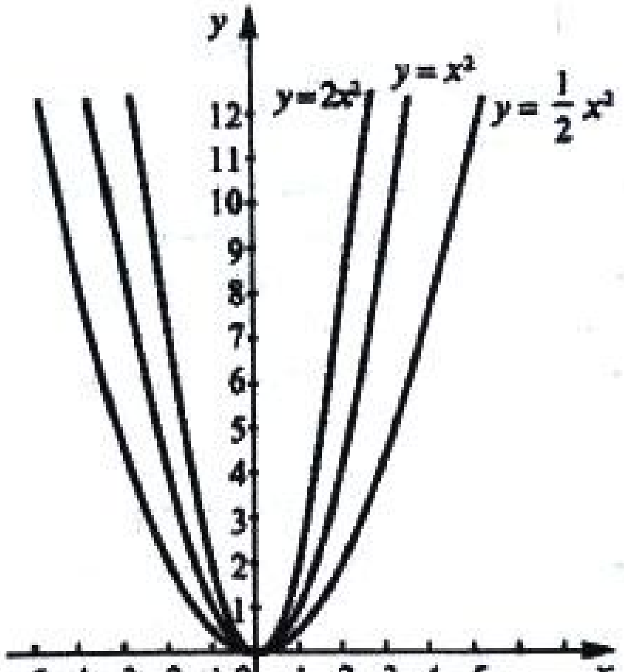
y	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
$y=-x^2$	-9	-4	-1	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	-9	...

Мисли боло аз рӯи координатаҳояшон нуқтаҳоро дар ҳамворӣ тасвир намуда, баъд онҳоро бо хати кач пайваст мекунем. Дар натиҷа параболае ҳосил мешавад, ки шохаҳояш поён равонанд. Қуллааш (ибтидои системаи координатаҳо) нуқтаи болотарини (қимати калонтарини функсия) он мебошад. Тири симметриаш тири ордината аст (расми 7).

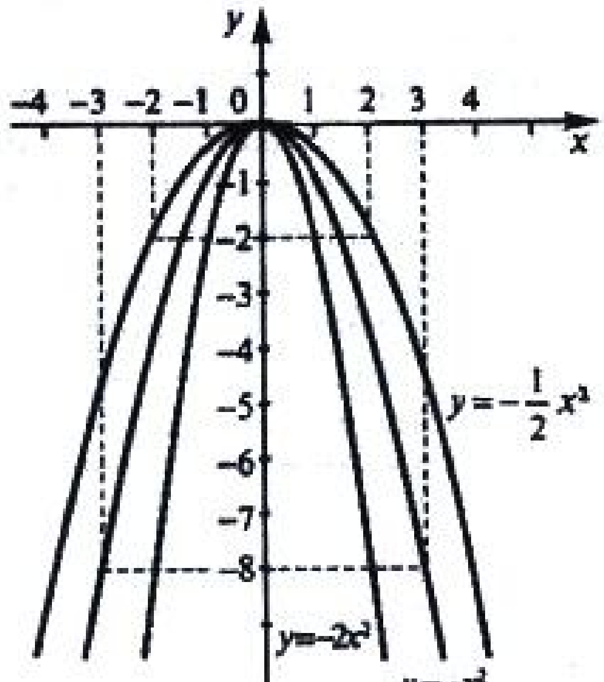
Акнун графики функсияи $y=ax^2$-ро мисли графики функсияи $y=x^2$ бо усули «нуқтаҳо» месозем. Аввало мавридеро мебинем, ки дар он $a>0$ аст. Дар як системаи координатаҳо графики функсияи $y=ax^2$-ро ҳангоми $a=\frac{1}{2}$; 1; 2 будан месозем (расми 8). Дар ҳар се ҳолат ҳам хатҳои каҷи ҳосилшуда ба тири ордината симметрӣ буда, дар нимҳамвории болои воқеанд. Шохаҳои ин параболаҳо ба боло равонанд. Қуллаи умумиашон ибтидои координата ва тири симметрияи ҳар се график тири ордината мебошад. Аз расми 8 намоён аст, ки a ҳар қадар калон бошад, шохаҳои параболаи $y=ax^2$ ҳамон қадар рост ва a ҳар қадар хурд бошад, шохаҳо ҳамон қадар паҳн мешаванд, яъне аз тири симметрия бо афзудани аргумент дур мешаванд.

Акнун мавриди $a<0$-ро дида мебароем. Дар расми 9 хати каҷи $y=ax^2$ ҳангоми $a=-\frac{1}{2}$; -1; -2 тасвир ёфтааст.

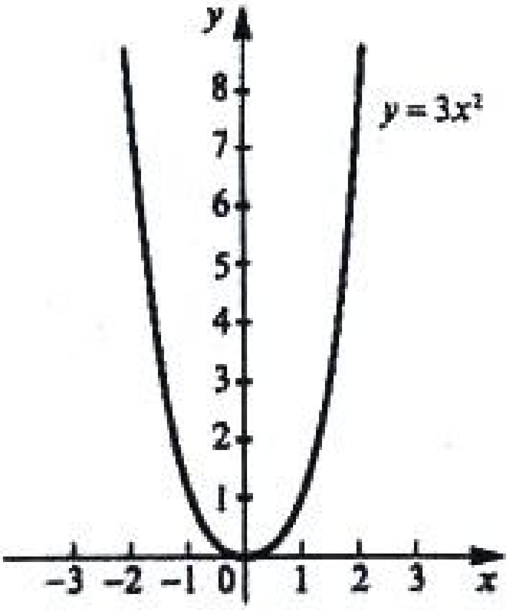
Қуллаи умумии ин параболаҳо (ибтидои системаи координатаҳо) нуқтаи болотарини онҳост. Тири ордината барои ҳар яки ин хатҳо тири симметрия аст. Бузургии мутлақи a ҳар қадар калон бошад, шохаҳои парабола ҳамон қадар рост мешаванд; $|a|$ ҳар қадар хурд бошад, шохаҳои парабола ҳамон қадар паҳн мешаванд.



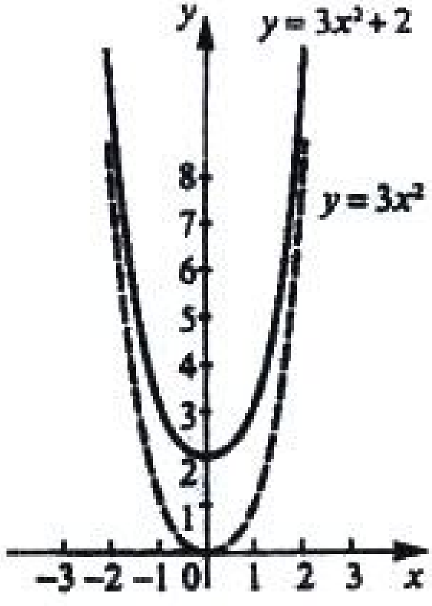
Расми 8



Расми 9



Расми 10, *а*



Расми 10, *б*

Графики функсияи $y=ax^2+c$. Графики ин функсияро аз графики функсияи $y=ax^2$ дар натиҷаи қад-қади тири Oy ба боло c воҳид (агар $c>0$ бошад) ё ба поён $-c$ воҳид (агар $c<0$ бошад), параллел кӯчонидан ҳосил кардан мумкин аст.

Мисоли 1. Графики функсияи $y=3x^2+2$-ро месозем.

Ҳал. Бо ин мақсад графики функсияҳои $y=3x^2$ ва $y=3x^2+2$-ро дар як системаи координатаҳо месозем. Аввал ҷадвали қиматҳои функсияи $y=3x^2$-ро тартиб медиҳем

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	27	12	3	0	3	12	27	...

ва аз рӯи он график месозем (ниг. ба расми 10,а).

Барои тартиб додани ҷадвали қиматҳои функсияи $y=3x^2+2$ ба қиматҳои ёфташудаи функсияи $y=3x^2$ адади 2-ро ҷамъ кардан кифоя аст.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	29	14	5	2	5	14	29

Нуқтаҳоеро, ки координатаҳояшон дар ин ҷадвал оварда шудаанд, дар ҳамвории координатавӣ тасвир карда онҳоро бо хати суфта мепайвандем. Дар натиҷа графики функсияи $y=3x^2+2$ ҳосил мешавад (расми 10,б).

Ба ҳар як нуқтаи $(x_0;\ y_0)$-и графики функсияи $y=3x^2$ нуқтаи ягонаи $(x_0;\ y_0+2)$-и графики функсияи $y=3x^2+2$ мувофиқ меояд ва баръакс. Яъне, агар ҳар як нуқтаи графики функсияи $y=3x^2$-ро 2 воҳид ба боло ҷойиваз намоем, нуқтаи мувофиқи графики функсияи $y=3x^2+2$-ро ҳосил мекунем.

Ҳамин тариқ, графики функсияи $y=3x^2+2$ параболаест, ки қуллааш дар нуқтаи (0; 2) буда, шохаҳояш ба боло равон аст.

Мисоли 2. Графики функсияи $y=3x^2-2$-ро месозем.

Ба монанди мисоли 1 муҳокима ронда ба хулосае меоем, ки график параболае мебошад, ки қуллааш дар нуқтаи (0;−2) буда, шохаҳояш ба боло равонаанд.

Дар ин ҷо графики функсияро бо ёрии сохтани нуқтаҳо нишон додем. Бояд қайд намуд, ки ин тарз аз бисёр ҷиҳатҳо номукаммал аст.

Пеш аз ҳама номукаммалии ин тарз дар он зоҳир мешавад, ки мо шумораи беохири нуқтаҳоро сохта наметавонем, аммо ҳар як хати кач дорои шумораи беохири нуқтаҳо мебошад.

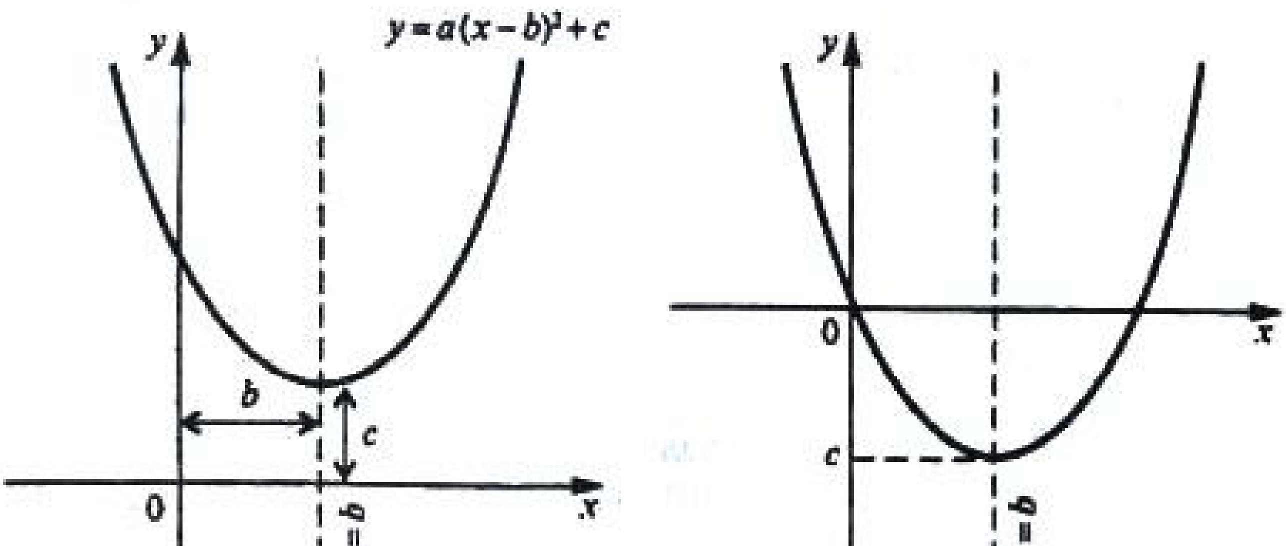
Ғайр аз ин мо бо ин тарз равиши функсияро дар фосилаҳои охирнок муайян карда метавонему ҳалос, аммо функсия метавонад дар фосилаи беохир, масалан дар $(-\infty; \infty)$ дода шуда бошад.

Аз тарафи дигар ҳангоми сохтани графики функсия бояд хосиятҳои он пешакӣ муайян карда шавад, аммо бо ин тарз хосиятҳои функсия қариб истифода намешаванд.

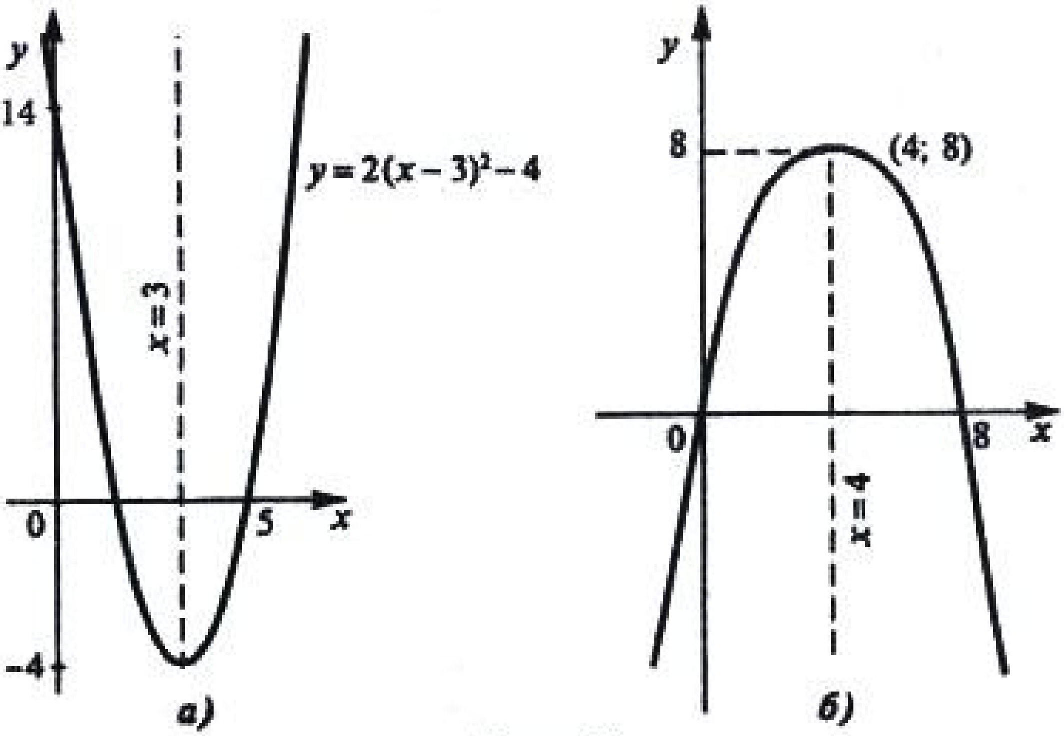
Далелҳои дар боло овардашуда моро водор мекунанд, ки графики функсияро дар асоси хосиятҳои он созем.

Б) Графики функсияи $y=a(x-b)^2+c$.

Чӣ тавре, ки дар §3 п.7 дидем хати рости $x=b$ тири симметрии он буда, қуллааш дар нуқтаи $(b; c)$ ҷойгир аст. Агар $a>0$ бошад, қимати хурдтаринаш ба c баробар аст, яъне шохаҳои парабола ба боло равонанд (расми 11).



Расми 11



Расми 12

Агар $a<0$ бошад шохаҳои парабола ба поён равонанд. Қимати калонтаринаш c аст.

Мисоли 3. Графики функсияи $y=2(x-3)^2-4$-ро месозем. Хати рости $x=3$ тири симметрияи параболаи $y=2(x-3)^2-4$ буда, қуллааш дар нуқтаи (3; −4) ҷойгир аст. Азбаски $a=2>0$ аст, пас шохаҳои парабола ба боло равонанд. Парабола тири абсиссаро дар нуқтаҳои (1; 0); (5; 0) ва тири ординатаро дар нуқтаи (0; 14) мебурад (расми 12, *а*).

Мисоли 4. Графики функсияи $y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8$-ро месозем.

Хати рости $x=4$ тири симметрияи параболаи додашуда буда, қуллааш дар нуқтаи (4; 8) ҷойгир аст. Азбаски $a=-\frac{1}{2}<0$ аст, пас шохаҳои парабола ба поён равонанд. График тирҳои абсиссаро дар нуқтаҳои (0; 0) (8; 0) мебурад (расми 12, *б*).

Мисоли 5. Аз функсияи квадратии $y=2x^2-8x+9$ квадрати пурра ҷудо карда графикашро месозем.

Ҳ а л. Функсияи додашударо ба квадрати пурра меорем:

$$2x^2-8x+9=2(x-2)^2+1.$$

Хати рости $x=2$ тири симметрии парабола буда, қуллааш дар нуқтаи (2; 1) ҷойгир аст. Парабола тири Ox-ро намебурад, чунки дискриминант манфӣ мебошад. Шохаҳои парабола ба боло равонаанд. Парабола тири Oy-ро дар нуқтаи (0; 9) мебурад (расми 13).

В) Графики функсияи $y=ax^2+bx+c$.

Акнун схемаи умумии сохтани графики функсияи квадратии $y=ax^2-bx+c$-ро меорем. Ин схема ба хосиятҳои функсия, ки онҳо дар пунктҳои 7 ва 8 дарҷ гардида буданд, асос карда мешавад.

1. *Равиши шохаҳоро муайян мекунем.* Чӣ тавре дидем, агар $a>0$ бошад шохаҳо ба боло ва агар $a<0$ бошад, шохаҳо ба поён равонаанд.

2. *Нуқтаҳои буриши графикро бо тири координатаҳо муайян мекунем.* Барои ёфтани нуқтаи буриш бо тири ордината (чунин нуқта ҳамеша вуҷуд дошта ягона аст!) дар формула $x=0$ гузошта $y=c$ ҳосил мекунем. Яъне, нуқтаи $(0; c)$ ки дар тири ордината ҷойгир аст, мутааллиқи график мебошад. Барои ёфтани нуқтаҳои буриш ба тири абсисса $y=0$ гузошта муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$-ро ҳосил мекунем. Агар ин муодила дорои ду решаи x_1 ва x_2 бошад ($D=b^2-4ac>0$) он гоҳ тири абсиссаро дар нуқтаҳои $(x_1; 0)$ ва $(x_2; 0)$ мебурад. Агар муодила як реша дошта бошад ($D=b^2-4ac=0$) он гоҳ ин реша, ки ба $-\dfrac{b}{2a}$ баробар аст, нуқтаи *расиши* парабола бо тири абсисса мебошад. Агар муодилаи квадратӣ реша надошта бошад ($D=b^2-4ac<0$) он гоҳ графики функсияи квадратӣ тири абсиссаро намебурад.

3. *Координатаҳои қулла, тири симметрия, экстремум ва экстремали параболаро меёбем.* Чӣ тавре дидем (ниг. ба § 2 п. 5)

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Ин табдилот нишон медиҳад, ки абсиссаи қулла ба $-\dfrac{b}{2a}$ ординатааш ба $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ баробар аст. Дар навбати худ нуқтаи $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ экстремали функсия буда қимати экстремалиаш ё экстремумаш ба $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ баробар мебошад, яъне

$$y_{\text{экстр}}=y\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

(ин қимат хурдтарин аст, агар $a>0$ ва калонтарин аст, агар $a<0$ бошад). Муодилаи хати росте, ки тири симметрияи графики функсия аст, муодилаи $x=-\dfrac{b}{2a}$ мебошад. (Ин хати рост бо тири ордината параллел буда, аз нуқтаҳои абсиссаашон якхелаи ба $-\dfrac{b}{2a}$ баробар иборат аст).

4. *Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии (монотонӣ) функсияро муайян мекунем.* Аз мулоҳизаҳои боло бармеояд, ки агар $a>0$ ($a<0$) бошад, он гоҳ дар фосилаи $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$ функсияи квадратӣ камшаванда (афзуншаванда) буда, дар фосилаи $\left(-\dfrac{b}{2a}; \infty\right)$ афзуншаванда (камшаванда) аст.

Маълумотҳои дар бандҳои 1)-4) овардашуда пурра имконият медиҳанд, ки графики парабола сохта шавад. Дурустии ин тасдиқотро дар мисолҳои сохтани графикҳои функсияҳои квадратӣ мушаххас нишон медиҳем.

Мисоли 6. Графики функсияи $y=x^2+6x+5$-ро месозем.

1) Шохаҳои парабола ба боло равонаанд, чунки $a=1>0$ аст.

2) Нуқтаи буриши функсияро бо тирҳои координата меёбем; ҳангоми $x=0$ будан $y=5$ мешавад, яъне график тири $0y$-ро дар нуқтаи $(0; 5)$ мебурад. Ҳангоми $y=0$ будан $x^2+6x+5=0$ аст. Ин муодилаи квадратиро ҳал намуда $x_1=-5$; $x_2=-1$-ро ҳосил мекунем, яъне график тири $0x$-ро дар нуқтаҳои $(-5; 0)$ ва $(-1; 0)$ мебурад.

3) Координатаҳои қуллаи парабола $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-3$; $y_0=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=$ $=-4$ мешаванд; тири симметрияи график хати рости $x=-3$ аст.

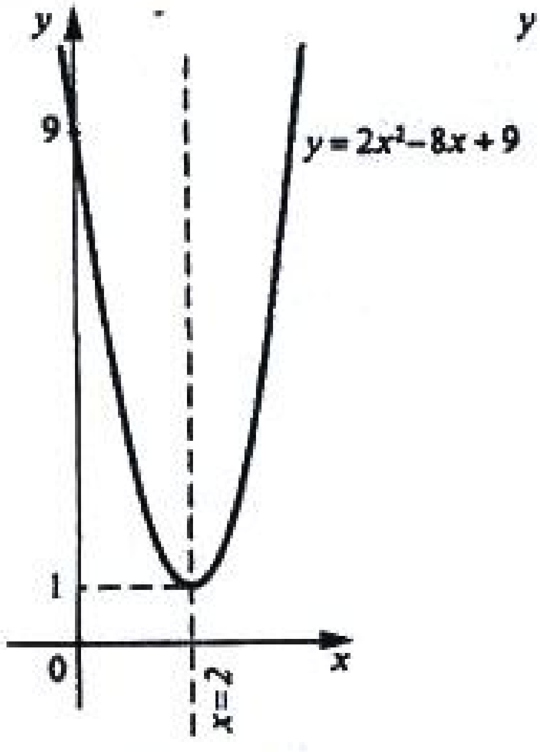
4) Функсия дар фосилаҳои $(-\infty; -3)$ камшаванда ва дар $(-3; \infty)$ афзуншаванда аст.

Натиҷаҳои болоро ҷамъбаст намуда, графики функсияро месозем. (Расми 14).

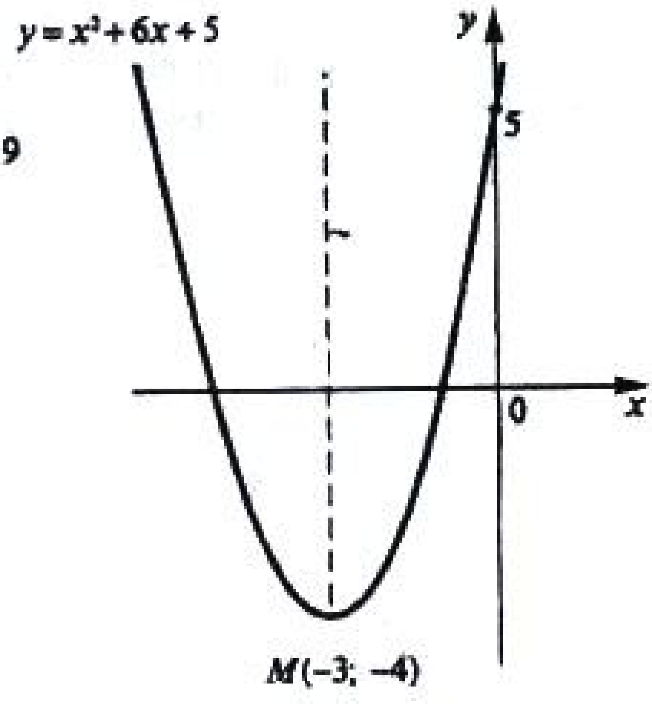
Мисоли 7. Графики функсияи $y=-x^2-6x+1$-ро месозем.

1. Шохаҳои парабола ба поён равонанд, чунки $a=-1<0$.

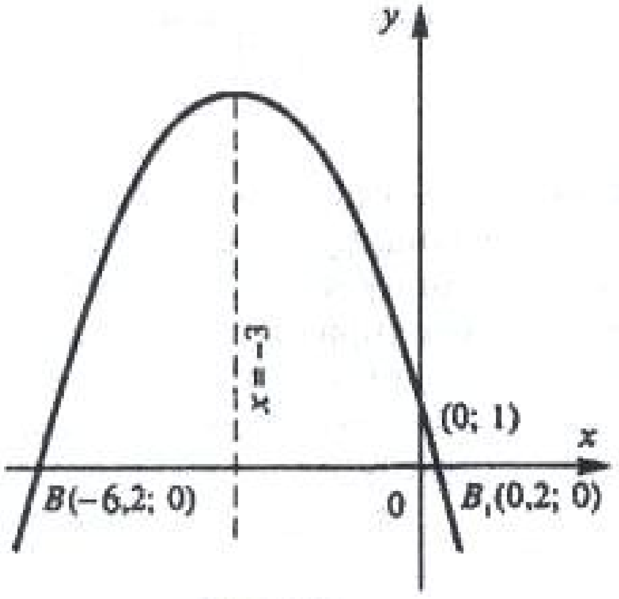
2. Дар ҳолати $x=0$ будан $y=1$ аст, яъне график тири $0y$-ро дар нуқтаи $(0; 1)$ мебурад. Ҳангоми $y=0$ будан $-x^2-6x+1=0$ мешавад. Муодилаи квадратиро ҳал намуда $x_1=-6{,}2$; $x_2=0{,}2$-ро ҳосил мекунем, яъне график тири $0x$-ро дар нуқтаҳои $(-6{,}2; 0)$ ва $(0{,}2; 0)$ мебурад.



Расми 13



Расми 14



Расми 15

3. Координатаҳои қуллаи парабола $x_0=-\frac{b}{2a}=-3$; $y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}=10$ тири симметрияи он хати $x=-3$ аст.

4. Функсия дар фосилаи $(-\infty; -3)$ афзуншаванда ва дар фосилаи $(-3; \infty)$ камшаванда аст.

Графики функсия дар расми 15 тасвир ёфтааст.

Мисоли 8. Графики функсияи $y=x^2-4x$-ро месозем.

1) $a=1>0$ шохаҳо ба боло равонанд.

2) Нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои координата меёбем:

$x=0$; $y=0$; $(0; 0)$; $y=0$; $x^2-4x=0$; $x(x-4)=0$;

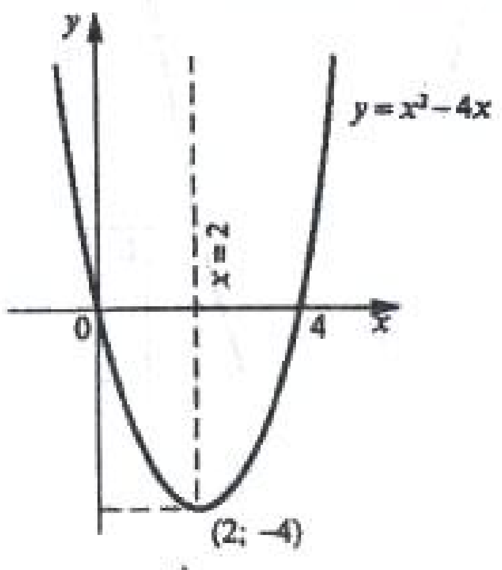
$x_1=0$; $x_2=4$; $(0; 0)$; $(4; 0)$.

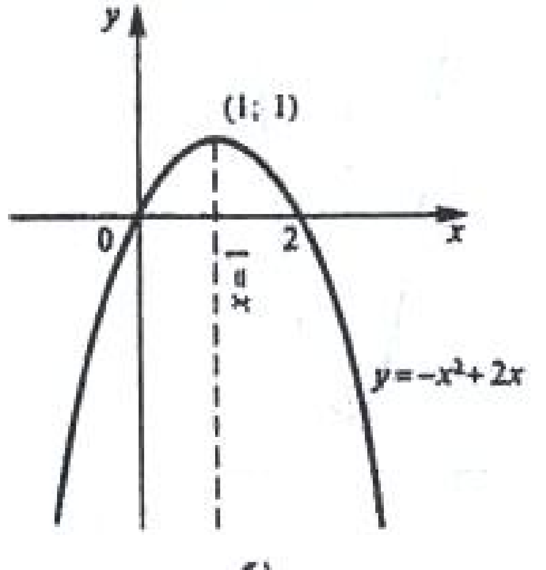
3) Координатаҳои қуллаи парабола $x_0=-\frac{b}{2a}=2$; $y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}=$ $=-\frac{16}{4}=-4$; $(2; -4)$ $x=2$ тири симметрияи график.

4) Дар фосилаи $(-\infty; 2)$ функсия камшаванда ва дар фосилаи $(2; \infty)$ функсия афзуншаванда мебошад. Графики функсия дар расми 16, *а* тасвир ёфтааст.

Мисоли 9. Графики функсияи $y=-x^2+2x$-ро месозем.

1) $a=-1<0$ шохаҳои парабола ба поён равонанд.





Расми 16

2) Нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои координата меёбем.
$x=0$; $y=0$; $(0;\ 0)$; $y=0$; $-x^2+2x=0$; $x^2-2x=0$;
$x(x-2)=0$; $x_1=0$; $x_2=2$; $(0;\ 0)$; $(2;\ 0)$.

3) Координатаҳои қуллаҳои парабола $x_0=-\dfrac{b}{2a}=1$; $y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=1$; $(1;1)$; хати $x=1$ тири симметрияи парабола аст.

4) Функсия дар фосилаи $(-\infty;\ 1)$ афзуншаванда ва дар $(1;\ \infty)$ камшаванда аст. Графики функсия дар расми 16, *б* тасвир ёфтааст.

Мисоли 10. Графики функсияи $y=0{,}5x^2+3x+6$-ро месозем.

1) $a=0{,}5>0$ шохаҳои парабола ба боло равонанд.

2) Нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои координатаҳо меёбем:
$x=0$; $y=6$; $(0;\ 6)$; $y=0$; $0{,}5x^2+3x+6=0$;
$D=b^2-4ac=9-4\cdot 0{,}5\cdot 6=9-12=-3<0$.
Муодила реша надорад, яъне тири Ox-ро намебурад.

3) Координатаҳои қуллаи парабола

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{1}=-3;\qquad y_0=\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{9-4\cdot 0{,}5\cdot 6}{4\cdot 0{,}5}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

Хати рости $x=-3$ тири симметрияи график мебошад.

4) Функсия дар фосилаҳои $(-3;\ \infty)$ афзуншаванда аст. График дар расми 17 тасвир шудааст.

Мисоли 11. Графики функсияи $y=-x^2+4x-5$-ро месозем.

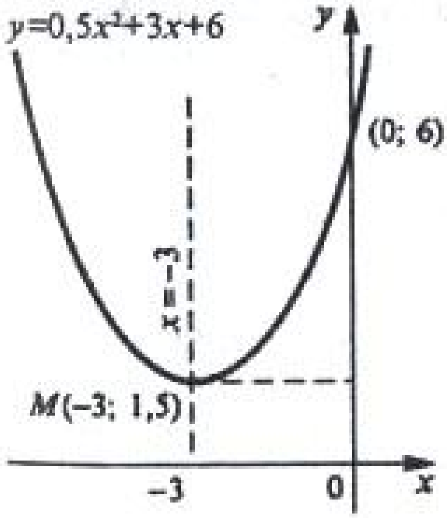
1) $a=-1<0$ шохаҳои парабола ба поён равонанд.

2) Нуқтаҳои буриши тирҳои координата бо график:
$x=0$; $y=-5$; $(0;\ -5)$; $y=0$; $-x^2+4x-5=0$; $x^2-4x+5=0$.
Муодила реша надорад, яъне график тири $0x$-ро намебурад.

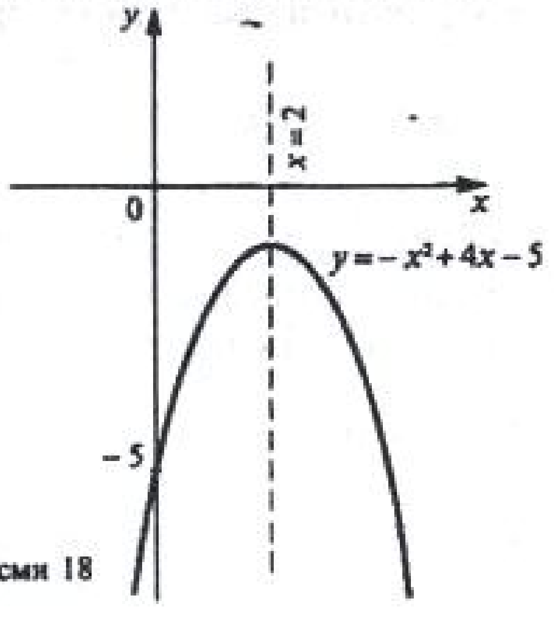
3) Координатаҳои қуллаи парабола $x_0=-\dfrac{b}{2a}=2$; $y_0=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=-1$;

Хати рости $x=2$ тири симметрияи парабола мебошад.

4) Функсия дар фосилаҳои $(2;\ \infty)$ камшаванда дар $(-\infty;\ 2)$ афзуншаванда аст. Графики функсия дар расми 18 тасвир ёфтааст.



Расми 17



Расми 18

?

1. Хосиятҳои функсияи квадратии $y=ax^2$-ро а) ҳангоми $a>0$ будан; б) ҳангоми $a<0$ будан номбар кунед. **2.** Аз графики функсияи $y=ax^2$ графики функсияи $y=ax^2+c$-ро чӣ тавр ҳосил кардан мумкин аст? **3.** Графики функсияи $y=a(x-b)^2+c$ аз кадом қиматҳои функсияи квадратӣ сохта мешавад? **4.** Зинаҳои схемаи умумии сохтани графики функсияи $y=ax^2+bx+c$-ро номбар намуда, онҳоро дар мисоли сохтани графикҳои функсияҳои квадратии мушаххас нишон диҳед.

Графики функсия сохта шавад (89–91).

89. а) $y=4x^2$; г) $y=-\frac{1}{4}x^2$; ж) $y=\frac{3}{4}x^2$; к) $y=-\frac{4}{5}x^2$;

б) $y=\frac{1}{4}x^2$; д) $y=\frac{2}{3}x^2$; з) $y=-\frac{3}{4}x^2$; л) $y=\frac{1}{3}x^2$;

в) $y=-4x^2$; е) $y=-\frac{2}{3}x^2$; и) $y=\frac{4}{5}x^2$; м) $y=-\frac{1}{3}x^2$.

90. а) $y=x^2+1$; г) $y=-2x^2+3$; ж) $y=-3x^2-1$; к) $y=\frac{1}{2}x^2+1$;

б) $y=-x^2+1$; д) $y=3x^2+1$; з) $y=-3x^2+1$; л) $y=-\frac{1}{2}x^2+1$;

в) $y=2x^2+3$; е) $y=3x^2-1$; и) $y=\frac{1}{2}x^2-1$; м) $y=-\frac{1}{2}x^2-1$.

91. а) $y=(x+2)^2-3$; д) $y=2(x-1)^2+2$; и) $y=3(x+5)^2-1$;

б) $y=(x-2)^2+3$; е) $y=-2(x-2)^2+3$; к) $y=3(x+2)^2+3$;

в) $y=(x-3)^2+2$; ж) $y=-3(x+1)^2-2$; л) $y=3(x+5)^2+\frac{2}{3}$;

г) $y=(x+3)^2-1$; з) $y=-3(x+1)^2+2$; м) $y=3(x+2)^2+\frac{3}{4}$;

92. Аз функсияи квадратӣ квадрати пурра ҷудо карда графикашро созед:

а) $y=3x^2-6x+7$; в) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{2}$; д) $y=2x^2+x$;

б) $y=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{24}{5}$; г) $y=3x^2-18x+7$; е) $y=-2x^2+x$.

93. Графики функсияи квадратиро созед:

а) $y=-x^2+5x+6$; г) $y=-x^2+5x-6$; ж) $y=0{,}5x^2-2x+2$;

б) $y=x^2+5x+6$; д) $y=\frac{1}{2}x^2+2x-3$; з) $y=-0{,}5x^2-4x-3$;

в) $y=x^2-5x-6$; е) $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-2$; и) $y=3x^2+4x-1$.

94. Муодиларо ҳал кунед:

а) $x-1=\dfrac{3}{x+1}$; б) $5x+6=\dfrac{7}{2x+9}$; в) $\dfrac{x(1-x)}{2,5x+6}=6$.

95. Ифодаро содда кунед:

а) $\left(8\dfrac{11}{12}-6\dfrac{5}{12}\right):\dfrac{5}{8}$; б) $\left(\dfrac{5}{12}+\dfrac{3}{8}\right)\cdot\dfrac{12}{19}$; в) $\dfrac{5}{22}:\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{22}+\dfrac{3}{11}$.

96. а) Ба мағоза се халта орд оварданд, агар маълум бошад, ки ҳар як халта 50 кг орд дорад, ба магазин чанд кг орд оварданд?

б) Устохона дар як ҳафта $\dfrac{2}{3}$ ҳиссаи захираи матоъро сарф кард. Аз $\dfrac{3}{8}$ ҳиссаи матоъи сарфшуда куртаи занона дӯхтанд. Агар ба куртаҳои занона 240 м сарф шуда бошад, дар устохона чӣ қадар матоъ будааст?

97. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $2x-6>4$; б) $\dfrac{x-2}{3x+12}>0$; в) $\dfrac{x-1}{2x+4}<0$.

98. Экстремум ва экстремали функсияро ёбед:

а) $y=3(x-3)^2+2$; б) $y=-3(x+2)^2-3$ в) $y=4(x-5)^2+5$.

§4. ҲАЛЛИ НОБАРОБАРИҲОИ КВАДРАТӢ

10. Тарзи графикии ҳалли нобаробариҳои квадратӣ

Ба омӯзиш ва ҳалли нобаробариҳои квадратӣ, ки онҳоро нобаробариҳои дараҷаи дуюми яктағйирёбанда ҳам мегӯянд ва намуди

$$ax^2+bx+c>0 \text{ (мувофиқан } ax^2+bx+c\geq 0) \qquad (1)$$

ё

$$ax^2+bx+c<0 \text{ (мувофиқан } ax^2+bx+c\leq 0)$$

-ро доранд, шурӯъ мекунем. Хотиррасон мекунем, ки мо ҳанӯз дар синфи 8 мафҳуми нобаробариҳоро ҷорӣ карда, хосиятҳои умумии он ва тарзҳои ҳал кардани нобаробариҳои хаттӣ, касран хаттӣ, инчунин системаҳои чунин нобаробариҳоро муоина намуда будем.

Дар ин параграф асосан бо тарзҳои ҳалли нобаробариҳои дараҷаи дуюм шинос мешавем. Шиносоиро аз тарзи графикӣ сар мекунем.

Хосиятҳои нобаробариҳо имконият медиҳанд, ки омӯзишро бо нобаробарии намуди

$$ax^2+bx+c>0$$

маҳдуд намоем, чунки нобаробарии $ax^2+bx+c<0$ дар натиҷаи ба -1 зарб задани ҳарду қисми он ба нобаробарии намуди (1) мубаддал мегардад (тағйиротҳое, ки ҳангоми ҷой доштани нобаробариҳои ғайриқатъӣ), яъне нобаробариҳои аломати ≥ ё ≤ дошта, дар ҳалли ёфташудаи (1) гузаронидан зарур аст, аз мисолҳои дар поён овардашуда ба осонӣ дарк карда мешаванд).

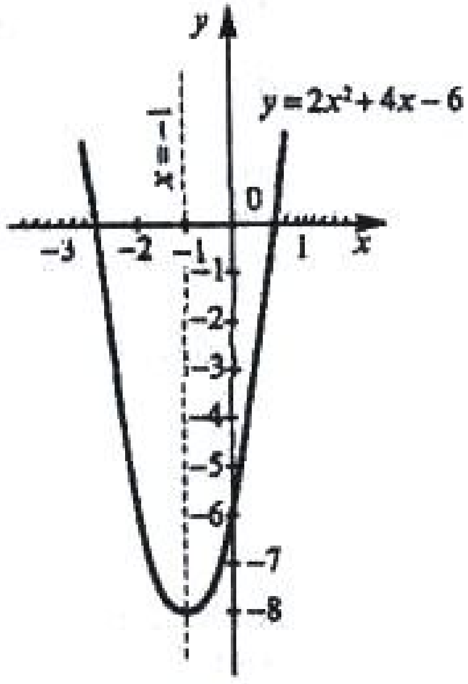
Моҳияти тарзи графикии ҳалли нобаробарии (1) зерин аст:

Чӣ тавре медонем ҳал кардани нобаробарӣ ин ёфтани ҳамаи он қиматҳои тағйирёбандаи новобаста, ки бароящон нобаробарӣ дуруст аст, иборат мебошад. Пас, агар графики функсияи $y=ax^2+bx+c$-ро дар системаи координатавӣ тасвир кунем, он гоҳ ҳамаи абсиссаҳои он нуқтаҳои график, ки ординаташон мусбат аст, ҳалли нобаробарии (1) мебошанд, яъне чизи наве, ки мо ин ҷо бо ӯ дучор омадаем ин ёфтани он қиматҳои тири ададиест, ки дар онҳо график дар чорякҳои I ё II воқеъ аст.

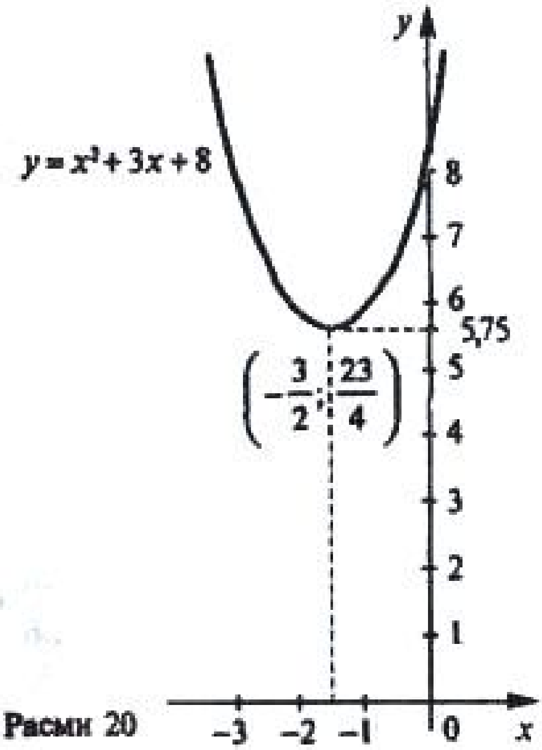
Мисоли 1. Нобаробарии $2x^2+4x-6>0$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Сеаъзогии квадратии $2x^2+4x-6$ ду решаи ҳақиқии $x_1=-3$; $x_2=1$-ро дорад. Бинобар ин параболаи $y=2x^2+4x-6$ тири Ox-ро дар ду нуқта мебурад, ки абсиссаи онҳо мувофиқан ба -3 ва 1 баробаранд. Азбаски коэффисенти назди x^2 аз нул калон мебошад, пас шохаҳои парабола ба боло равонаанд. Қуллаи он дар нуқтаи координатаҳояшон ба $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-1$; $y_0=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=-8$ баробар, яъне дар нуқтаи $(-1; -8)$ ҷойгир аст, ҳангоми $x=0$ будан $y=-6$ аст, яъне графики функсияи $y=2x^2+4x-6$ тири ординатаро дар нуқтаи $(0; -6)$ мебурад (расми 19). Аз расм дида мешавад, ки қимати сеаъзогӣ ҳангоми $x<-3$ ва $x>1$ будан мусбат мебошад.

Ҷавоб: $(-\infty; -3)\cup(1; \infty)$.



Расми 19



Расми 20

М и с о л и 2. Нобаробарии $x^2+3x+8\geq0$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Графики функсияи $y=x^2+3x+8$ параболае мебошад, ки шохаҳояш ба боло равонаанд, чунки $a=1>0$ аст. Азбаски $D=9-32=-23<0$ мебошад, бинобар ин муодилаи $x^2+3x+8=0$ реша надорад. Парабола тири Ox-ро намебурад. Ҳангоми $x=0$ будан $y=8$ мешавад. График тири Oy-ро дар нуқтаи (0; 8) мебурад. Қуллаи он дар нуқтаи координатаҳояш $x_0=-\frac{3}{2}$; $y_0=\frac{23}{4}$ ҷойгир аст (расми 20) Аз расм маълум аст, ки барои қимати ихтиёрии x нобаробарии $x^2+3x+8\geq0$ ҷой дорад.

Ҷавоб: $(-\infty; \infty)$.

М и с о л и 3. Нобаробарии $5x^2+9x-2<0$-ро ҳал мекунем.

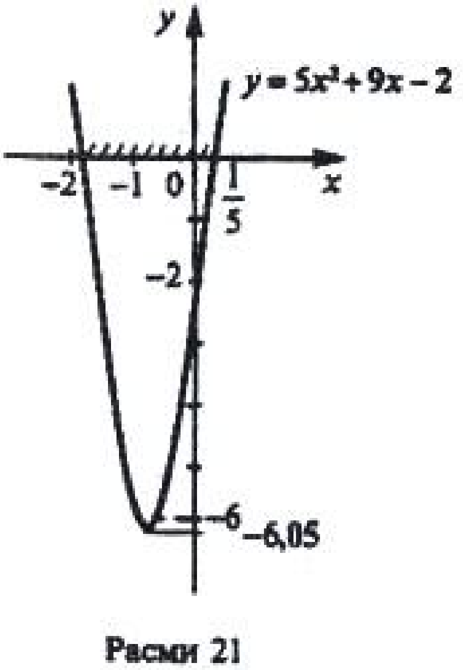
Ҳ а л. Графики ин функсия параболаест, ки шохаҳояш ба боло равона. Нуқтаи буриши графикро бо тирҳои координата муайян мекунем.

$x=0$, $y=-2$, $(0; -2)$; $y=0$, $5x^2+9x-2=0$, x_1-2; $x_2=\frac{1}{5}$.

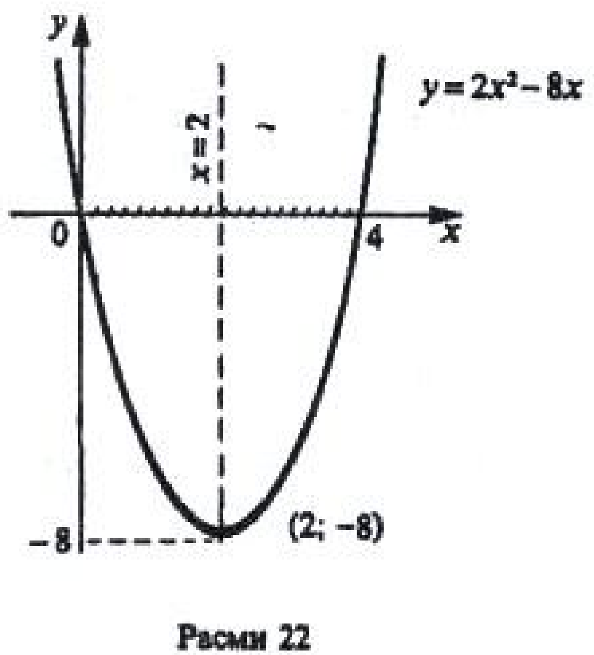
Ҳамин тариқ, параболаи $y=5x^2+9x-2$ тири Ox-ро дар нуқтаҳои абсиссаашон -2 ва $\frac{1}{5}$, тири Oy-ро дар нуқтаи ординатааш -2 мебурад. Қуллаи парабола дар нуқтаи координатҳояш $x_0=-\frac{9}{10}$; $y_0=-\frac{121}{20}$ воқеъ аст. Бо назардошти ин далелҳо графики функсияро месозем (расми 21).

Аз график дида мешавад, ки барои $x\in\left(-2;\frac{1}{5}\right)$ $5x^2+9x-2<0$ аст.

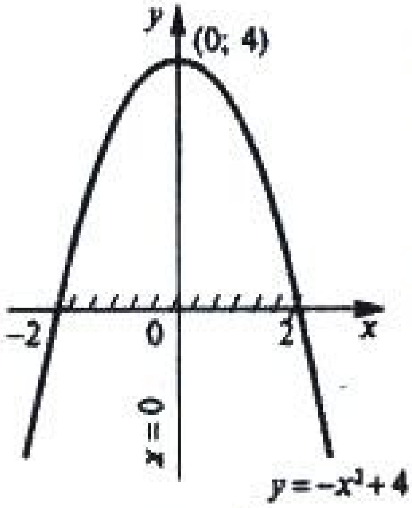
М и с о л и 4. Нобаробарии $2x^2-8x\leq0$-ро ҳал мекунем.



Расми 21



Расми 22



Расми 23

Ҳ а л. $a=2>0$, шохаҳои парабола ба боло равонанд. Агар дар параболаи $y=2x^2-8x$ ба ҷои x нул гузорем, қимати y ба 0 баробар мешавад, яъне график аз болои нуқтаи (0; 0) мегузарад. Агар $y=0$ бошад, он гоҳ $2x^2-8x=0$; $x(2x-8)=0$, $x_1=0$, $x_2=4$ мешавад, яъне график тири Ox-ро дар нуқтаҳои абсиссашон 0 ва 4 буда мебурад. Қуллаи парабола дар нуқтаи $x_0=2$; $y_0=-8$ воқеъ аст (расми 22.) Ҳамин тариқ, барои $x\in[0;4]$ нобаробарӣ $2x^2-8x\leq 0$ дуруст аст.

Ҷ а в о б: [0; 4].

М и с о л и 5. Нобаробарии $-x^2+4\geq 0$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. $a=-1<0$, шохаҳои парабола ба поён равонанд. Аз муодилаи параболаи $y=-x^2+4$ дида мешавад, ки қуллаи он дар нуқтаи (0; 4) ҷойгир аст.

$$y=0,\ -x^2+4=0,\ x^2-4=0,\ (x-2)(x+2)=0;\ \ x_1=-2;\ x_2=2;$$

график тири Ox-ро дар нуқтаҳои (–2; 0) ва (2; 0) мебурад (расми 23). Ҳамаи қиматҳои $x\in[-2;2]$ нобаробарии $-x^2+4\geq 0$-ро қаноат мекунонад.

Ҷавоб: [–2; 2].

М и с о л и 6. Нобаробарии $-2x^2+6x-10\leq 0$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Азбаски $a=-2<0$ аст, пас шохаҳои парабола ба поён равонанд. Нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои координатаҳо муайян мекунем: агар $x=0$ бошад, он гоҳ $y=-10$, яъне нуқтаи (0; –10) ба график тааллуқ дорад. Агар $y=0$ бошад, пас $-2x^2+6x-10=0$. Барои ин муодила $D=6^2-4(-10)\cdot(-2)=36-80=-44<0$ аст. Барои ҳамин муодила решаи ҳақиқӣ надорад. Графики $y=-2x^2+6x-10$-ро сохта (расми 24,*а*) муқаррар мекунем, ки нобаробарии мазкур барои ҳамаи қиматҳои тағйирёбанда дуруст аст.

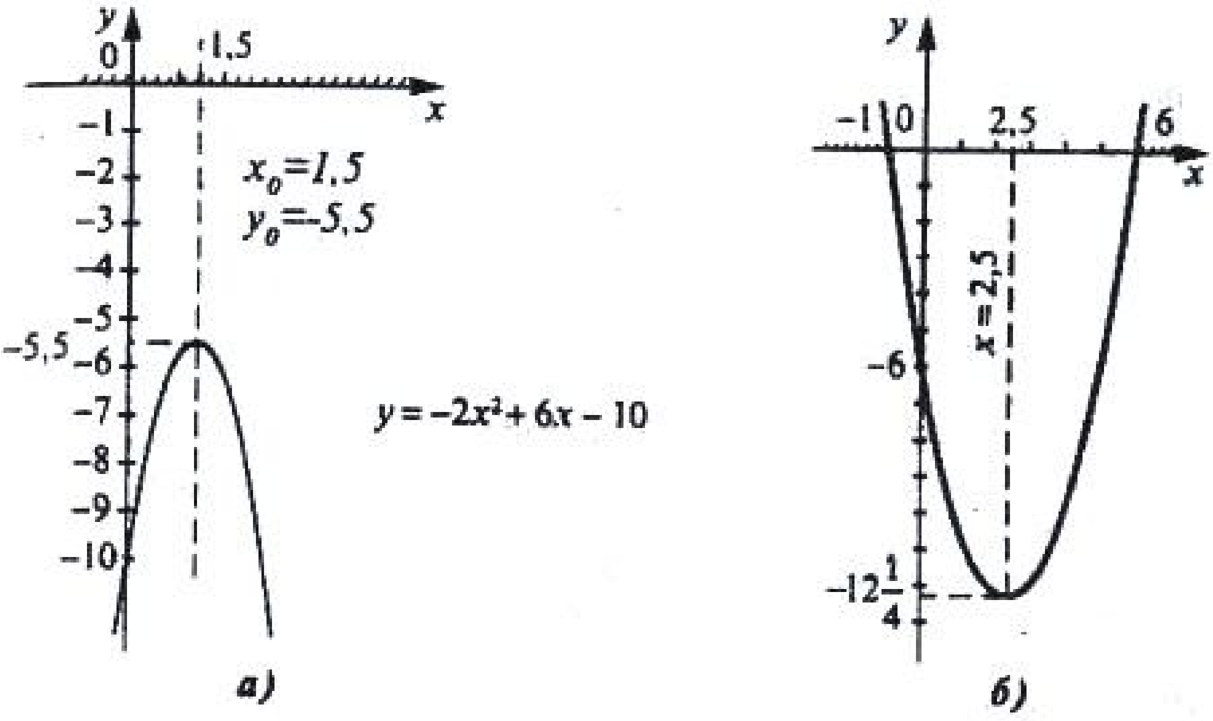
Ҷ а в о б: $(-\infty;\infty)$

М и с о л и 7. Соҳаи муайянии функсияи $y=\sqrt{x^2-5x-6}$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Азбаски аргумент x дар таҳти решаи квадратӣ дода шудааст, бинобар ин функсияи y дар ҳолати $x^2-5x-6\geq 0$ будан маъно дорад. Ин нобаробариро бо тарзи графикӣ ҳал мекунем: $a=1>0$ шохаҳои парабола ба боло равонанд. Қуллаи параболаро меёбем.

$$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2};$$

$$y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{25+24}{4}=-\frac{49}{4}=-12\frac{1}{4};\quad \left(2\frac{1}{2};-12\frac{1}{4}\right).$$



Расми 24

Муодилаи $x^2-5x-6=0$-ро ҳал намуда нуқтаи буриши графикро бо тири $0x$ меёбем $x_1=6$; $x_2=-1$. Ҳангоми $x=0$ будан $y=-6$ мешавад. График тири $0x$-ро дар нуқтаҳои $(-1; 0)$ $(6; 0)$ ва тири $0y$-ро дар нуқтаи $(0; -6)$ мебурад. Хати рости $x=2,5$ тири симметрии график мешавад (расми 24, б). Ҳамин тавр $x\in(-\infty;-1]$ ва $x\in[6;\infty)$ нобаробарии $x^2-5x-6\geq0$ қаноат мекунонанд.

Ҷ а в о б: $(-\infty;-1]\cup[6;\infty)$.

М и с о л и 8. Муайян мекунем, ки дар кадом қиматҳои m нобаробарии $x^2+x+m>0$ дуруст аст.

Ҳ а л. Нобаробарии додашуда барои ҳамон қиматҳои m ҷой дорад, агар барояшон дискриминанти муодилаи $x^2+x+m=0$ манфӣ бошад, яъне муодила ҳал надошта бошад. Бинобар ин кифоя аст, ки $D=b^2-4ac=1-4\cdot1\cdot m<0$; $1-4m<0$; $-4m<-1$; $4m>1$; $m>\frac{1}{4}$ гирем.

Ҷ а в о б: $\left(\frac{1}{4}; \infty\right)$.

?

1. Чӣ гуна нобаробариро нобаробарии квадратӣ меноманд? **2.** Чӣ гуна намуди нобаробариҳоро медонед? **3.** Нобаробарии номаълумдорро ҳал кардан чӣ маънӣ дорад? **4.** Моҳияти тарзи графикии ҳалли нобаробариҳои квадратиро баён карда, онро дар ҳалли нобаробариҳои мушаххас нишон диҳед.

Нобаробариро ҳал кунед (99–105).

99. а) $x^2-5x+4>0$; б) $x^2+4x<0$; в) $2x^2-7x-15\geq0$.

100. а) $12x^2-17x-105<0$; б) $x^2-4x>0$; в) $x^2+6x+9\leq0$.

101. а) $12x^2-4x+3<0$; б) $3x^2+2x+1>0$; в) $x^2+13x+36\leq0$.

102. а) $x^4+4x^2+4\leq0$; б) $-2+2x-3x^2<0$; в) $-5+4x-3x^2<0$.

103. а) $x^2-3x>10$; б) $4x^2+9>12x$; в) $4x-x^2<5$.

104. а) $(x-5)x+4x>2$; б) $(x+5)x\leq2(x^2+2)$; в) $(x+4)(x+5)-5\geq5$.

105. а) $\frac{1}{3}x^2-3x+6<0$; б) $2(x+2)^2-3{,}5\geq2x$; в) $\frac{x^2}{2}\geq-5x+5{,}5$.

106. а) Як тарафи росткунҷа аз тарафи дигараш 7 см калон аст. Масоҳати росткунҷа аз 60 см^2 хурд аст. Дарозии тарафи дигари росткунҷаро ёбед.
б) Бари росткунҷа аз дарозиаш 1 см хурд аст. Дарозии росткунҷа бояд чӣ қадар бошад, то ки масоҳати он аз 12 см^2 калон шавад?

107. Соҳаи муайяни функсияро ёбед:
а) $y=\sqrt{x^2-25}$; в) $y=\sqrt{2x^2-3x+1}$;
б) $y=\sqrt{-x^2-6x+7}$; г) $y=\sqrt{64x^3-x}$;

108. Барои кадом қиматҳои m нобаробарӣ барои қиматҳои дилхоҳи x дуруст аст:
а) $x^2+2x+m>0$; в) $mx^2+12x-5<0$;
б) $x^2+2x+m\geq10$; г) $x^2+(m+2)x+8m+1>0$?

Машқҳо барои такрор

109. Коэффисиентҳои сеаъзогии ax^2+bx+c-ро муайян кунед, агар маълум бошад, ки ҳангоми $x=4$ будани сеаъзогӣ ба нул мубаддал шуда ҳангоми $x=-4$ будан вай ба қимати хурдтарини -8 доро аст.

110. Муодиларо ҳал кунед:
а) $8x-3=5x+6$; б) $2x(3x-2)-3\left[1-(2-x)(2x+3)-\frac{x-3}{2}\right]=13$.

111. Нобаробариро ҳал кунед.
а) $x(5-x)>3$; б) $6(2x+7)<15(x+2)$.

112. Як мошинанавис дастнависро дар $3\frac{1}{3}$ рӯз, вале дуюмаш дар $2\frac{1}{3}$ рӯз чоп карда метавонад. Ҳар ду мошинанавис дар як вақт кор карда, ин дастнависро дар чанд рӯз чоп мекунанд?

113. Суммаи ду адад 12, вале фарқи онҳо ба 2 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

114. Далер ва Некрӯз 16 дона чормағз доштанд. Агар Некрӯз ба Далер 6 дона чормағз диҳад, дар ӯ назар ба Далер 3 маротиба камтар чормағз мемонад. Далер ва Некрӯз чандонагӣ чормағз доштанд?

11. Бо методи фосилаҳо ҳал кардани нобаробариҳо

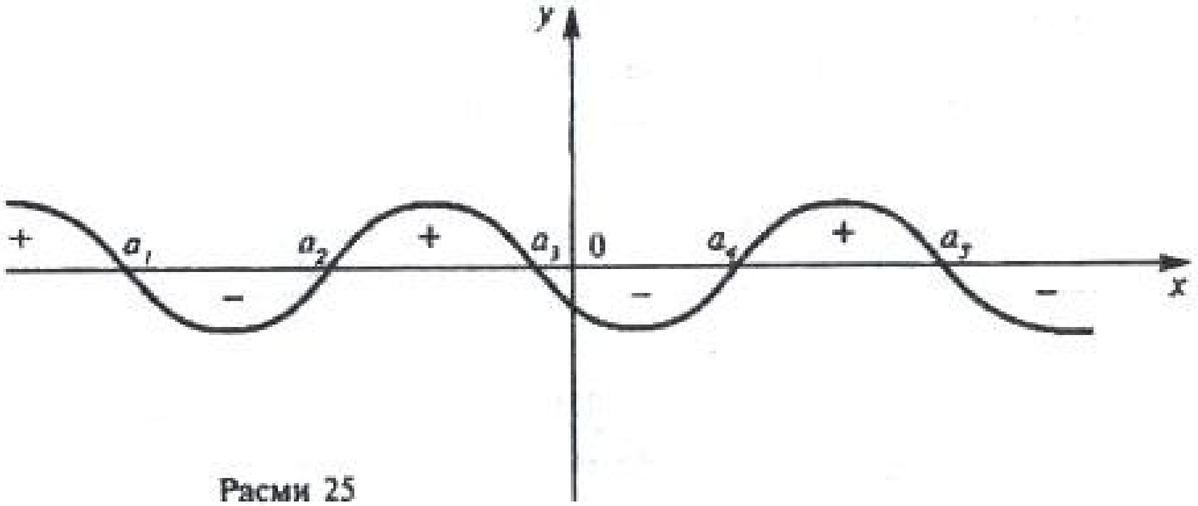
Акнун тарзи хал кардани нобаробарии $ax^2+bx+c>0$, ки он **методи фосилаҳо** ном дорад, меорем. Дар аввал моҳияти методҳоро баён мекунем. Фарз мекунем, тамоми тири ададӣ, яъне фосилаи $(-\infty; \infty)$ ба фосилаҳои $(-\infty; a_0)$; $(a_0; a_1)$; $(a_1; a_2)$; $(a_2; a_3)$; ...; $(a_n; a_{n+1})$ $(a_{n+1}; \infty)$ чунон ҷудо карда шудааст, ки дар якеи онҳо аломати функсияи $y=f(x)$ доимӣ аст: (Яъне, масалан барои ҳамаи нуқтаҳои фосилаи $(a_1; a_2)$ минус аст) Дар айни ҳол ин аломат навбат ба навбат (паи ҳам) иваз мешавад (расми 25). Ин маънои онро дорад, ки нуқтаҳои $a_0; a_1; a_2; ...; a_n; a_{n+1}$ нулҳои функсияи $y=f(x)$ (решаҳои муодилаи $f(x)=0$) мебошанд.

Чунин фосилаҳо фосилаҳои *доималоматии* функсия ном доранд. Бигузор фосилаҳои доималоматии функсия маълуманд. *Ҳосили ҷамъи ҳамаи онҳо (бо маънои ҷамъи маҷмӯҳо), ки дар онҳо аломати функсия плюс аст, ҳалли нобаробарии $f(x)>0$ буда, ҳосили ҷамъи ҳамаи онҳо, ки дар онҳо аломати функсия минус аст, ҳалли нобаробарии $f(x)<0$ мебошад.* Масалан, маҷмӯи $(-\infty;a_1)\cup(a_2;a_3)\cup(a_4;a_5)$ ҳалли нобаробарии $f(x)>0$ буда, маҷмӯи $(a_1;a_2)\cup(a_3;a_4)\cup(a_5;\infty)$ ҳалли нобаробарии $f(x)<0$ мебошад (ниг. ба расми 25).

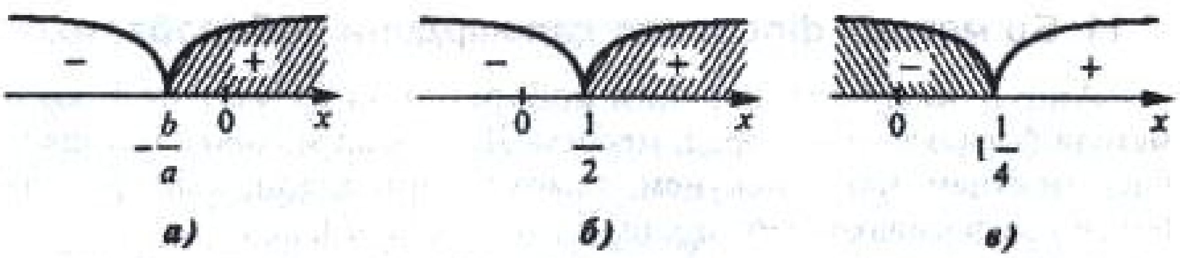
Ҳамин тариқ,.васоити асосии истифодаи ин метод донистани фосилаҳои доималоматии функсия мебошад. Мо дар аввал тарзи истифодаи ин методро барои ёфтани ҳалли нобаробариҳои мушаххаси хаттӣ, касран хаттӣ ва баъд барои нобаробариҳои дараҷаи дуюм меорем.

А) *Нобаробарии хаттӣ (дараҷаи якум)* $ax+b>0$ $(a>0)$.

Адади $-\dfrac{a}{b}$ решаи ягонаи муодилаи $ax+b=0$ аст. Пас тири ададӣ ба фосилаи $\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)$ ва $\left(-\dfrac{b}{a};\infty\right)$ ҷудо мешаванд, ки дар онҳо функсияи хаттӣ $f(x)=ax+b$ доималомат аст (дар фосилаи якум



Расми 25



Расми 26

аломат манфӣ буда, дуюм–мусбат аст (расми 26). Ҳамин тариқ фосилаи $\left(-\frac{b}{a};\infty\right)$ ҳалли нобаробарии мазкур аст.

Мисоли 1. Нобаробарии $3(x-1)>x-2$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Нобаробарии додашуда $3x-3-x+2>0$ ё ба $2x-1>0$ баробарқувва аст. Решаи $2x-1=0$ адади $\frac{1}{2}$ мебошад (расми 26,б).

Ҷавоб: $\left(\frac{1}{2};\infty\right)$.

Мисоли 2. Нобаробарии хаттии $-3(x-1)>x-2$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Табдилотҳои соддаро ичро карда ҳосил мекунем:
$-3(x-1)-(x-2)=-3x-x+3+2=-4x+5>0$ ё $4x-5<0$.

Решаи муодилаи $4x-5=0$ ба $x=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$ баробар аст. Пас дар $\left(-\infty;1\frac{1}{4}\right)$ $f(x)=4x-5$ манфӣ буда, дар $\left(1\frac{1}{4};\ \infty\right)$ мусбат аст (расми 26,в).

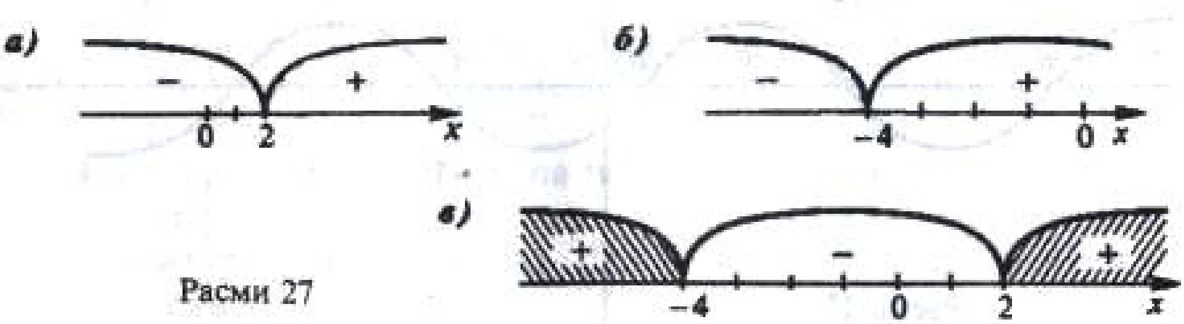
Ҷавоб: $\left(-\infty;1\frac{1}{4}\right)$.

Б) *Нобаробарии касран хаттӣ:* $\frac{ax+b}{cx+d}>0$-ро ҳал мекунем.

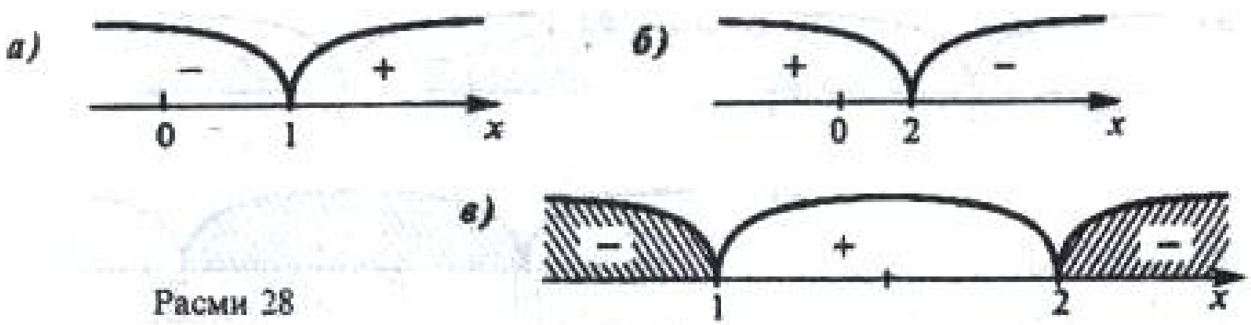
Тарзи истифодаи методро дар ҳалли дутои чунин нобаробарӣ нишон медиҳем.

Мисоли 3. Нобаробарии касран хаттии $\frac{x-2}{3x+12}>0$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Адади 2 решаи сурат, адади –4 решаи махраҷ аст. Пас сурат дар $(-\infty;\ 2)$ манфӣ ва дар $(2;\ \infty)$ мусбат буда (расми 27,а) махраҷ дар $(-\infty;\ -4)$ манфӣ ва дар $(-4;\ \infty)$ мусбат аст (расми 27,б).



Расми 27



Расми 28

Ин маълумотҳо ва каср будани $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+12}$ -ро ба инобат гирифта бароям чунин фосилаҳои доималоматиро ҳосил мекунем (расми 27,*в*). (Дар (−4; −2) аломати $\dfrac{x-2}{3x+12}$ манфӣ шуд, чунки дар он сурат манфӣ буда махраҷ мусбат аст). Аз расм намоён аст, ки маҷмӯи $(-\infty;-4)$ ва $(2;\infty)$ ҳалли нобаробарӣ мебошад.

Ҷ а в о б: $(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$.

М и с о л и 4. Нобаробарии $\dfrac{x-1}{-2x+4}<0$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Фосилаҳои доималоматии сурат $x-1$ (расми 28, *а*) махраҷ $-2x+4$ (расми 28, *б*) ва касри $f(x)=\dfrac{x-1}{-2x+4}$ -ро (расми 28, *в*) дар тири ададӣ тасвир мекунем:

Ҷ а в о б: $(-\infty;1)\cup(2;\infty)$.

В) *Нобаробарии квадратӣ* $ax^2+bx+c>0$.

Бигзор x_1 ва x_2 решаҳои муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$ бошанд. Он гоҳ чӣ тавре дидем

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

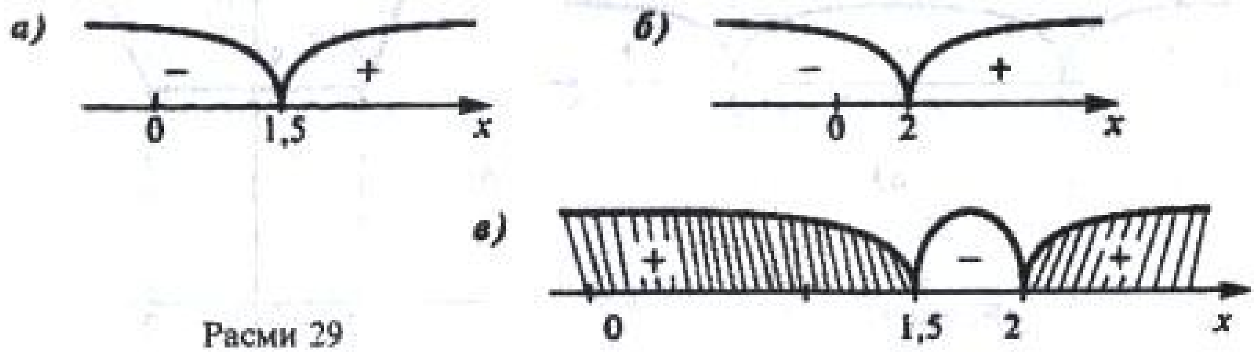
Фосилаҳои доималоматии зарбшавандаҳои хаттӣ $x-x_1$ ва $x-x_2$-ро мувофиқи зерпункти А), баъд функсияи $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$-ро ҳамчун ҳосили зарб муайян карда нобаробариро бо осонӣ меёбем.

М и с о л и 5. Нобаробарии $2x^2-7x+6>0$-ро ҳал мекунем.

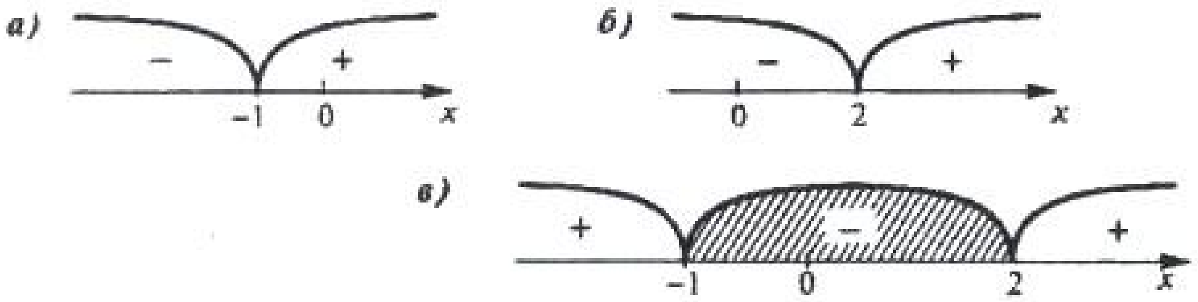
Ҳ а л. Муодилаи квадратии $2x^2-7x+6=0$-ро ҳал карда мебинем, ки $x_1=1{,}5$ ва $x_2=2$ решаҳояш мебошанд. Пас $2x^2-7x+6=2(x-1{,}5)(x-2)$.

Аломати $x-1{,}5$ дар расми 29, *а*, аломати $x-2$-ро аз расми 29,*б*, аломати $2(x-1{,}5)(x-2)$-ро аз расми 29, в муайян мекунем.

Ҷ а в о б: $(-\infty;1{,}5)\cup(2;\infty)$.



Расми 29



Расми 30

М и с о л и 6. Нобаробарии $x^2-x-2\leq 0$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Решаҳои сеаъзогии квадратиро меёбем:

$$x^2-x-2=0; \qquad x_1=-1; \qquad x_2=2.$$

Ҳамин тариқ,

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2).$$

$x+1$ дар фосилаи $(-\infty; -1)$ манфӣ ва дар $(-1; +\infty)$ мусбат (30; *а*); $x-2$ бошад дар фосилаҳои $(-\infty; 2)$ манфӣ, дар $(2; \infty)$ мусбат; $(x+1)(x+2)$ дар фосилахои $(-\infty; -1)$ мусбат (расми 30)

Ҷавобро бо назардошти он ки нобаробарии мазкур ғайриқатъӣ аст, менависем:

Ҷ а в о б: $[-1; 2]$.

М и с о л и 7. Графики $y=|x^2-4|+x^2$-ро месозем.

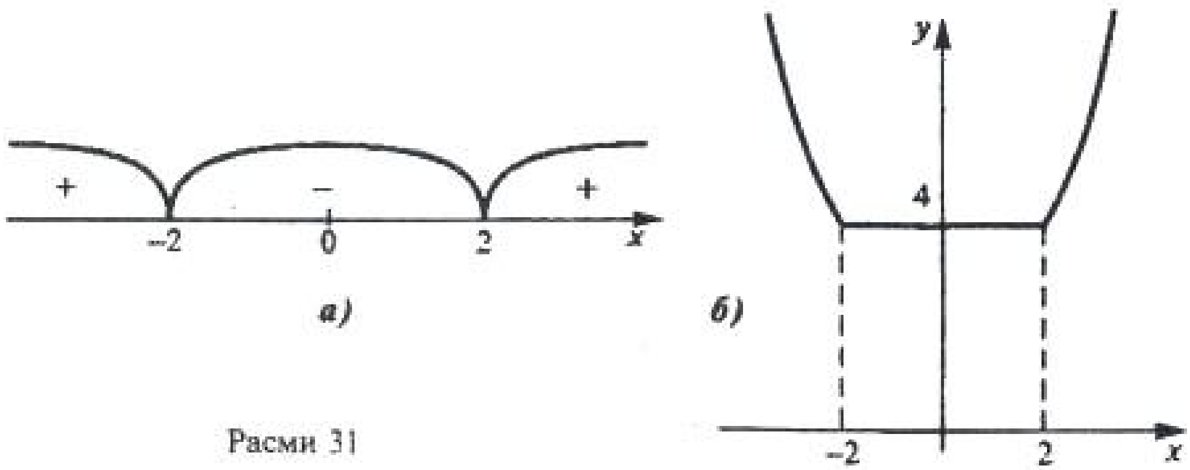
Барои кушодани қимати мутлақ нобаробарии $x^2-4\geq 0$ бо методи фосилаҳо ҳал мекунем (расми 31,а):

$$x^2-4=(x-2)(x+2).$$

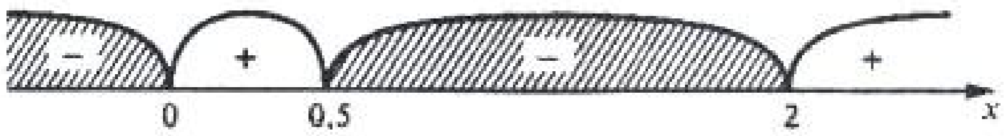
Аз расм айён аст, ки барои $x\in(-\infty; -2]\cup[2; \infty)$ $x^2-4\geq 0$ буда, барои $x\in(-2; 2)$ $x^2-4<0$ аст. Ҳамин тариқ,

$$y=\begin{cases}2x^2-4 & \text{агар } x\notin(-2; 2)\\ 4, & \text{агар } x\in[-2; 2].\end{cases}$$

Графики ин функсия дар расми 31,б оварда шудааст.



Расми 31



Расми 32

Ин метод на танҳо барои ҳал кардани нобаробариҳои квадратӣ, балки барои ҳал кардани нобаробариҳои мураккаб ҳам истифода мешавад.

М и с о л и 8. Нобаробарии $2x^3-5x^2+2x\leq0$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Бисёраъзогии $2x^3-5x^2+2x$-ро ба зарбшавандаҳо ҷудо мекунем:

$$2x^3-5x^2+2x=2x(x^2-2,5x+1)=2x(x-0,5)(x-2).$$

Бинобар ин нобаробариро ин тавр навиштан мумкин аст:

$$2x(x-0,5)(x-2)\leq0.$$

Дар тири ададӣ нуқтаҳои 0; 0,5; 2-ро қайд мекунем. Ин нуқтаҳо тири ададиро ба чор фосила ҷудо мекунад (расми 32).

Ҳангоми $x>2$ будан ҳар як зарбшавандаи ҳосилӣ зарби $2x(x-0,5)(x-2)$ мусбат мебошад. Аз ин сабаб барои $x>2$ $2x(x-0,5)(x-2)>0$ аст. Агар ивазшавии аломати ҳосили зарбро ҳангоми ба фосилаи ҳамсоя гузаштан ба эътибор гирем, он гоҳ аломати ҳосили зарбро барои ҳар як фосила муайян мекунем. (расми 32).

Ҳамин тариқ, бо назардошти ғайриқатъи будани нобаробарии додашуда, ҳамаи x−ҳои аз нимпорчаи $(-\infty;\ 0]$ ва порчаи $[0,5;\ 2]$ ҳалли нобаробарианд.

Ҷ а в о б: $(-\infty;0]\cup[0,5;2]$.

? **1.** Фосилаҳои доималоматии функсияро чӣ тавр меёбанд? **2.** Моҳияти методи фосилаҳоро барои ёфтани ҳалли нобаробариҳои хаттӣ, касран хаттӣ ва квадратӣ баён намуда, онро дар ҳалли мисолҳои мушаххас нишон диҳед. **3.** Мисолҳои нобаробариҳои нисбатан мураккабро оред, ки онҳоро бо методи фосилаҳо ҳал кардан мумкин бошад.

Методи фосилаҳоро истифода карда, нобаробариҳоро ҳал кунед (115–118).

115. а) $2(x-3)>x-1$; г) $-3(x-1)<2x+12$; ж) $7x-2,4<0,4$;

б) $-4(x+2)>x-2$; д) $\frac{1}{2}(x-4)\geq0,5x-2$; з) $17-x>10-6x$;

в) $3(x-1)<x+3$; е) $\frac{1}{5}(x+10)\leq\frac{4}{5}x+3$; и) $2x-17\geq-27$

116. а) $\frac{x-1}{2x+4}>0$; в) $\frac{x-1}{3x+9}\geq 0$; д) $\frac{13x-1}{2}<4x$;

б) $\frac{x-2}{-3x+6}<0$; г) $\frac{x-2}{3x-12}>0$; е) $\frac{x}{4}-\frac{x}{5}\leq 2$.

117. а) $(x+8)(x-5)>0$; ж) $-\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\geq 0$;

б) $(x-14)(x+10)<0$; з) $(6+x)(3x-1)\leq 0$;

в) $(x+25)(x-30)<0$; и) $(7x+21)(x-3,5)\leq 0$;

г) $(x+6)(x-6)>0$; к) $(8-x)(x-0,3)\geq 0$;

д) $(x-2)(x-5)(x-12)>0$; л) $x^2+4x\geq 0$;

е) $(x+7)(x+1)(x-4)<0$; м) $x^2-x<0$.

118. а) $(x-2)(x-3)>0$; б) $(x+1)(2x-1)\leq 0$; в) $x(x-1)^2>0$

119. Графики функсияро созед:

а) $y=|1-x^2|-1$; д) $y=x^2+|x|$;

б) $y=|x^2-9x|+6x+2$; е) $y=x^2-|x-1|+1$;

в) $y=x^2-|x-3|+2$; ж) $y=2x^2-2|x|$;

г) $y=|x^2-2|+1$; з) $y=|2x^2-x|$.

120. Бо методи фосилаҳо нобаробариро ҳал намоед:

а) $x^2\geq x$; д) $(x^2-5x+4)(x^2-1)>0$;

б) $\frac{4}{9}\leq x^2$; е) $4x^3-x<0$;

в) $x^3-16x<0$; ж) $(x-1)(x^2-3x+8)<0$.

г) $(x^2-1)(x+2)<0$

Машқҳо барои такрор

121. Касрҳоро ихтисор кунед:

а) $\frac{2x^2+x-6}{6x^2-11x+3}$; б) $\frac{8m^3+27}{6m^2+13m+6}$; в) $\frac{(1-3a)^2}{3a^2+5a-2}$.

122. Муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $(x-1)^2+(x+1)^2=(x+2)^2-2x+2$;

б) $(2x-3)(2x+3)-1=5x+(x-2)^2$.

123. Координатаҳои қуллаи параболаро ёбед:

а) $y=x^2-12x+53$; б) $y=x^2-\frac{3x}{2}+\frac{41}{16}$.

124. Китоб 160 саҳифа дорад. Далер рӯзи якум 52 саҳифа, рӯзи дуюм назар ба рӯзи якум 16 саҳифа зиёдтар хонд. Барои хондан боз чанд фоизи китоб монд?

125. Ду бригада якҷоя 1787 сентнер ҷавдор ғундоштанд. Бригадаи якум 46-га ва бригадаи дуюм 35-га ҷавдор ғундоштанд. Агар ҷавдори аз 8-га ғундоштаи бригадаи якум назар ба ҷавдори аз 5–га ғундоштаи бригадаи дуюм 58 сентнер зиёд бошад, ҳар як бригада алоҳида аз 1–га ба ҳисоби миёни чанд сентнерӣ ҷавдор ғундоштаанд?

МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

Истилоҳи «функсия»-ро дар илм риёзидони немис Г. Лейбнитс (1646–1716) ҷорӣ кардааст. Дар тадқиқоти ӯ функсия бо график алоқаманд аст.

Дар инкишофи минбаъдаи ин мафҳумҳо методи координатаҳо, ки риёзидони фаронсавӣ П.Ферма (1601–1655) ва Р.Декарт (1596–1650) ихтироъ карда буданд, роли калон бозид. Методи координатаҳо барои сохтани графики функсияҳо ва ҳалли графикии муодилаҳо васеъ истифода мешуданд.

Фаҳмиши функсия чун ифодаи аналитикӣ, яъне ифодаҳое, ки аз тағйирёбандаҳою ададҳо бо ёрии ин ё он амали аналитикӣ ташкил шудаанд, ба Л.Эйлер (1707–1783) ва И.Бернулли (1667–1748) алоқаманд аст. Дар ин давра гурӯҳҳои муҳимтарини функсияҳо тадқиқ шуданд, ки онҳо дар яке аз соҳаҳои риёзиёт –**анализи математикӣ** омӯхта мешавад.

Л.Эйлер мафҳуми функсияро чун вобастагии як бузургии тағйирёбанда аз бузургии тағйирёбандаи дигар инкишоф дод. Ин нуктаи назар дар асарҳои риёзидони рус Н.И.Лобачевский (1792–1856), риёзидони немис П.Дирихле (1804–1859) ва дигар олимон инкишоф дода шуд.

Лейбнитс ин истилоҳро барои номи параметрҳои гуногун, ки бо мавқеи нуқта дар ҳамворӣ алоқаманд аст, дохил карда буд. Дар рафти мукотаба Лейбнитс ва шогирдаш–математики швейтсариягӣ И.Б.Бернуллӣ тадриҷан функсияро чун ифодаи аналитикӣ дарк кардаанд ва онро соли 1718 Лейбнитс таъриф додааст.

Л.Эйлер дар китоби худ «Муқаддимаи анализ» (соли 1748) таърифи функсияро ин тавр баён кардааст: «Функсияи миқдори тағйирёбанда ифодаи аналитикиест, ки бо ягон тарз аз ин миқдори тағйирёбанда ва ададҳо ё миқдори доимӣ таркиб ёфтааст». Л.Эйлер инчунин ишораҳои ҳоло барои функсияҳо қабулшударо низ ҷорӣ кардааст.

Таърифи ҳозиразамони функсияро, ки дар он ин мафҳум аз тарзи додашавӣ озод аст, новобаста аз ҳамдигар риёзидони рус Н.И.Лобачевский (соли 1834) ва математики немис Л.Дирихле (соли 1837) баён кардаанд.

Ғояи асосии ин таърифҳо аз зер иборат аст; ба ҳар як қимати x қимати муайяни y мувофиқ гузошта хоҳад шуд.

Олими бузурги англис, риёзидон ва физик И.Нютон, аз вақт вобаста будани координатаҳои нуқтаи ҳаракатнокро тадқиқ карда, амалан ба тадқиқи функсия машғул шуда буд. Гарчанде ин мафҳумро Нютон ба таври мушаххас ҷорӣ карда бошад ҳам, вале аҳамияти онро равшан дарк мекард. Масалан, соли 1676 ӯ қайд карда буд: «Агар аз муоинаи фигураҳо дур намешудам ва ҳамаро» танҳо ба тадқиқи ординатаҳо намеовардам, натиҷаҳои умумиро ноил намешудам», яъне Ньютон амалан функсияҳои вақтро тадқиқ карда буд.

Мафҳуми ҳозиразамони функсияи дорои соҳаҳои муайянӣ ва соҳаи қиматҳои дилхоҳ асосан, дар нимаи аввали асри XX, ба туфайли асарҳои асосгузори назарияи маҷмӯъ Г.Кантор (1845–1918) ташаккул ёфт.

Риёзидонҳо масъалаҳои мушаххас ва мураккаби риёзиро ҳал карда истода, ба мафҳуми функсия омаданд.

Инкишофи минбаъдаи мафҳуми функсия ба омӯзиши маҷмӯъҳо, ки элементҳояшон на фақат аз ададҳо, балки аз объектҳои дилхоҳи табиат иборатанд, алоқаманд аст.

Машқҳои иловагӣ ба боби 1

Ба параграфи 1

Соҳаи муайянии функсия ёфта шавад (126–127).

126. а) $y=\dfrac{3}{x^2-1}$; в) $y=\sqrt{1-x}$; д) $y=\sqrt{3-x^2}$;

б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; г) $y=\sqrt{3-x}$; е) $y=\dfrac{x-1}{x^2+5x}+\sqrt[3]{2x+1}$.

127. а) $y=\sqrt{2x-4}$; г) $y=\sqrt{-3(1-5x)}$; з) $y=\sqrt{x^2}-\sqrt{3x-1}$;

б) $y=\sqrt{4-6x}$; д) $y=\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}$; и) $y=2\sqrt{16-x^2}$;

в) $y=\sqrt{\dfrac{1+3x}{2}}$; ж) $y=\sqrt{6-x}+\sqrt{3x+9}$; е) $y=\dfrac{3}{\sqrt{3x-4}}$;

128. Ягон функсияеро нависед, ки соҳаи муайяниаш:

а) $x=2$; б) $x\neq\pm1$; в) $[1;\infty)$ бошад.

129. Функсияҳое, ки дар расмҳои 55 ва 56 *(ниг. ба саҳ.64)* тасвир шудаанд, ба намуди формула нависед.

130. Нулҳои функсияро ёбед (агар онҳо мавҷуд бошанд):

а) $y=\dfrac{3x+12}{30}$; б) $y=\dfrac{6}{2-5x}$; в) $y=\dfrac{x^2-4}{5}$;

131. Нулҳои функсияи хаттиро ёбед:

а) $y=x+5$ в) $y=6(x-1)+2$; д) $y=0{,}01x+1$;

б) $y=1-x$; г) $y=\dfrac{2}{3}(x-1)+1$; е) $y=0{,}01x-20$.

132. Вобастагии x ва y намуди $ax+by=1$-ро дорад. Қиматҳои параметрҳои a ва b ёфта шавад, агар маълум бошад, ки нуқтаҳои $(2;-1)$ ва $(-4;3)$ дар графики ин вобастагӣ мехобанд.

133. Вобастагии x ва y намуди $(x-a)(y-b)=1$-ро дорад. Қимати a ва b ёфта шавад, агар маълум бошад, ки ибтидои координата ва нуқтаи $\left(3;\dfrac{3}{2}\right)$ дар графики ин вобастагӣ мехобанд.

134. Барои кадом қиматҳои аргумент функсияи $y=x^2+x-2$
а) ба нул; б) калон аз нул; в) хурд аз нул мешавад.

135. Ҷуфт ё тоқии функсияҳои зерин муайян карда шаванд:

а) $y=\dfrac{x^3+x}{x^3-x}$; в) $y=\dfrac{x^2+x}{x+1}$; д) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; ж) $y=(x-3)^2+(x+3)^2$

б) $y=x+\dfrac{1}{x}$; г) $y=-\dfrac{1}{x^2}$; е) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

136. Функсияи $y=kx+b$ дар кадом ҳолат афзуншаванда ва дар кадом ҳолат камшаванда мебошад?

137. Кадоме аз функсияҳои хаттии а) $y=x-3$; б) $y=-x+4$; в) $y=-5x+3$; г) $y=x-1$; д) $y=2-4x$ афзуншаванда ва кадоме камшаванда мебошад?

138. Функсия бо формулаи $y=mx+n$ дода шудааст. Барои кадом қиматҳои m функсия афзуншаванда мешавад?

139. Функсияи $y=\dfrac{1}{x^2}$ барои кадом қиматҳои x афзуншаванда аст?

Ба параграфи 2

140. Квадрати пурра ҷудо кунед:
а) $x^2-8x-65$; г) $x^2-2x+35$; ж) $ax^2+8ax-2$;
б) x^2-6x+8; д) $x^2+11x+30$; з) $ax^2-4a^2x+4a^3+3$.
в) $x^2+8x+15$; е) $(x-2)(x-4)$; и) $(x+a)(x+b)$.

141. Аз сеаъзогӣ квадрати пурра ҷудо кунед:
а) $5x^2-15x+10$; в) $-3x^2-3x-18$; д) $10x^2-3x-1$;
б) $\dfrac{1}{5}x^2-3x+10$; г) $-\dfrac{1}{2}x^2+3x+\dfrac{7}{2}$; е) $x^2-\dfrac{5}{2}x+1$.

142. Исбот кунед, ки сеаъзогии квадратии x^2+x+1 барои қиматҳои дилхоҳи x мусбат аст.

143. Дар тарафҳои кунҷи рост ба самти қуллаи он ду сақочаи A ва B мунтазам ҳаракат мекунанд. Суръати сақочаи A назар ба суръати сақочаи B ду маротиба зиёд аст. Пас аз 10 сония масофаи байни сақочаҳои A ва B ба 130 м баробар мешавад. Агар дар ибтидои ҳаракат сақочаи A аз қуллаи кунҷ дар масофаи 270 м ва сақочаи B дар масофаи 125 м воқеъ бошанд, суръати ҳар як сақочаро ёбед.

144. Сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) x^2-7x+6; б) x^2-x-20; в) $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-3$; г) $2x^2+2x-4$.

145. Касрро ихтисор кунед:

а) $\dfrac{x^2+x-2}{2x-2}$; б) $\dfrac{4x^2-20x+24}{x^2-5x+6}$; в) $\dfrac{x^2+4x-5}{2x+10}$; г) $\dfrac{8x^2-16x+24}{2x-6}$.

Ба параграфи 3

146. а) Параболаи $y=2x^2$ ба боло 7 воҳид ба тарафи чап 5 воҳид кӯчонида шуд. Параболаи ҳосилшуда графики кадом функсия аст.
б) Агар графики функсияи $y=2(x-1)^2$-ро аз рӯи тири симметриаш 3 воҳид ба поён ҷой иваз кунонем, графики кадом функсия ҳосил мешавад?

147. Қуллаи параболаи $y=2x^2-3x+2$ дар кадом нуқта ҷойгир мешавад?

148. Параболаи $y=x^2+4x+3$ тири Oy ва Ox-ро дар кадом нуқтаҳо мебурад?

149. Қиматҳои a ва b-ро ёбед, агар маълум бошад, ки графики функсияи $y=ax^2+bx-18$ аз нуқтаҳои $M(1;\ 2)$ ва $N(2;\ 10)$ мегузарад.

150. Хосиятҳои функсияҳоро истифода карда графики онро созед:
а) $y=x^2-3x-3$; б) $y=-3x^2+4x-2$; в) $y=x|x|-2x$.

151. Вобастагии x ва y бо муодила дода мешавад. Қиматҳои p ва q муайян карда шаванд, агар:
а) дар ҳолати $x=-2$ будан y ба нул мубаддал шавад;
б) дар ҳолати $x=0$ будан y ба қимати хурдтарини 3 доро шавад;
в) дар нуқтаи $(-6;\ 0)$ графики функсия ба тири Ox расад.

152. Экстремум ва экстремали функсияро ёбед:
а) $y=4x^2-56x+194$; в) $y=-5x^2+40x-73$; д) $y=9x^2-36x+41$;
б) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{37}{4}$; г) $y=10x^2-20x-1$; е) $y=3x^2-12x+12$.

Ба параграфи 4

Аз тарзи графикӣ истифода карда нобаробариро ҳал кунед (153–154).

153. а) $x^2-3x-10>0$; б) $2x<x^2$; в) $x^2-10x-39>0$.

154. а) $2x^2+1>1$; б) $9x^2+12x+16<0$; в) $x>4x^2$.

155. Нобаробариро бо методи фосилаҳо ҳал кунед:
а) $2x^2+13x-7>0$; в) $6x^2-13x+5\le 0$; д) $3x^2-2x>0$.
б) $-9x^2+12x-4<0$; г) $-2x^2-5x+18\le 0$.

156. Барои кадом қиматҳои m нобаробарӣ қиматҳои дилхоҳи x дуруст аст:
а) $x^2-4x+2m>0$; г) $\frac{1}{24}x^2+mx-m+1>0$;
б) $x^2-(m+2)x+8m+1>0$; д) $mx^2-12x-5<0$;
в) $x^2+4x+(m-2)^2\ge 0$; е) $(m+2)x^2+5x-4<0$?

157. Графики функсияро созед:
а) $y=|-x^2-2x+5|$; б) $y=(5-|x|)(x+1)$.

158. Нобаробариҳоро ҳал кунед:
а) $-x^2+x-2<0$; в) $\frac{x^2}{10}+2>\frac{7x}{10}$;
б) $3x-x^2-4<0$; г) $\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}>\frac{3x-10}{4}$.

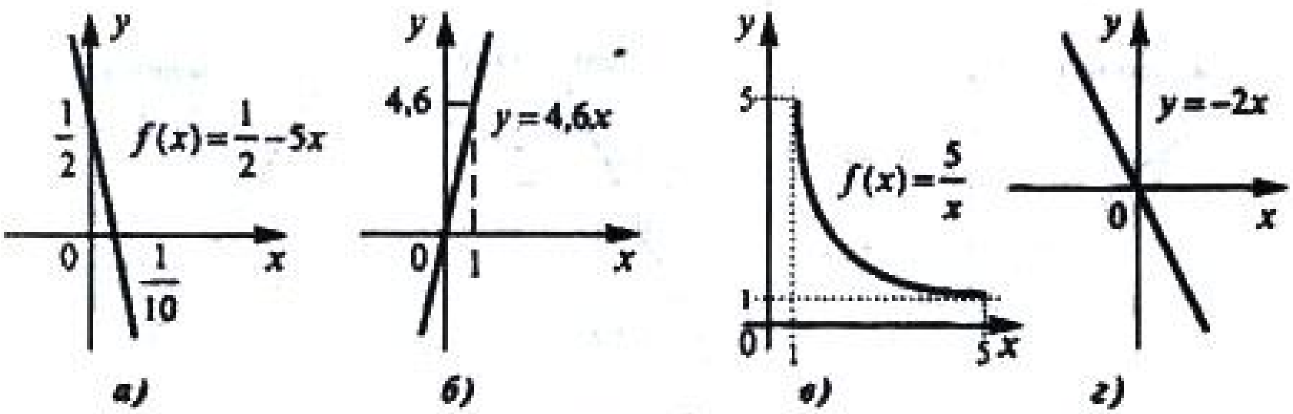
159. Дарозии росткунҷа аз бари он 5 м зиёд аст. Бари росткунҷа чӣ гуна бояд бошад, то ки масоҳати он аз 36 м² калон шавад?

ҶАВОБҲО

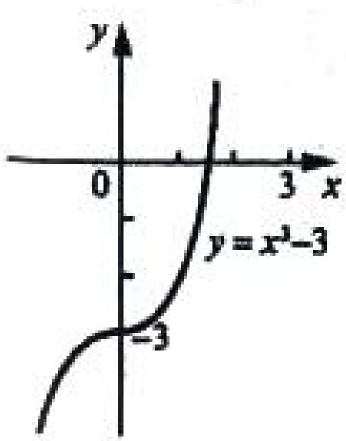
1. а) 7; б) 7; в) 2; г) $\frac{13}{4}$; **2.** а) 48; б) 122; в) -22; г) -60. **3.** а) $-\frac{11}{5}$; б) $\frac{6}{5}$; в) 0; г) $-\frac{4}{5}$; д) $\frac{11}{5}$. **4.** а) 1; б) $\frac{1+a^2}{1-a^2}$; в) -3; г) -2; д) $-\frac{1}{3}$. **5.** 0; $-1{,}5$; б) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; $-\frac{1}{3}\sqrt{6}$; в) 0; $\frac{4}{5}$; г) 0; $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; е) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **6.** а) 0; б) $1\frac{7}{24}$. **7.** $\frac{2}{5}$. **8.** а), б), г) Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ; в) маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ ғайр аз 3; д) маҷмӯи ҳамаи ададҳо ғайр аз 5 ва -2; е) $x \geq 4$; ж) $x \geq -10$; з) $x \geq -100$. **9.** а) $y=\frac{2}{x-10}$; б) $y=\frac{x}{(x-2)(x-3)}$; в) $y=\sqrt{x}$; г) $y=\sqrt{x-20}$. **10.** а), б) Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ. **11.** а) 0; -9; б) -5; в) 0; 9; г) 1. **12.** Расми 33. **13.** Расми 34.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-30	-11	-4	-3	-2	5	24

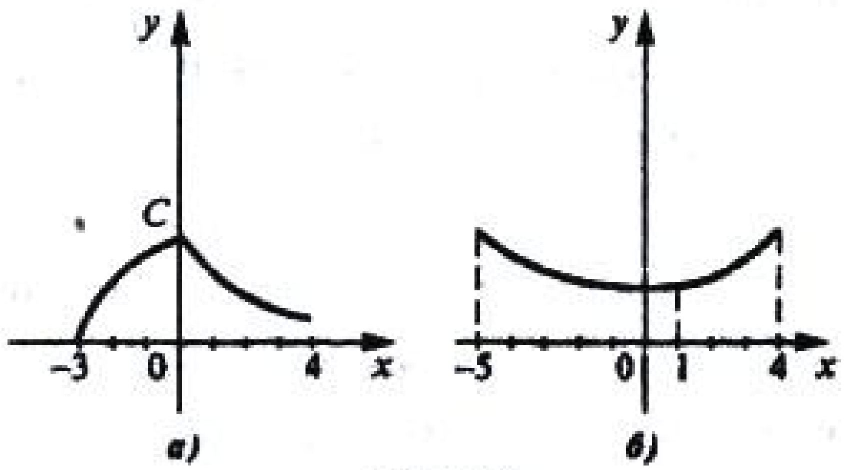
14. а) $x=3$; $y=-1$; б) $x=7$ $y=5$. **15.** а) $(3{,}4; \infty)$; б) $(1{,}8; \infty)$. **16.** а) ± 8; б) 0;1. **17.** 730 кг. **18.** а) Ҷуфт; б) тоқ; в) ҷуфт; г) тоқ; д) тоқ. **19.** а) Тоқ; б) ҷуфт; в) на ҷуфт на тоқ; г) тоқ. **20.** а) На ҷуфт на тоқ; б) ҷуфт в) тоқ; г) ҷуфт. **21.** а), б), г) тоқ; в) ҷуфт.



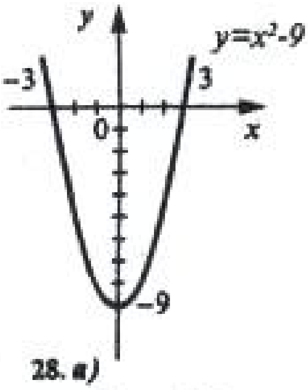
Расми 33



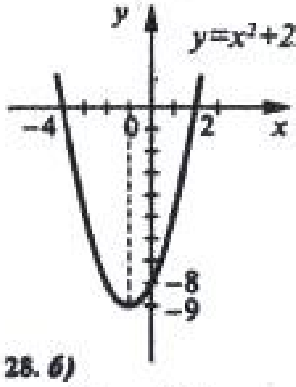
Расми 34



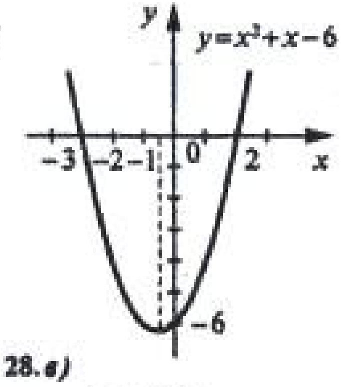
Расми 35



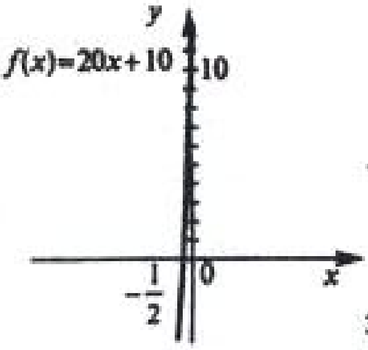
Расми 36



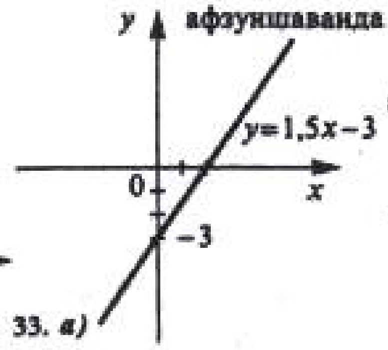
Расми 37



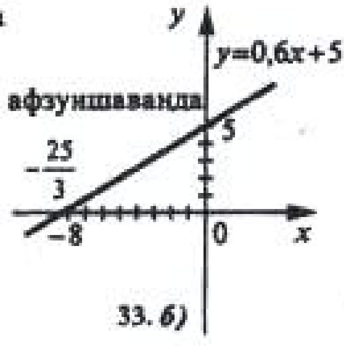
Расми 38



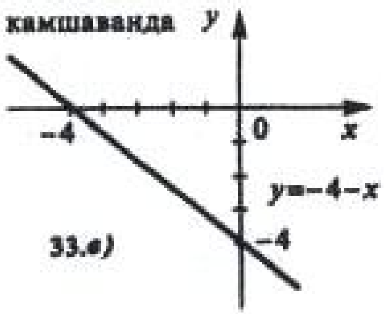
Расми 39



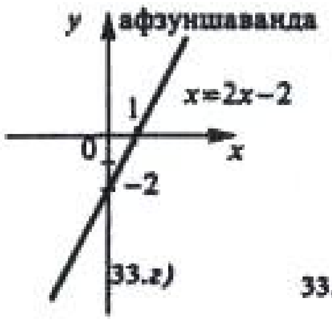
Расми 40



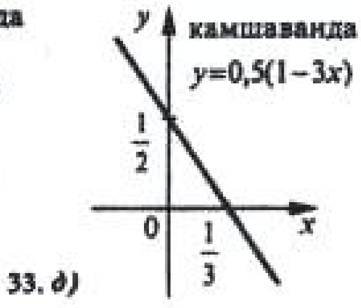
Расми 41



Расми 42

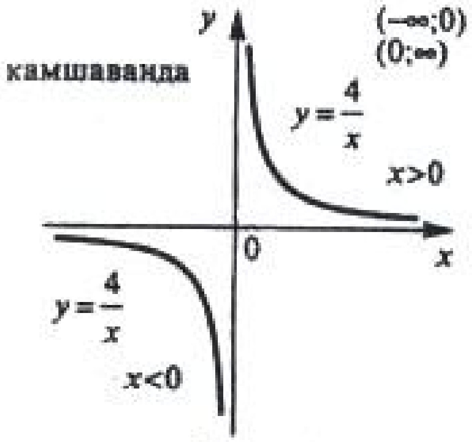


Расми 43

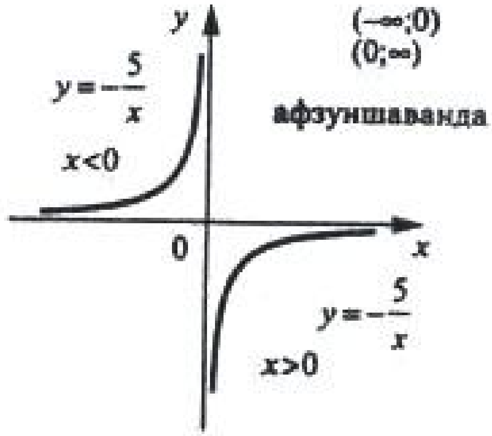


Расми 44

22. а) $1\frac{2}{5}$; б) 24; в) 7; г) 2. **23**. а) $\frac{2}{91}$; б) $\frac{1}{7}\cdot 26^3$; в) 2; г) $\frac{1}{2}$. **24**. а) $a(a^2-2a-1)$; б) $(a-c)(x-y)$; в) $3ax(a+2x)$; г) $3a^3(3a-4b)$. **25**. 15 соат. **26**. а) (0; 4); б) (9; 13); в) (4; 9). **27**. Расми 35, а, б. **28**. Расми 36, 37, 38. **29**. а) 15; в) −2; г) нул надорад. **30**. а) Дорад $x=33\frac{1}{3}$; б) дорад $x=0$ ва $x=2$; в) дорад $x=6$; г) надорад; д) надорад. **31**. а) $x=3$ нули функсия, барои $x<3$ $f(x)$–мусбат, барои $x>3$ $f(x)$–манфӣ; б) $x=-\frac{1}{2}$ нули функсия, барои $x>-\frac{1}{2}$ $f(x)$–мусбат, барои $x<-\frac{1}{2}$ манфӣ. Расми 39. **33**. Расми 40, 41, 42, 43, 44: а) афзуншаванда; б) камшаванда; в) камшаванда; г) афзуншаванда; д) камшаванда. **34**. а) $x=-6$; б) $x>-6$; в) $x<-6$. **35**. Расми 45 ва



Расми 45



Расми 46

46. **36.** а) $x=12$; б) $x=-\frac{9}{2}$ **37.** 1;–5. **38.** а) $\frac{1}{4}$; б) 22. **39.** а) $-5a+5ab^2$; б) $6a(2a-3)$.

41. а) $(x-8)^2-80$; б) $(x-4)^2-81$; в) $3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{3}$; г) $(x-3)^2-1$. **42.** а) $\frac{1}{3}(x-6)^2+4$; б) $(x+3)^2+1$; в) $(x-1)^2-3$; г) $(x-1)^2-1$. **43.** $(x-3)^2+2$ ҳама вақт мусбат; $-[(x-10)^2+10]$ ҳама вақт манфӣ. **44.** а) $(x-3)^2+1>0$; б) $5(x-1)^2\geq 0$; в) $-(x-10)^2\leq 0$; г) $-2\left[(x-4)^2+\frac{1}{2}\right]<0$.

45. а) $(x-2)^2+3$; б) $(x+1)^2-2$; в) $-2(x+1,5)^2+1$. **46.** а) $-\frac{1}{2}$; 3; б) 1; $1\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{6}$.

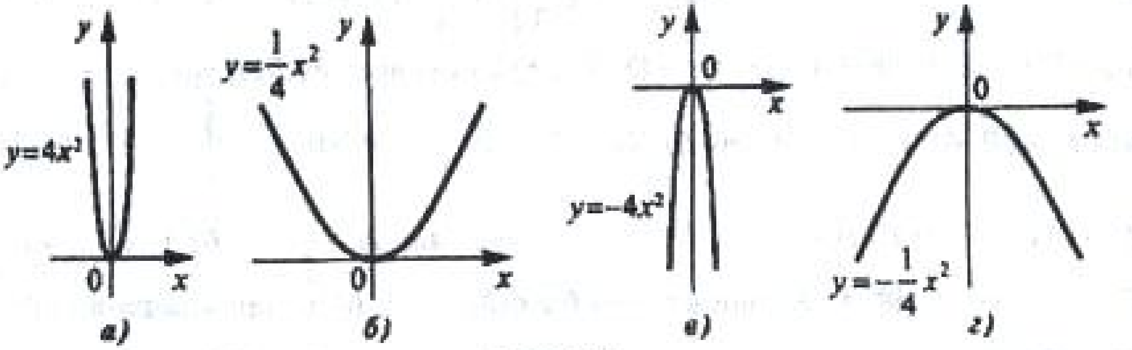
47. 24 км/соат. **48.** а) Ҳамаи ададҳо ба ғайр аз 7; б) ҳамаи ададҳои ғайр аз –36. **49.** а) $(x-1)(x+7)$; б) $(2a-x+y)(2a+x-y)$; в) $6(x+2y)^2$. **50.** а) $(x-3)(3x-1)$; б) $(m-1)(2m-1)$; в) $(x-1)(x+2)$. **51.** а) $4(b+1)(b-1)(a+b)(a-b)$; б) $\frac{1}{6}(x+1)(x+2)$; в) $(1-y)(y-15)$. **52.** а) $(x-1)(2x-3)$; б) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$; в) $-(3x-2)^2$; г) $(4a+3)^2$. **53.** а) $(0,5m-2)^2$; б) $(2-m)(m-3)$; в) $(3x-1)(x+2)$; г) $(3x-2)(2x-3)$. **54.** а) $\frac{3}{x+5}$; б) $\frac{2x+1}{x}$; в) $\frac{m-3}{m-2}$.

55. а) $\frac{5}{2a+9}$; б) $\frac{b-3}{b+5}$; в) $-\frac{y+4}{y+9}$. **56.** а) $\frac{2a+1}{3}$; б) $\frac{2y+1}{y-3}$; в) $-\frac{x+6}{x+5}$.

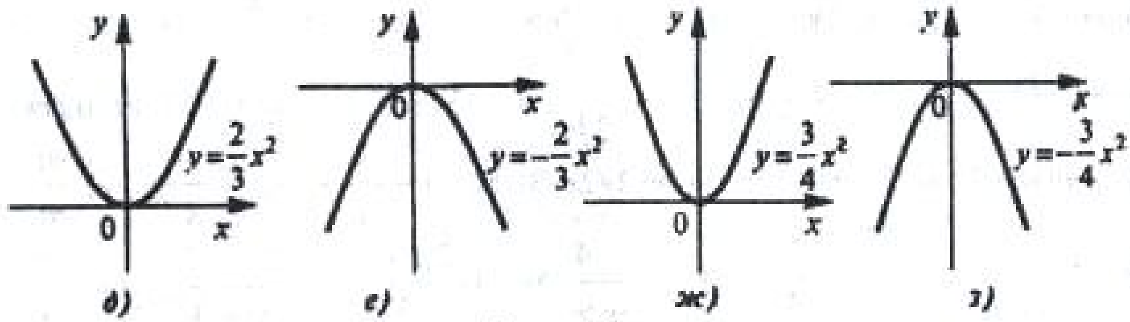
57. а) $\frac{4}{3x-1}$; б) $\frac{1-p}{p+2}$; в) $\frac{2(m-2)}{m+4}$. **60.** 3; $1\frac{2}{7}$; $1\frac{1}{6}$. **61.** 6. **62.** a; $\frac{1}{a}$. **63.** 14,4.

64. 1. **65.** 12; 13. **66.** 0,6. **67.** а) $\frac{1}{a^8}$; б) $\frac{4}{5}ax^2$. **68.** а) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; б) –20; 5. **69.** а) 2,8 кг; 3,5 кг; 5 кг; б) 229,3 сомонӣ ва 230 сомонӣ **70.** а) Ба поён; б) ба боло; в) ба боло; г) ба поён. **71.** (0; 4), $x=0$ тири симметрӣ; б) (2; 3), $x=-2$ тири симметрӣ; в) (2;–12); $x=2$ тири симметрӣ; г) $\left(\frac{2}{5};-\frac{1}{5}\right)$; $x=\frac{2}{5}$; тири симметрӣ; д) $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{64}\right)$;

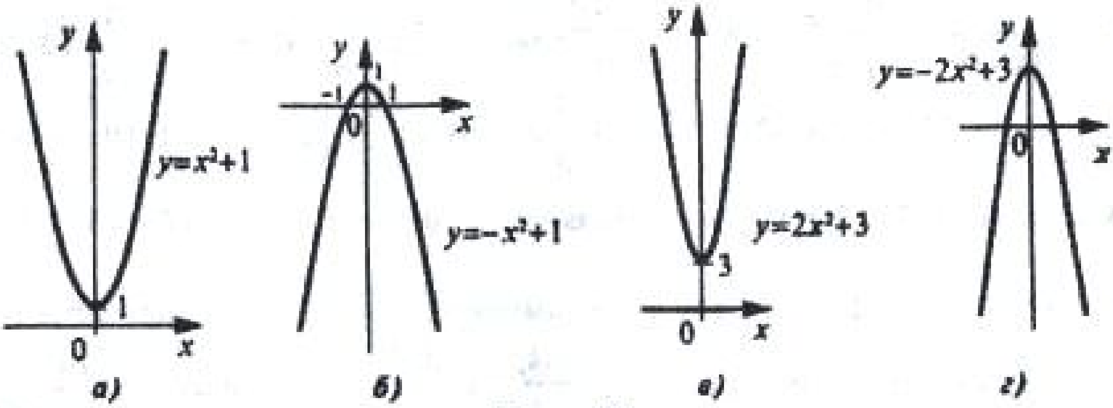
$x=\frac{1}{6}$ тири симметрӣ; е) $\left(\frac{3}{7};\frac{16}{7}\right)$. **72.** а) $\left(1;1\frac{1}{3}\right)$ б) 0,6; 1; в) $\left(2;2\frac{1}{3}\right)$; г) $2\frac{1}{2}$; 2. **73.** а) (0; 1); б) (0; 2); в) (0: 4); г) (0; 5). **74.** а) $\left(-\frac{1}{2};3\right)$; б) намебурад; в) (−1;−0,8) г) $\frac{1}{6}$. **75.** а) (3; 0); б) $\left(\frac{1}{2};0\right)$; в) (1: 0); г) (2; 0). **76.** а) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ −афзуншаванда; б) $\left(-\infty;\frac{7}{6}\right)$ камшаванда; в) $(-\infty;\ 3)$−афзуншаванда; $(3;\ \infty)$−камшаванда; г) $(-\infty;\ -2)$−афзуншаванда; $(-2;\ \infty)$−камшаванда; д) $(-\infty;\ -1)$−камшаванда; $(-1;\ \infty)$ −афзуншаванда; е) $(-\infty;\ 1)$−афзуншаванда $(1;\ \infty)$−камшаванда. **77.** а) $\frac{a-b}{a+b}$; б) $\frac{y-x}{y+x}$; в) $-(a+1)$; г) $\frac{1}{m-n}$. **78.** а) 1; б) −1. **79.** 48 саҳифа; 52 саҳифа.



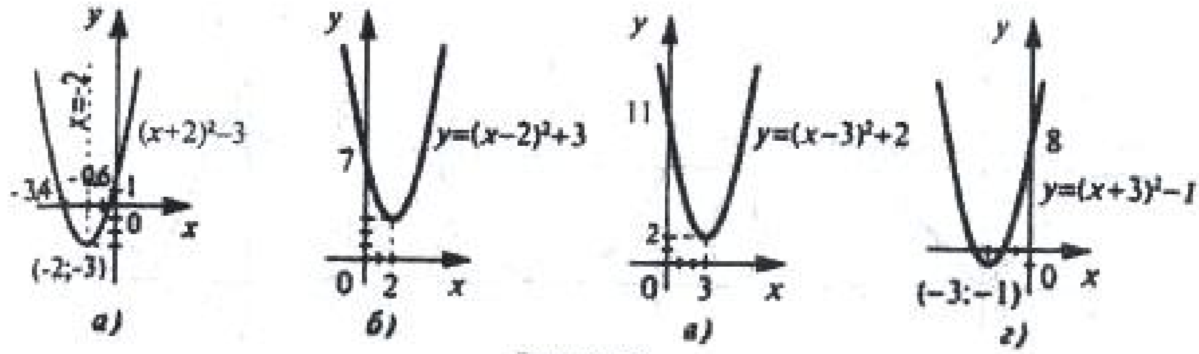
Расми 47



Расми 48

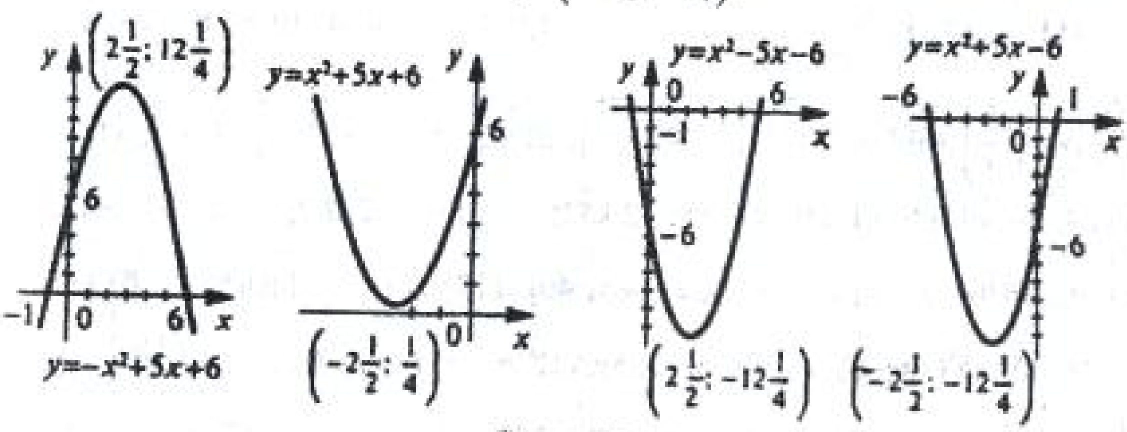


Расми 49

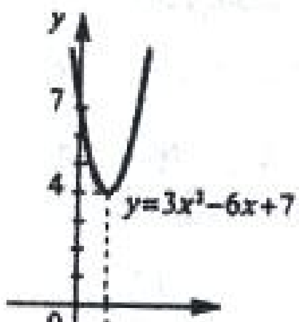


Расми 50

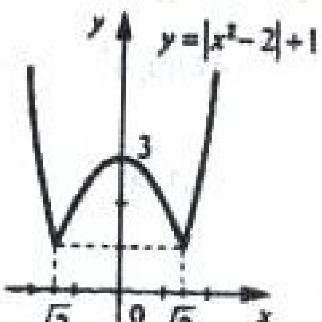
80. $(1-y)(y-5)$; б) $(1-x)(x+6)$; в) $(x-1)(2x-3)$; г) $(y+1)(5y-3)$. **81.** Қимати калонтарин: б) ; г); д). Қимати хурдтарин: а); в); с). **82.** *а)* $y_{min}=-16$; б) $y_{max}=2$; в) $y_{min}=0$; г) $y_{max}=3$; д) $y_{min}=-\frac{1}{2}$ е) $y_{max}=1$. **83.** а) 0: б) $\frac{1}{2}$; в) 2; г) 0; д) 1; е) -3. **84.** а) $y_{min}(-2)=-1$; б) $y_{max}(-2)=-1$; в) $y_{min}(-3)=1$; г) $y_{min}(2)=-1$; д) $y_{max}(2)=1$; е) $y_{min}(3)=3$. **85.** а) $\frac{1-a}{1-2a}$; б) x^2+x. **86.** а) 4; -16; б) 9; -5. **87.** а) Ба поён; б) ба боло. **88.** 1920 нафар. **89.** Расми 47, 48. **90.** Расми 49. **91.** Расми 50. **92.** а) Расми 51. **93.** Расми 52. **94.** а) -2; 2; б) -1; $-4,7$; в) -2; -3. **95.** а) 4; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{17}{55}$. **96.** а) 150 кг; б) 960 м. **97.** а) $(5;\infty)$; б) $(-\infty;-4)\cup(2;\infty)$; в) $(-2;1)$. **98.** а) $y_{min}(3)=2$; б) $y_{max}(-2)=-3$; в) $y_{min}(5)=5$. **99.** а) $(-\infty;1)\cup(4;\infty)$; б) $(-4;0)$; в) $(-\infty;-4.5)\cup[5;+\infty)$. **100.** а) $\left(-2\frac{1}{3};3\frac{3}{4}\right)$; б) $(-\infty;0)\cup(4;\infty)$; в) $x=-3$.



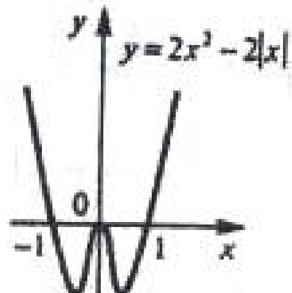
Расми 52



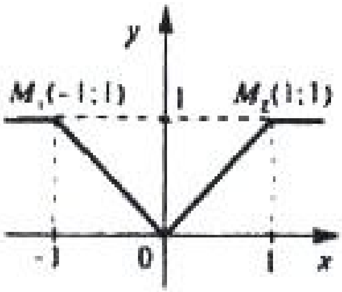
Расми 51



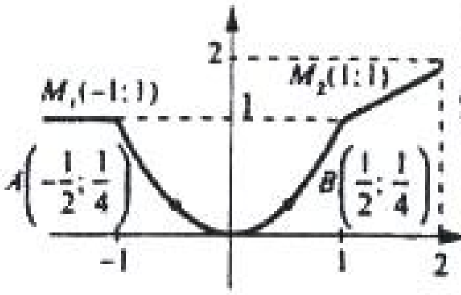
Расми 53



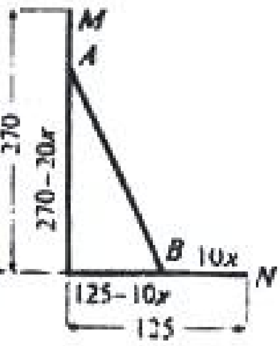
Расми 54



Расми 55



Расми 56



Расми 57

101. а) Ҳал надорад; б) x–адади ҳақиқии ихтиёрӣ; в) $[-9; -4]$. **102**. б) $(-\infty;+\infty)$; в) адади ҳақиқии ихтиёрӣ. **103**. а) $(-\infty; -2)\cup(5; \infty)$; б) $x\neq1{,}5$; в) x–адади ҳақиқии ихтиёрӣ. **104**. а) $(-\infty; -1)\cup(2; \infty)$; б) $(-\infty; 1]\cup[4; \infty)$; в) $\left(-\infty;\frac{-9-\sqrt{41}}{2}\right]\cup\left[\frac{-9+\sqrt{41}}{2};\infty\right)$ **105**. а) $(3; 6)$; б) x–адади ҳақиқии ихтиёрӣ; в) $x\in(-\infty; 11]\cup[1; \infty)$. **106**. а) Аз 5 см хурд ; б) дарозиаш бояд аз 3 см калон шавад. **107**. а) $(-\infty; -5]\cup[5; \infty)$; б) $[-7;1]$; в); $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;\infty)$; г). $\left[-\frac{1}{8};\ 0\right]\cup\left[\frac{1}{8};\infty\right)$.

108. а) $m>1$; б) $m>11$; в) $m<-7{,}2$; г) $0<m<28$. **109**. $a=\frac{1}{8}$, $b=1$, $c=-6$. **110**. а) 3; б) 5. **111**. а) $(4; \infty)$; б) $(4; \infty)$. **112**. $1\frac{3}{7}$. **113**. 7 ва 5. **114**. 10 ва 6. **115**. а) $(5; \infty)$; б) $\left(-\infty;-\frac{6}{5}\right)$; в) $(-\infty; 3)$; г) $\left(-\infty;-\frac{9}{5}\right)$; д) $x\in(-\infty; \infty)$; е) $\left[-\frac{5}{3};+\infty\right)$; ж) $(-\infty; 0{,}4)$; з) $(-1{,}4; \infty)$; и) $[-5; \infty)$. **116**. а) $(-\infty; -2)\cup(1; \infty)$: б) $(-\infty; 2)\cup(2; \infty)$; в) $(-\infty; -3)\cup[1; \infty)$; г) $(-\infty; 2)\cup(4; \infty)$; д) $(-\infty; 0{,}2)$; е) $(-\infty; 40]$. **117**. а) $(-\infty; -8)\cup(5; \infty)$; б) $(-10; 14)$; в) $(-25; 30)$; г) $(-\infty;-6)\cup(6; \infty)$; д) $(2; 5)\cup(12; \infty)$; е) $(-\infty; -7)\cup(-1; 4)$; ж) $\left[-\frac{1}{3};-\frac{1}{7}\right]$; з) $\left[-6;\frac{1}{3}\right]$; и) $[-3; 3{,}5]$; к) $[0{,}3; 8]$; л) $(-\infty; -4)\cup(0; 4)$; м) $(0; 1)$. **118**. а) $(-\infty; 2)\cup(3; \infty)$; б) $[-1; 0{,}5]$; в) $(0; 1)\cup(1; \infty)$. **119**. г) Расми 53; ж) расми 54. **120**. а) $(-\infty; 0]\cup[1; \infty)$; б) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};\infty\right)$; в) $(-\infty; -4)\cup(0; 4)$; г) $(-\infty; -2)\cup(-1; 1)$; д) $(-\infty; -1)\cup(4; \infty)$; е) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$; ж) $(-\infty; 1)$. **121**. а) $\frac{x+2}{3x-1}$; б) $\frac{4m^2-6m+9}{3m+2}$; в) $\frac{3a-1}{a+2}$.

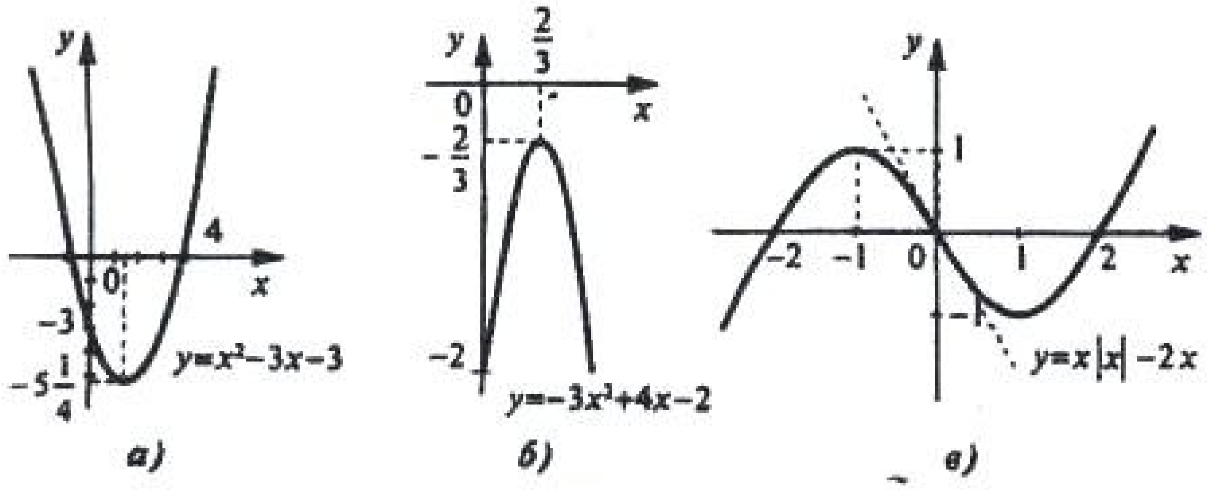
122. а) $1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5}$; б) -2; $2\frac{1}{3}$. **123**. а) $(6; 17)$; в) $\left(\frac{3}{4};2\right)$. **124**. 25%. **125**. 21,5 сентнер аз 1 га ва 22,8 сентнер аз 1 га. **126**. а) $x\neq\pm1$; б) $[-\infty; 1)\cup(1; \infty)$; в) $(-\infty; 1]$;

г) $(-\infty;3]$; д) $\left[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right]$; е) $x\neq0$; $x\neq-5$. **127**. а) $[2;\ \infty)$; б) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$; в) $\left[-\frac{1}{3};\infty\right)$;
г) $\left[\frac{1}{5};\infty\right)$; д) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$; ж) $[-3;\ 6]$; з) $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$; и) $[-4;\ 4]$; к) $\left[\frac{4}{3};\infty\right)$. **128**. Масалан

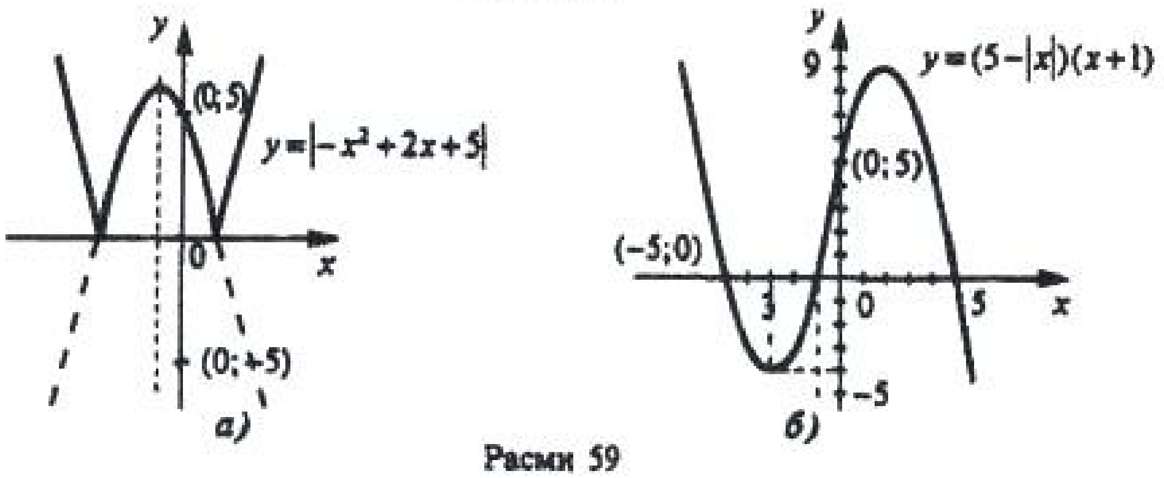
а) $y=\dfrac{3}{x-2}$; б) $y=\dfrac{3x}{x^2-1}$; в) $y=\sqrt{x-1}$. **129**. $y=\begin{cases}1, \text{ агар } & x\le-1\\ -x, \text{ агар } & x\in[-1;0]\\ x, \text{ агар } & x\in[0;1]\\ 1, \text{ агар } & x\ge1\end{cases}$

Расми 55. $y=\begin{cases}1, \text{ агар } & x\le-1\\ x^2, \text{ агар } & x\in[-1;1]\\ x, \text{ агар } & x\ge1\end{cases}$ Расми 56. **130**. а) -4; б) надорад; в) ±2.

131. а) -5; б) 1; в) $\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) -100; е) 2000. **132**. $a=2$; $b=3$. **133**. $a_1=1$; $b_1=1$; $a_2=2$; $b_2=\frac{1}{2}$. **134**. а) $x=-2$ ва $x=1$; б) $y>0$, агар $x\in(-\infty;\ -2)$ ё $x\in(1;\ \infty)$ в) $y<0$, агар $x\in(-2;\ 1)$. **135** а) чуфт; б) ток; г) чуфт; д) ток; е) на чуфт на ток; ж) чуфт. **136**. $k>0$ − афзуншаванда, $k<0$ камшаванда. **137**. а) афзуншаванда; б) камшаванда; в) камшаванда; г) афзуншаванда; д) камшаванда. **138**. а) $m>0$.



Расми 58



Расми 59

139. $x<0$ афзуншаванда. **140**. а) $(x-4)^2-81$; б) $(x-3)^2-1$; в) $(x+4)^2-1$; г) $(x-1)+34$; д) $\left(x+\frac{11}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$; е) $(x-3)^2-1$; ж) $(ax+4)^2-18$; з) $a(x-2a)^2+3$; и) $\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(a-b)^2}{4}$. **141**. а) $5(x-1)(x-2)$; б) $\frac{1}{5}(x-5)(x-10)$; в) $-3(x+3)(x-2)$; г) $-\frac{1}{2}(x+1)(x-7)$; д) $10\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)$; е) $(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

142. $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. **143**. Расми 57. $(270-20x)^2+(125-10x)^2=130^2$; 15м/сония, 38,2 м/сония. **144**. а) $(x-6)(x-1)$; б) $(x-5)(x+4)$; в) $\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$; г) $2(x-1)(x+2)$.

145. а) $\frac{x+2}{2}$; б) 4; в) $\frac{x-1}{2}$; г) $4(x+1)$. **146**. *а*) $y=2(x+5)^2+7$; б) $y=2(x-1)^2-3$.

147. $\left(\frac{3}{4};\ \frac{7}{8}\right)$. **148**. Oy: (0; 3); б) $y=2(x-1)^2-3$. Ox: (−3; 0) ва (−1; 0). **149**. $a=-6$; $b=26$.

150. Расми 58. **151**. а) $p=q=4$; б) $p=0$, $q=3$; в) $p=12$, $q=36$. **152**. *а*) $y_{min}(7)=-2$; б) $y_{min}(5)=3$; в) $y_{max}(4)=7$; г) $y_{min}(1)=11$; д) $y_{min}(2)=5$; е) $y_{min}(2)=0$. **153**. а) $(-\infty;-2)\cup(5;\infty)$; б) $(-\infty;0)\cup(2;\infty)$; в) $(-\infty;-3)\cup(13;\infty)$. **154**. а) $(-\infty;\infty)$; б) ҳал надорад; в) (0; 0,25).

155. а) $(-\infty;-7)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$; б) $x\neq\frac{2}{3}$; в) $\left[\frac{1}{2};\ 1\frac{2}{3}\right]$; г) $\left(-\infty;-4\frac{1}{2}\right)\cup[2;\infty)$; д) $(-\infty;0)\cup\left(\frac{2}{3};\infty\right)$. **156**. а) $m>2$; б) $0<m<28$; в) $m\le0$ ва $m\ge4$; г) $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{3}$; д) $m<-7{,}2$; е) $m<-3\frac{9}{16}$. **157**. Расми 59. **158**. а) $(-\infty;\infty)$; б) $(-\infty;\infty)$; в) $(-\infty;\infty)$; г) $(-\infty;\infty)$. **159**. Аз 4 м калон.

Боби II

МУОДИЛА ВА СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲО

§ 5. Муодилаҳои якномаълума
§ 6. Системаи муодилаҳои дуномаълума

§5. МУОДИЛАҲОИ ЯКНОМАЪЛУМА

12. Муодилаи бутун ва дараҷаи он

Дар навбати аввал мафҳуми ифодаи бутунро ба хотир меорем. Чӣ тавре дар синфи 8 дидем чунин ифода аз ададҳо ва тағйирёбандаҳо бо воситаи амалҳои ҷамъ, тарҳ, зарб, инчунин тақсим ба адади аз нул фарққунанда ва қавсҳо тартиб дода мешавад. Масалан, ифодаҳои

$$\frac{2a}{3}-3bc^2+\frac{4abc}{5}\cdot(a^3-b^3) \text{ ва } \frac{4x^2y}{9}+az$$

бутун мебошанд. Вале ифодаи

$$\frac{7mn}{4}+\frac{(m-3)^3}{p}+q^2$$

бутун нест, чунки дар он тақсим ба тағйирёбандаи P ҷой дорад. Хотирнишон мекунем, ки яказзогиҳо намуди оддитарини ифодаҳои бутунанд. Ба сифати мисол ифодаҳои зеринро овардан мумкин аст:

$$2xy, \quad x^3y, \quad \frac{3}{5}axz^4,\ 0{,}1\ a^2b^3, \quad \ldots .$$

Акнун муодилаиҳои

$$3(x+1)(x^3-2)=x^2+4(x-5), \tag{1}$$

$$\frac{x^3}{2}-\frac{x+4}{3}=7x^2-\frac{x}{4} \tag{2}$$

-ро дида мебароем.

Қисмҳои чап ва рости муодилаҳои (1) ва (2) ифодаҳои бутунанд. Ин гуна муодилаҳо дар математика **муодилаҳои бутун** ном доранд. Ҳар гуна муодилаҳои намуди (1) ва (2)-ро ба шакли $P(x)=0$-и ба муодилаҳои аввала баробарқувва, ки P(x)–бисёраъзогии намудаш стандартӣ аст, овардан мумкин аст. Дар ҳақиқат, агар дар муодилаи (1) қавсҳоро кушода ва ҳарду тарафи муодилаи (2)-ро ба 12 зарб занем, он гоҳ баъди бо тартиби муайян иҷро кардани амалҳо ва табдилоти зарурӣ барои муодилаи (1)

$$3x^4+3x^3-x^2-10x+14=0 \tag{1'}$$

ва барои муодилаи (2)

$$6x^3-84x^2-x-16=0 \qquad (2')$$

-ро ҳосил мекунем. Бояд қайд кард, ки ин гуна амалиётро нисбати муодилаи бутуни дилхоҳ иҷро кардан мумкин аст. Ҳамин тарик, **муодилаи бутуни дилхоҳи якномаълумаро бо муодилаи ба он баробарқувваи қисми чаппаш бисёраъзогии намудаш стандартии $P(x)$ ва қисми росташ нул оварда ҳал кардан мумкин аст.**

Мафҳуми дараҷаи муодилаи бутунро дохил мекунем. Бо ин мақсад фарз менамоем, ки муодилаи якномаълума дар шакли

$$P(x)=0 \qquad (3)$$

дода шуда, мувофиқи гуфтаҳои болоӣ $P(x)$–бисёраъзогии стандартӣ аст. Дараҷаи ин бисёраъзогиро **дараҷаи муодилаи (3)** меноманд. Дар ин асос, масалан, муодилаи $2x^4-7x+3=0$–муодилаи дараҷаи чоруми якномаълума мешавад.

Муҳокимарониҳои охиронро ҷамъбаст намуда, тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем: **дараҷаи муодилаи бутуни дилхоҳ гуфта дараҷаи муодилаи ба он баробарқувваи (3)-ро меноманд.**

Аз ин ҷо бармеояд, ки дараҷаи муодилаҳои (1) ва (2) мувофиқан «чор» ва «се»–анд (нигаред ба муодилаи (1') ва (2')). Муодилаи $(x^4-2)^2+3x^6=x^8+x+1$ баъди табдилотҳои зарурӣ ба намуди $3x^6-4x^4-x+3=0$ оварда мешавад. Бинобар ин вай муодилаи бутуни дараҷааш шаш мебошад.

Мисоли дигарро дида мебароем. Бигзор он муодилаи

$$(x^5-1)^2=x^{10}-2x^5+3x^4-7$$

бошад. Қавсро кушода ҳамаи аъзоҳоро ба қисми чап мегузаронем:

$$x^{10}-2x^5+1-x^{10}+2x^5-3x^4+7=0.$$

Аъзоҳои монандро ислоҳ намуда $-3x^4+8=0$-ро ҳосил мекунем. Азбаски дараҷаи муодилаи ҳосилшуда ба 4 баробар аст, пас дараҷаи муодилаи $(x^5-1)^2=x^{10}-2x^5+3x^4-7$ низ ба 4 баробар мешавад.

?

1. Кадом ифодаҳоро ифодаҳои бутун меноманд? Мисолҳо оред. Мисоли ифодаҳоеро оред, ки ифодаи бутунро ташкил намедиҳанд. **2.** Оё якаъзогиҳо ифодаи бутунро ташкил дода метавонанд? Мисолҳо оред. **3.** Мафҳуми муодилаи бутунро бо мисолҳо шарҳ диҳед. **4.** Оё муодилаи бутуни дилхоҳи якномаълумаро ба муодилаи ба он баробарқувваи $P(x)=0$ иваз кардан мумкин аст? **5.** Дар зери мафҳуми дараҷаи муодилаи бутун чиро мефаҳмед? Мисолҳои мушаххас гирифта дараҷаи муодилаи бутунро муайян кунед.

160. Оё ифодаҳои зерин бутунанд.

а) $\frac{9a}{2}-\frac{5b^2+1}{3}+3a-\frac{1}{3}$; б) $\frac{4ac^2bc^3}{3}-d+0,5m^4$; д) $xyz^3-\frac{y^3}{5}+\frac{4}{z^4}$;

б) $7a^2b^3-\frac{a+b}{c}=\frac{c^2+1}{5}$; г) $\frac{2}{c^2}-\frac{abc+3}{4}+\frac{a}{b}$; е) $10ab^3+7(a+b)^2$?

161. Кадоме аз муодилаҳои зерин муодилаи бутун мебошад:

а) $\frac{2}{3}x+8=0$; д) $\frac{3x-1}{3}+x=\frac{7-x}{3}+4$; и) $\frac{4}{x^3}-\frac{x^3}{4}=x+11$;

б) $1-3x=5x^2$; е) $7y-\frac{y^2-4}{3}=9-y^2$; к) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=4$.

в) $7x^2-4x+3=0$; ж) $\frac{2}{z}-\frac{3+z}{z-1}=z^3$;

г) $\frac{5}{x^2-1}-x=\frac{x\cdot(x-2)}{3}$; з) $2x^4-16x^2=5x^3-\frac{2x}{3}$;

162. Дараҷаи муодилаҳои бутуни зеринро ёбед:

а) $3x^5-9x^{11}+5=0$; и) $7x^3-(7x-3)x^2+x=11$;

б) $x^9-15x^7+2x^2=0$; к) $(x^2-3x+2)(x^2-4x+3)=0$;

в) $x^6+4x^3-8x=0$; л) $3(x^2+1)(x-1)=3x^3+7x+6$;

г) $\frac{2x}{3}-\frac{3x}{4}=2$; м) $\frac{x^4-1}{4}-\frac{x^2(x^2+1)}{2}=3x^2+10$;

д) $(x-1)(x-2)(x-3)=0$; н) $\frac{7-2x}{2}+\frac{3x+5}{3}=1+9x^2$;

е) $5x^2-\frac{2x-1}{3}=7$; о) $\frac{x(x+1)}{3}=x-1$;

ж) $3x(x^2+5)=0$; п) $(x^3-1)^2+3x^5=x^6-2x+1$;

з) $(x-1)(x+1)-x(x+4)=9$; р) $\frac{7x^3}{2}+1=(x^2-3)\cdot x^2-0,1x$.

Машқҳо барои такрор

163. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\frac{3,76\cdot 0,001}{0,01}$; в) $\frac{0,2\cdot 2,41}{0,1}$; д) $6\frac{1}{4}:\left(2\frac{1}{3}\cdot 9-20\right)$.

б) $\frac{0,1\cdot 6,14}{0,001}$; г) $\left(5\frac{1}{3}-2\frac{1}{6}\right):\left(8-1,2\cdot\frac{2}{3}\right)$;

164. Ифодаи $(7,8m-2,6n)-(2,3m-3,1n)$-ро содда намуда, қиматашро ҳангоми $m=-2$ ва $n=4$ будан ҳисоб кунед.

165. Графики функсияи $y=9-2x$-ро сохта боварӣ ҳосил намоед, ки нуқтаҳои $A(0;9)$, $B(-1;11)$, $C(1;7)$ ва $D(3;3)$ ба график тааллуқ доранд.

166. Масофаи байни ду шаҳр ба 100 км баробар аст. Нозири роҳ автобуси мусофиркашии аз рӯи ин машрут ҳаракаткунандаро баъди $\frac{3}{5}$-ҳиссаи роҳро тай карданаш боздошт. То вохӯрӣ бо нозир автобус чанд километр роҳро тай намуда буд?

167. Формулаи периметр ва масоҳати росткунҷаро ёбед, агар дарозии он аз бараш дида ду маротиба зиёдтар бошад.

168. Ҷуфт ё токии функсияро муайян кунед:
а) $y=x^2-7$; б) $y=-0,3x^3$; в) $y=-3$.

169. Нобаробарии $\frac{2x-1}{x-3} \geq 0$ -ро бо ёрии методи фосилаҳо ҳал намоед.

170. Сайёҳ 24 км роҳи ҳамвор ва 16 км роҳи душворгузари кӯҳиро тай намуда, барои тамоми роҳ 8 соат вақт сарф намуд. Суръати аввалаи ҳаракати сайёҳро ёбед, агар дар роҳи кӯҳӣ ӯ суръаташро 2 км/соат суст карда бошад.

13. Ҳалли муодилаҳои якномаълума

А) **Муодилаи дараҷаи як**. Ин гуна муодилаҳоро ба намуди $ax+b=0$ меоваранд, ки дар он x–тағйирёбанда, a ва b ададҳо ва $a\neq 0$ аст. Аз муодилаи болоӣ номаълуми x дар шакли $x=-\frac{b}{a}$ ёфта мешавад, ки он (яъне адади $-\frac{b}{a}$) решаи ягонаи муодилаи $ax+b=0$-ро ташкил медиҳад. Умуман, **ҳар як муодилаи дараҷаи якум дорои як реша аст**, агар $a\neq 0$ бошад.

Б) **Муодилаи дараҷаи ду.** Онро баъди табдилотҳо ба намуди $ax^2+bx+c=0$ овардан мумкин аст, ки дар он x–тағйирёбанда, $a\neq 0$, b ва c ададҳоянд. Мавҷудият, шумора ва намуди решаҳои ин муодила аз аломати дискриминанташ $D=b^2-4ac$ вобастагӣ дорад. Аниқаш, ин вобастагиро дар шакли ҷадвали зайл ифода кардан мумкин аст:

$D=b^2-4ac$	$ax^2+bx+c=0$	Формулаи решаҳо
$D>0$	Ду решаи ҳақиқии x_1 ва x_2-ро дорад	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$
$D=0$	Як реша дорад	$x=-\frac{b}{2a}$
$D<0$	Реша надорад	—

Агар ду тарафи муодилаи $ax^2+bx+c=0$-ро ба a тақсим кунему $\frac{b}{a}$ -ро бо p ва $\frac{c}{a}$-ро бо q ишорат намоем, он гоҳ муодилаи $x^2+px+q=0$ ҳосил мешавад, ки онро **муодилаи квадратии ислоҳшуда** меноманд.

Дискриминанти он $D^1=\frac{p^2}{4}-q$ аст. Ҷадвали вобастагии решаҳо аз аломати дискриминант барои ин муодила чунин аст:

$D^1=\frac{p^2}{4}-q$	$x^2+px+q=0$	Формулаи решаҳо
$D^1>0$	Ду решаи гуногуни ҳақиқии x_1 ва x_2 дорад	$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D^1}$
$D^1=0$	як решаи ҳақиқӣ дорад	$x=-\frac{p}{2}$
$D^1<0$	решаи ҳақиқӣ надорад	—

Хотиррасон мекунем, ки сумма ва ҳосили зарби решаҳои муодилаи квадратии ислоҳшуда вобастагиҳои $x_1+x_2=-p$ ва $x_1\cdot x_2=-q$-ро қаноат менамоянд. Ин вобастагиҳоро формулаи Виет ва теоремаеро, ки онҳоро муқаррар менамояд, теоремаи Виет* меноманд.

Ниҳоят, ба назарияи умумии муодилаҳои дараҷаи ду баргашта, **ҳолатҳои имконпазирро ба ҳисоб гирифта, хулоса кардан мумкин аст, ки муодилаи дараҷаи дуюми дилхоҳ аз дуто зиёд реша надорад.**

В) Муодилаи умумии дараҷаи n–умро ба намуди

$$a_nx^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+...a_1x+a_0=0$$

овардан мумкин аст, ки дар он $a_n\neq0$, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 ададҳои маълум ва x–тағйирёбанда мебошад. Масалан муодилаҳои умумии дараҷаи се ва чор мувофиқан дар шаклҳои зерин навишта мешаванд:

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \quad (a_3\neq0)$$

$$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \quad (a_4\neq0).$$

Нишон додан мумкин аст, ки ҳар гуна муодилаи дараҷаи сеюм аз сето зиёд, чорум аз чорто зиёд ва n–ум аз n–то зиёд реша дошта наметавонад.

Барои муодилаҳои дараҷаи сеюму чорум формулаҳои хеле мураккаби ёфтани решаҳо маълуманд. Барои муодилаҳои умумии дараҷаашон аз чор боло бошад формулаҳои умумии ёфтани решаҳо то ҳол номаълуманд, вале ин ҳаргиз мазмуни он надорад, ки чунин муодилаҳоро ҳал кардан мумкин нест. Бо ёрии усулҳои махсус (ба монанди гузориш, ба зарбкунандаҳо ҷудокунии бисёраъзогӣ ва тарзи графикӣ) баъзан имконияти ҳалли чунин муодилаҳо мавҷуданд. Дар поён ин усулҳо дар ҳалли муодилаҳои мушаххас амалӣ карда шудаанд.

* Франсуа Виет (1540–1603) – математики франсавӣ.

Мисоли 1. Муодилаи $x^4-x^3-16x^2+16x=0$-ро ҳал мекунем. Қисми чапи ин муодиларо ба зарбкунандаҳо ҷудо карда

$$x\cdot(x^3-x^2-16x+16)=0, \qquad x\cdot(x-1)(x^2-16)=0,$$

$$x\cdot\left[x^2\cdot(x-1)-16(x-1)\right]=0, \qquad x\cdot(x-1)(x-4)(x+4)=0$$

-ро пайдо мекунем, ки аз он чор решаҳои $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=4$, $x_4=-4$ ҳосил мешаванд.

Мисоли 2. Муодилаи $x^5-x\cdot(8x^3+1)+8=0$-ро ҳал мекунем. Ифодаи дар қисми чапи муодила бударо ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:

$$x^5-x\cdot(8x^3+1)+8=x^5-8x^4-x+8=x^4\cdot(x-8)-(x-8)=$$
$$=(x-8)(x^4-1)=(x-8)(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Инак, муодила ба муодилаи

$$(x-1)(x+1)(x-8)(x^2+1)=0$$

баробарқувва аст. Охирин дорои се решаҳои $x_1=1$, $x_2=-1$ ва $x_3=8$ мебшад, ки онҳо аз муодилаҳои $x-1=0$, $x+1=0$ ва $x-8=0$ ҳосил мешаванд.

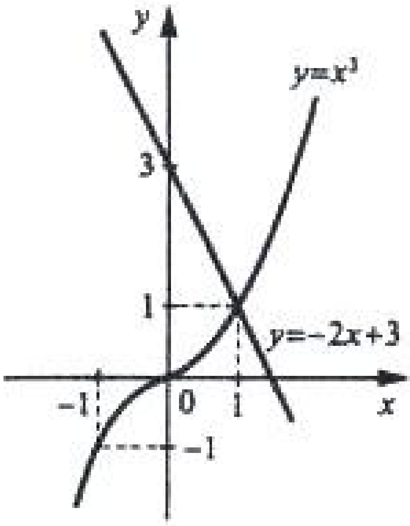
Мисоли 3. Муодилаи $x^3+2x-3=0$-ро ба тарзи графикӣ ҳал мекунем.

Бо ин мақсад муодилаи додашударо дар шакли $x^3=-2x+3$ менависем. Графики функсияҳои $y=x^3$ ва $y=-2x+3$-ро дар як системаи координатавӣ месозем (расми 60). Чуноне ки аз графикҳо дида мешавад онҳо якдигарро фақат дар як нуқта мебуранд.

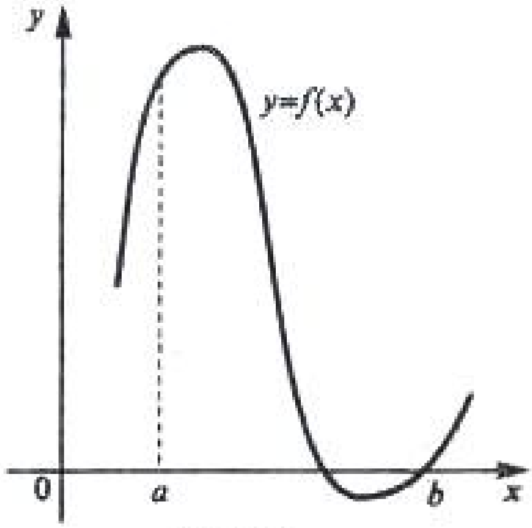
Абсиссаи нуқтаи буриш ба 1 баробар аст, ки он решаи муодилаи $x^3+2x-3=0$ мебошад.

Аслан ҳнгоми истифодаи тарзи графикии ҳал решаи матлубро асосан тақрибӣ ёфтан мумкин аст. Аз ин рӯ масъалаи бо саҳеҳии додашуда ёфтани реша ба миён меояд. Барои бо ин тарз саҳеҳтар ёфтани қимати тақрибии реша аввал порчаеро, ки дар он решаи матлуб воқеъ аст ёфта, баъд аз он зерпорчае, ки решаро доро мебошад ҷудо мекунанд. Пас аз чанд маротиба такрор кардани ин амал мо зерпорчаеро ҳосил мекунем, ки дарозиаш ба қадри зарурӣ хурд буда, решаи матлуб дар он воқеъ аст. Агар нуқтаи дилхоҳи ин зерпорча ба сифати қимати тақрибии ин ҳал гирифта шавад, он гоҳ хатои содиркардаамон аз дарозии зерпорча зиёд намешавад.

Графики функсияи $y=f(x)$, ки $f(x)$–бисёраъзогӣ аст, дар ҳамвории координатавӣ хати каҷи яклухтро ифода мекунад. Агар функсияи номбурда дар нугҳои порчаи охирноки $[a; b]$ қиматҳои аломаташон гуногунро қабул кунад (яъне, хати каҷ аз як нимҳамвории бо тири Ox ҷудошуда ба нимҳамвории дигараш гузарад, пас он тири абсиссаро ақаллан дар як нуқта мебурад), он гоҳ решаи муодилаи $f(x)=0$ нуқтаи дохилии порчаи $[a; b]$ мебошад (ниг. ба расми 61).



Расми 60



Расми 61

Ҳамин тариқ, агар $f(a)\cdot f(b)<0$ бошад, он гоҳ муодилаи $f(x)=0$ дар порчаи $[a; b]$ реша дорад.

Барои тасдиқи гуфтаҳои боло муодилаи $x^5+x^2-5x+2=0$-ро мегирем. Маълум, ки яке аз решаҳои муодила ба порчаи [1; 2] тааллуқ дорад, чунки қимати функсияи $f(x)=x^5+x^2-5x+2$ дар нуғҳои он $f(1)=-1<0$ ва $f(2)=28>0$ мешавад. Порчаи [1; 2]-ро бо ёрии нуқтаҳои 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0; ба 10 ҳиссаи баробар тақсим карда дар онҳо қиматҳои функсияро пай дар пай то даме ҳисоб мекунем, ки порчаи дарозӣаш 0,1-ро ёбему дар нӯгҳояш функсия қиматҳои аломаташон гуногун қабул кунад. Ин порча порчаи [1,2; 1,3] аст, чунки $f(1,2)=-0,8<0$, $f(1,3)=0,87>0$.

Ҳамин тариқ, дар қадами дуюми амалиёт ба хулоса меоем, ки решаи муодила ба порчаи [1,2; 1,3] тааллуқ дорад. Бо мақсади саҳеҳтар ҳисоб кардани решаи муодила порчаи охиринро ба 10 қисми баробар (бо саҳеҳии 0,01) аз рӯи нуқтаҳои 1,20; 1,21; 1,22; 1,23; 1,24; 1,25; 1,26; 1,27; 1,28; 1,29; 1,30 тақсим карда мебинем, ки $f(1,21)=-0,1<0$ ва $f(1,22)=0,08>0$ мешавад. Ин қиматҳоро ба инобат гирифта ба хулосаи зерин меоем: **решаи муодила дар байни ададҳои 1,21 ва 1,22 ҷойгир аст.** Ададҳои 1,21 ё 1,22-ро ба сифати қимати тақрибии решаи саҳеҳиаш то 0,01 гирифтан мумкин аст. Бо ҳамин тарз қимати тақрибии решаи муодиларо то саҳеҳии 0,001, 0,0001 ва ҳоказо ҳисоб кардан мумкин аст.

Ниҳоят қайд мекунем, ки аз рӯи решаҳои маълум худи муодиларо барқарор кардан мумкин аст (барои муодилаи квадратӣ ин гуна барқароркуниро дар синфи 8 омӯхта будем). Масалан, агар $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$ бошад, он гоҳ ифодаи $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ қисми чапи муодилаи матлуби $f(x)=0$-ро ташкил медиҳад. Дар муодилаи $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=0$ қавсҳоро кушода ҳосил мекунем:

$$x^4-14x^3+71x^2-154x+120=0.$$

? 1. Оиди муодилаҳои бутуни якномаълума чӣ гуна маълумотҳо доред? 2. Дискриминанти муодилаи квадратӣ гуфта чиро дар назар доранд? Вобаста ба D муодила чанд реша доштанаш мумкин аст? 3. Муодилаи якномаълумаи дараҷаи сеюм, чорум ва n–ум чандто реша дошта метавонад? 4. Муодилаҳои бутунро ($f(x)=0$, $f(x)$–бисёраъзогии тартиби n, $n\geq 3$) баъзан бо кадом тарзҳо ҳал кардан мумкин аст? 5. Оё аз рӯи решаҳои маълум худи муодилаи бутуни $f(x)=0$-ро тартиб додан мумкин аст? Мисолҳо оред.

171. Муодилаи зеринро ҳал кунед:

а) $2x+3=0$;

б) $\frac{x}{4}+\frac{3x}{8}=5$;

в) $2{,}1y^2=0$;

г) $\frac{2-y}{3}+\frac{1+3y}{6}=1\frac{1}{6}$;

д) $(x-1)(x-5)=2(x-1)$;

е) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$;

ж) $x(x+3)+a(a-3)=2(ax-1)$;

з) $(1+ax)\cdot x=(1-x)a^2+a+1\cdot$

172. Муодиларо ҳал кунед:

а) $2x\cdot(8x-13)-(4x-1)^2=35$;

б) $(18x-1)(1+18x)-8=0$;

в) $\frac{y^3}{2}=0{,}5(y^2+y)(y-3)+y+5$;

г) $4x^2\cdot(x^2-1)-(4x^4-1)=-3$.

173. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\left(1-\frac{x}{6}\right)(x+6)-x=6+\frac{x\cdot(x-11)}{6}$;

б) $36x^2-84x+73=(12x-11)(3x+1)$;

в) $5\cdot(2-3x)+39=11(3-x)$;

г) $2\cdot(x+1)^2+3(x-5)=(1-x)(1+x)+96$

д) $x\cdot(x^2-2x+1)+x(3-x)=7\cdot(1-x)+2$

е) $(x^3-1)^2=x^6-15$.

174. Барои кадом қиматҳои бутуни b решаи муодилаи:

а) $bx+24=0$;

б) $-\frac{bx}{3}+7=0$ –адади бутун мешавад?

175. Барои кадом қиматҳои p решаи муодилаи:

а) $3x+p=-13$ адади манфӣ;

б) $4x=4p-2{,}5$ адади мусбат аст?

176. Исбот кунед, ки муодилаи $9x^6+6x^4+x^2+12=0$ реша надорад.

177. Решаҳои муодиларо бо ёрии ба зарбкунандаҳо ҷудокунӣ ёбед:

а) $4x^3-8x^2-x+2=0$;

б) $3x^4-10x^3+12x^2-6x+1=0$.

178. Барои кадом қиматҳои m муодила ду реша дорад:

а) $3x^2-12x+3m=0$;

б) $3x^2-8x+m+6=0$;

в) $9x^2-3x+m=0$;

г) $x^2+mx+4=0$;

д) $x^2+5x+6m=0$

е) $x^2+3x+0{,}5m=0$;

ж) $4x^2-x-m=0$;

з) $mx^2+6x-5=0$.

179. Барои кадом қиматҳои k муодила як реша дорад:

а) $4x^2-3x+2k=0$;
б) $kx^2-x+1=0$;
в) $x^2-kx+20=0$;
г) $4x^2+kx+4=0$;
д) $x^2+2\cdot(k-4)\cdot x+k^2+6k=0$;
е) $(2+k)x^2+4kx+4k+1=0$;
ж) $x^2+2\cdot(k-4)\cdot x+k^2-4k+3=0$;
з) $(k-2)x^2+(k-5)x-5=0$.

180. Барои кадом қиматҳои t муодила реша надорад:

а) $3x^2-5tx+12=0$;
б) $16x^2-tx+9=0$;
в) $x^2-0{,}5tx+9=0$;
г) $6x^2+tx+36=0$;
д) $x^2-2tx+1=0$;
е) $3x^2-x-t=0$
ж) $8x^2-32x+2t=0$
з) $x^2-12x+3t=0$

181. Муодиларо ҳал кунед:

а) $6x^4-216x^2=0$;
б) $x^5+0{,}6x^3=0$;
в) $-2x^4=6x^2-7x^3$;
г) $10x^4-x^2-3x^3=0$;
д) $x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0$;
е) $x^3-2x^2-2x-3=0$;
ж) $x^4+x^3-24x^2-25x-25=0$;
з) $x^4+6x^3-x-6=0$.

182. Решаҳои муодилаи зеринро ёбед:

а) $7x^5-10x^4=0$;
б) $x^4-144x^3=0$;
в) $x^3-x^2=4x\cdot(x-1)$;
г) $(x-2)(x^2+6x)=24-12x$;
д) $x^3+2x^2+3x+6=0$;
е) $x^4+x^3+3x^2+2x+2=0$;
ж) $x^4=x^3+2x^2$;
з) $2t^5-8t^3=0$;
и) $3x^2-x^3+4x=0$;
к) $3t^4-81t=0$;
л) $y^3-144y=0$;
м) $x^3-0{,}01x=0$.

183. Аз рӯи решаҳои додашуда муодиларо тартиб диҳед:

а) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$;
б) $x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=3$;
в) $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=3,\ x_4=0$;
в) $x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=3,\ x_4=4$.

184. Муодилаи $x^3+2x-5=0$-ро бо тарзи графикӣ бо саҳеҳии то 0,01 ҳал кунед.

Машқҳо барои такрор

185. Решаҳои муодилаи $2x^2+5x-3=0$-ро наёфта, қимати ифодаҳои а) $x_1+x_2+x_1\cdot x_2$; б) $x_1^2+x_2^2$ ва в) $x_1^3+x_2^3$-ро ҳисоб кунед.

186. Калонтарин тақсимкунандаи умумии ададҳои 126, 540 ва 630-ро ёбед.

187. Исбот кунед, ки қимати ифодаи 25^7+5^{13} ба 30 тақсим мешавад.

188. Қимати касрҳоро ёбед:

а) $\dfrac{38^2-17^2}{72^2-16^2}$; б) $\dfrac{39{,}5^2-3{,}5^2}{57{,}5^2-14{,}5^2}$; в) $\dfrac{856^2-44^2}{406}$.

189. Ифодаи зеринро бе нишонаи қимати мутлақ нависед:

а) $3\cdot|x+2|$; б) $|x+2|-x$; в) $|x^2-x|$.

190. Тарафҳои секунҷаи периметраш ба 30 см баробар мувофиқан ба ададҳои 5,7 ва 8 мутаносибанд. Тарафҳоро ёбед.

191. Амонатбонк ҳар сол пулҳои гузоштаи мизоҷонро ду фоиз зиёд мекунад. Агар миқдори пули гузоштаи яке аз мизоҷон 15000 сомонӣ бошад, он гоҳ он баъди ду сол чӣ қадар мешавад?

192. Тракторчӣ мебоист дар муддати муайяни вақт 80 га заминро шудгор мекард. Ӯ ҳар рӯз аз нақша ду га зиёдтар заминро шудгор намуда, супоришро ду рӯз пеш аз мӯҳлат иҷро кард. Тракторчӣ супоришро дар чанд рӯз иҷро намудааст?

193. Графики функсияи

а) $y=2x^2-x+1$; б) $y=-9x^2$

сохта шавад.

194. Нобаробариҳои зеринро ҳал кунед:

а) $\frac{x}{6}-\frac{x}{7}\leq 1$; б) $\frac{x-4}{(x-1)(x-2)}>0$.

14. Муодилаҳое, ки ба муодилаи квадратӣ оварда мешаванд

Муодилаи

$$[p\cdot f(x)+q]\cdot[m\cdot f(x)+n]=s \qquad (1)$$

-ро дида мебароем, ки дар он p, q, m, n ва s ададҳои ҳақиқӣ ва $p\neq 0$, $m\neq 0$ мебошанд. Инчунин фарз мекунем, ки $f(x)$ - бисёраъзогии дараҷаи ду аст. Агар барои ҳалли муодила амалиётро аз кушодани қавсҳо сар кунем, он гоҳ ҳатман ба муодилаи тартиби 4 меоем, ки аксаран ҳаллаш ба мушкилиҳо меорад. Бо тағйирёбандаи нави y иваз намудани $f(x)$ бошад ёфтани ҳалли (1)-ро хеле осон мегардонад, чунки муодила нисбати $y=f(x)$ ба муодилаи квадратии намудаш $(py+q)(my+n)=s$ мубаддал мегардад.

Инро дар ҳалли мисоли мушаххаси

$$(x^2-3x+4)(x^2-3x+6)=8 \qquad (2)$$

муоина мекунем. Дар ин ҷо ба ҷои $f(x)$ ифодаи x^2-3x омадааст. Агар ҳамаи аъзоҳои муодиларо ба қисми чап гузаронида, ифодаи ҳосилшударо ба бисёраъзогии намудаш стандартӣ табдил додан хоҳем он гоҳ муодилаи

$$x^4-6x^3+19x^2-30x+16=0 \qquad (2')$$

-ро ҳосил мекунем, ки ҳаллаш хеле душвор аст. Вале гузориши $y=x^2-3x$* муодилаи(2)-ро ба $(y+4)(y+6)=8$ ва баъди соддакунӣ ба $y^2+10y+16=0$ меорад.

Муодилаи квадратии ҳосилшударо ҳал мекунем:

$$y_{1,2}=\frac{-10}{2}\pm\sqrt{5^2-16}=-5\pm\sqrt{25-16}=-5\pm\sqrt{9}=-5\pm 3; \quad y_1=-2; \quad y_2=-8.$$

Қимати ёфтаамонро дар баробарии $y=x^2-3x$ гузошта муодилаҳои $x^2-3x+2=0$ ва $x^2-3x+8=0$-ро ҳосил мекунем. Муодилаи $x^2-3x+8=0$ реша надорад, чунки $D=-23<0$ аст. Муодилаи $x^2-3x+2=0$ бошад ду решаи гуногуни $x_1=1$ ва $x_2=2$ дорад.

---

* Гузориши $x^2-3x+4=t$ низ татбиқшаванда аст.

Аз ин ҷо ҳосил мекунем, ки муодилаи (2) ҳам ду реша доштааст: $x_1=1$, $x_2=2$.

Муодилаи (1) бо осонӣ ба шакли

$$a \cdot [f(x)]^2+b\cdot f(x)+c=0 \tag{3}$$

оварда мешавад ($a=mp$, $b=np+qm$, $c=nq-s$), ки он нисбати $f(x)$ муодилаи квадратӣ мебошад. Масалан, агар $f(x)=x^2-x$, $a=1$, $b=-3$ ва $c=2$ бошад, он гоҳ муодилаи

$$(x^2-x)^2-3(x^2-x)+2=0 \tag{4}$$

-ро ҳосил мекунем. Маълум, ки (4) нисбати x^2-x муодилаи квадратӣ аст ва гузориши $x^2-x=y$ онро ба муодилаи $y^2-3y+2=0$ меорад. Решаҳои ин муодила $y_1=1$ ва $y_2=2$ мебошанд. Ба тағйирёбандаи аввала баргашта муодилаҳои $x^2-x=1$ ва $x^2-x=2$-ро ҳал мекунем. Онҳо мувофиқан дорои решаҳои $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ва $x_1=2, x_2=-1$ ҳастанд. Аз ин ҷо ҳосил мекунем, ки муодилаи (4) чорто решаҳои $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_3=2$, $x_4=-1$-ро дорад.

Э з о ҳ. Агар дар муодилаи (3) $f(x)=x^2$ бошад, он гоҳ муодилаи дараҷаи чоруми намудаш $ax^4+bx+c=0$ ҳосил мешавад. Ин намуд муодилаҳо, ки нисбат ба x^2 муодилаи квадратианд ва мо онҳоро дар синфи 8 муоина карда будем, **муодилаи биквадратӣ** номида мешаванд. Масалан, муодилаи

$$7x^4-9x^2+2=0 \tag{5}$$

муодилаи биквадратӣ мебошад. Онро ҳал мекунем. Барои ин x^2-ро бо y ишорат карда муодилаи квадратии $7y^2-9y+2=0$-ро ҳосил мекунем, ки $y_1=1$ ва $y_2=\dfrac{2}{7}$ решаҳояш мебошанд. Аз муодилаҳои $x^2=1$ ва $x^2=\dfrac{2}{7}$ мувофиқан $x_1=1$, $x_2=-1$ ва $x_3=\sqrt{\dfrac{2}{7}}$; $x_4=-\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ -ро меёбем, ки онҳо муодилаи (5)-ро қаноат менамоянд. Баъзан бо ёрии ба зарбкунандаҳо ҷудокунии ифодаҳои қисми чап муодилаҳои намуди (2') ё (5)-ро ба муодилаҳои хаттию квадратӣ овардан мумкин аст. Масалан, қисми чапи муодилаи

$$3x^4-8x^2+5=0,$$

-ро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:

$$3x^4-8x^2+5=3\left(x^4-\frac{8}{3}x^2+\frac{5}{3}\right)=3\left[\left(x^4-2\cdot\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{9}\right)+\frac{5}{3}-\frac{16}{9}\right]=$$

$$3\left[\left(x^2-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right]=3\left[\left(x^2-\frac{4}{3}\right)-\frac{1}{3}\right]\left[\left(x^2-\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{3}\right]=$$

$$3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)(x^2-1)=3(x-1)(x+1)\left(x^2-\frac{5}{3}\right).$$

Муодилаи аввала ба муодилаҳои $3x^2-5=0$, $x\pm1=0$ оварда шуд. Инак, $x=\pm1$ ва $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ решаҳои муодилаанд.

? 1. Муодилаи (1)-ро навишта онро шарҳ диҳед. Дар мисолҳои мушаххас нишон диҳед, ки онро ба муодилаи квадратӣ овардан мумкин аст. 2. Аз муодилаи (1) муодилаи (3)-ро ҳосил кунед. 3. Кадом намуди муодилаҳоро муодилаи биквадратӣ меноманд? Мисолҳо оред. 4. Тарзи ҳалли муодилаҳои биквадратиро схематикӣ баён кунед.

195. Тағйирёбандаи навро дохил намуда, муодилаи зеринро ҳал кунед:

а) $(x^2-4x+1)\cdot(x^2-4x+8)+12=0$;
б) $(x^2+2x)(x^2+2x-3)=-2$;
в) $(x^2-8)+4(x^2-8)-5=0$;
г) $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)-9=0$;
д) $(x^2+x)^2-5(x^2+x)-84=0$;
е) $24x^2+25=(2x^2+3)^2$;
ж) $x\cdot(x-2)+1{,}5=0{,}5\cdot(x^2-2x)^2$;
з) $(x^2+x)^2+x(x+1)=42$;
и) $(2x^2+x)^2-5x\cdot(2x+1)+6=0$;
к) $11x^2+5=(x^2+3)^2$.

196. Муодилаи биквадратиро ҳал кунед:

а) $x^4-5x^2+6=0$;
б) $y^4-3y^2+2=0$;
в) $x^4+8x^2+20=0$;
г) $2x^4-11x^2+12=0$;
д) $6x^4-5x^2+1=0$;
е) $12y^4-25y^2+12=0$;
ж) $x^4-20x^2+64=0$;
з) $x^4-13x^2+36=0$;
и) $x^4-41x^2+400=0$;
к) $y^4+24y^2+148=0$;
н) $x^4-8x^2+16=0$;
м) $t^4-10t^2+9=0$;
н) $2x^4-13x^2+20=0$;
о) $5y^4-15y^2+42=0$;
п) $x^4-4x^2+1=0$;
р) $x^4-2x^2+1=0$.

197. Координатаҳои нуқтаҳои буриши тири абсиссаро бо графики функсия ёбед:

а) $y=2x^4-9x^2+4$;
б) $y=3x^4-7x^2+4$;
в) $y=4x^4-37x^2+9$;
г) $y=x^4-27x^2+50$;
д) $y=4x^4-9x^2+5$;
е) $y=7x^4+6x^2-13$.
ж) $y=x^4-11x^2+10$;
з) $y=3x^4+16x^2-19$;

198. Оё адади $-\sqrt{5}$ решаи муодилаи $t^4-10t^2+25=0$ шуда метавонад?

199. Адади 0,5 решаи муодилаи биквадратии $16x^4-8x^2+1=0$ мешавад ё не?

200. Барои кадом қиматҳои k муодила:

а) $3x^4-4x^2+1\frac{1}{3}k=0$;
б) $kx^4-6x^2+9=0$ чор реша дорад?

201. Барои кадом қимати k муодила:

а) $x^4-3kx^2+4=0$;
б) $kx^4-5x^2-36=0$ ду реша дорад.

202. Барои кадом қимати k муодила:

а) $5x^4+3x^2-4{,}5k=0$;
б) $6x^4+kx^2+6=0$ реша надорад?

203. Муодиларо бо тарзи ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан ҳал кунед.
а) $9x^4-7x^2-2=0$; в) $16x^4-8x^2+1=0$;
б) $13x^4-10x^2-32=0$; г) $7x^4-2x^2-9=0$.

204. Муодиларо ҳал кунед:
а) $(x^2-4)(x^2+4)-2(x^2-11)=0$; в) $6x^5+6x^4-x^3-x^2+5x+5=0$;
б) $2x^2\cdot(x-1)(x+1)-3x^2-12=0$; г) $2x^5-2x^4-x^3+x^2-3x+3=0$.

Машқҳо барои такрор

205. Нобаробариро ҳал кунед:
а) $|2x-5|<1$; в) $|2-x|<4$; д) $x^2-2x-3\geq 0$;
б) $|x-4|\leq 3$; г) $\dfrac{2-x}{(x-1)(x+3)}<0$; е) $9x^2-16\leq 0$.

206. Ҳисоб кунед:
$$\frac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{1{,}2:0{,}375-0{,}2}\cdot\left(6\frac{4}{5}:15\frac{2}{5}+0{,}8\right).$$

207. Исбот кунед, ки барои ҳар гуна адади натуралии k қимати ифодаи $(3k+1)^2-(3k-1)^2$ ба 12 тақсим мешавад.

208. Қасрҳоро содда кунед:
а) $\dfrac{(x+2)^3}{x^2+4x+4}$; б) $\dfrac{x^2-16}{3x-12}$; в) $\dfrac{3-3x}{x^2-2x+1}$; г) $\dfrac{x^3-8}{x^2+2x+4}$.

209. Фарқи квадратҳои ду адади пай дар паи натуралӣ ба -11 баробар аст. Ададҳоро ёбед.

210. Масофаи байни ду шаҳр 420 км аст. Ду автомобил, ки суръатҳояшон 10 км/соат фарқ мекунад, аз як шаҳр баромада ба самти шаҳри дигар равон гаштанд. Автомобили якум назар ба автомобили дуюм 1 соат пештар омада расид. Суръати ҳар як автомобилро ёбед.

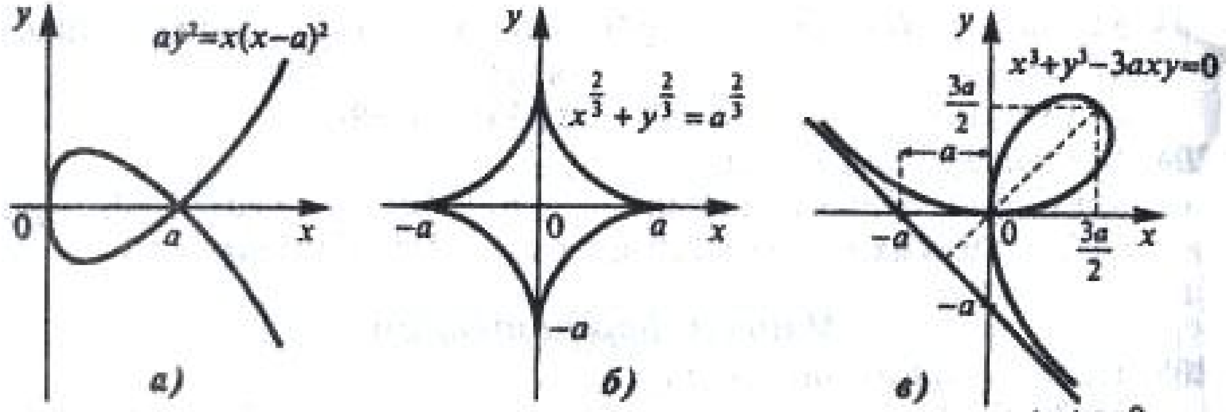
211. Оё ифодаҳои зерин бутунанд:
а) $\dfrac{3x^2+18}{3}+7xy$; б) $\dfrac{4x-8}{y}+\dfrac{y^2}{2}$?

§6. СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ДУНОМАЪЛУМА

15. Муодилаи дуномаълума ва графики он

Ҳар гуна муодилаи дорои ду номаълумро дар шакли
$$F(x,\ y)=0$$
навиштан мумкин аст. Масалан, барои муодилаи $y=ax^2+bx+c$ $F(x,\ y)=$ $=ax^2+bx+c$ ва барои муодилаи $x^2+y^2=9$ $F(x,\ y)=x^2+y^2-9$ мебошад.

Баробариҳои $ax+by=c$, $x\cdot y=1$, $4x^3y+y^5=0$, $(x^2+y^2)^2-a^2x^2-b^2y^2=0$ низ муодилаҳои дуномаълумдор ҳастанд. Маҷмӯи нуқтаҳои ҳамвории координатавӣ, ки муодилаи дуномаълумаро ба баробарии дуруст табдил медиҳад, **графики муодилаи дуномаълума** номида мешавад. Ин графикҳо гуногуншакланд. Дар ҳақиқат, графики



Расми 62

муодилаи $ax+bx=c$ - хати рост, графики $y=ax^2+bx+c$ - парабола (ниг. ба боби I), $x \cdot y=1$−гипербола мебошанд. Дар расми 62 графики баъзе муодилаҳо акс ёфтаанд.

Усули муайян кардани дараҷаи муодилаи бутуни дуномаълума ба усули муайян кардани дараҷаи муодилаҳои якномаълума монанд аст. Бигузор қисми чапи муодилаи дар боло номбурдаи дуномаълума бисёраъзогии намудаш стандартӣ ва тарафи росташ адади нул бошад. Дар ин ҳолат дараҷаи муодила ба дараҷаи ин бисёраъзогӣ баробар мешавад. Ҳамин тариқ, **дараҷаи муодилаи дуномаълума гуфта, дараҷаи муодилаи ба он баробарқувваеро меноманд, ки қисми чапаш бисёраъзогии намудаш стандартӣ ва қисми росташ нул аст.** Маълум, ки муодилаи $1+(x^3+y^3)^2=x^6-xy^2$ ба муодилаи $2x^3y+xy^2+y^2+1=0$ баробарқувва мебошад. Пас, муодилаи аввала муодилаи дараҷаи чор аст. Дараҷаи муодилаи $7x^8-12xy+y=7x^2(x^6+1)$ бошад ба ду баробар аст, чунки он ба муодилаи дараҷаи дуюми $-7x^2-12xy+y=0$ баробарқувва мебошад.

? 1. Якчанд мисолҳои муодилаҳои дуномаълумаро оред. 2. Графики муодилаи дуномаълума гуфта чиро меноманд? 3. Графики муодилаҳои $y=\frac{4}{x}$; $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$; $y=-2$ ва $y=3x^2-1$ дар ҳамвории координатавӣ кадом хатҳо мебошад? 4. Дар зери мафҳуми «дараҷаи муодилаи бутуни дуномаълума» чиро мефаҳмед? Мафҳумро бо мисолҳо шарҳ диҳед.

212. Аз муодилаҳои зерин кадомаш муодилаҳои дуномаълумаанд:

а) $x^2+y^3=3xy$; в) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$; д) $2x^2-y-1=0$;

б) $xyz+1=0$; г) $x \cdot y-3=0$; е) $x^y+z=1$?

213. Оё ҷуфти ададҳои $(1;-2)$ муодиларо қаноат менамояд:

а) $x^2-y^3-8=0$; в) $x^2+y^2=5$;

б) $xy+2y=-6$; г) $x^2-y^2+xy+6=0$?

214. Графики муодилаи дуномаълумаро созед:

а) $3x+y=4$; в) $x^2-5x+4-y=0$; д) $y^2=2ax(a>0)$;

б) $-2x+9y=4$; г) $xy-9=0$; е) $y-2x^3=0$.

215. Дарачаи муодилаи бутуни дуномаълумаро муайян кунед:

а) $9x-4y-102=0$; ж) $3(x^2+y^2)^3=xy^2$;

б) $3x-4y+13=0$; з) $(x+y^6)^2=y^{12}+x^3y$;

в) $x\cdot(1-y)-4y=0$; и) $3xy^2=(x^4+y^3)^3$;

г) $3x^2+y^2+8x=0$; к) $(x+y)^3=x^3+y^3$;

д) $(x^2-2y^2)^2+5y=9$; л) $x^3+y^3=2x^2y^2$;

е) $5x^5-6x^4y^2+x^3y^2=0$; м) $8x^8-17xy+3y=8x^2(x^6+1)$.

Машқҳо барои такрор

216. Қимати ифодаро ёбед:

$$\frac{\left[4-3{,}5\cdot\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right]\cdot\left(41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}\right)}{0{,}16\cdot\left(3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{4}\right)}$$

217. Номаълумро аз таносуби $0{,}3x:3\frac{1}{3}=6:1{,}5$ ёбед.

218. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $(x+3)^2-16$; в) $6x^2+24xy+24y^2$;

б) $4a^2-x^2+2xy-y^2$; г) x^6-2^6.

219. Агар 3%-и пули дар муомилот гузошташуда 15 000 000 сомониро ташкил диҳад, пас тамоми маблағ чанд сомониро ташкил медиҳад?

220. Масъалае тартиб диҳед, ки бо ёрии системаи муодилаҳои хаттии $x+y=6$ ва $x-y=2$ ҳал шавад.

221. Нобаробариҳои зеринро ҳал кунед:

а) $\frac{x^2-3x}{2x+1}<0$; б) $3x^2-x-2\geq0$.

222. Муодилаи
$$\frac{200}{x}-\frac{200}{x+2}=5$$
-ро ҳал кунед.

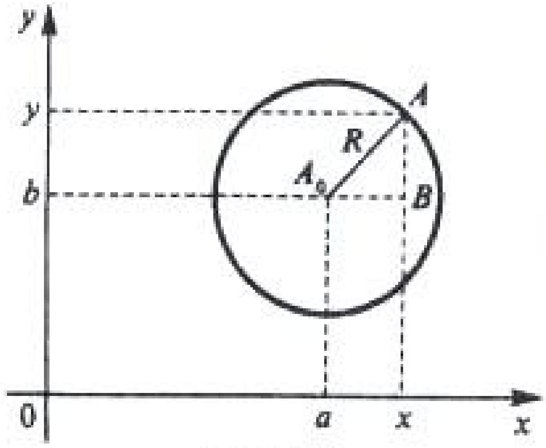
223. Барои кадом қиматҳои аргумент функсияи $f(x)$ ба нул мубаддал мегардад, қиматҳои мусбат ва манфӣ қабул мекунад, агар:

а) $f(x)=-3x+9$; б) $f(x)=5x+20$

бошад?

16. Муодилаи давра

Аз курси геометрия (синфи 7) мафҳуми давра ба мо маълум аст. Дар асоси он маълумотҳо давра **ҷои геометрии чунин нуқтаҳоеро ($A(x;\,y)$) дар ҳамворӣ ифода мекунад, ки онҳо аз ягон нуқтаи ба қайд гирифташудаи ҳамворӣ ($A_0(a;\,b)$) дар як хел масофа ҷойгиранд.** Нуқтаи $A_0(a;\,b)$ маркази давра ва масофаи A_0A-ро радиуси (R)



Расми 63

давра меноманд. Нишон медихем, ки муодилаи дуномаълумае вуҷуд дорад, ки давра графики он мебошад.

Фарз мекунем, ки давраи марказаш нуқтаи $A_0(a;\ b)$-и ҳамворӣ ва радиусаш ба R баробар дода шудааст. Барои тартиб додани муодилаи ин давра аз формулаи масофаи байни ду нуқтаи ҳамворӣ ва теоремаи Пифагор истифода мекунем.

Бигузор $A(x;\ y)$ нуқтаи дилхоҳи давра ва $A_0(a;\ b)$ маркази он бошад. Азбаски $A_0A=R$, $A_0B=x-a$ ва $AB=y-b$ аст (ниг. ба расми 63), пас квадрати масофа аз нуқтаи А то нуқтаи A_0 ба $(A_0B)^2+(AB)^2$ баробар мешавад. Аз ин ҷо формулаи матлуби давраро дар шакли

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

ҳосил мекунем. Координатаҳои $(x,\ y)$-и ҳар як нуқтаи A-и давра муодилаи (1)-ро қаноат менамояд ва баръакс ҳар як нуқтаи дилхоҳи A-и ҳамворӣ, ки координатаҳояш муодилаи (1)-ро қаноат мекунад, ба давра тааллуқ дорад (чунки масофа аз он то нуқтаи A_0 ба R баробар аст.)

Ҳангоми A_0 (0; 0) будан (яъне агар маркази давра дар ибтидои системаи координатаҳо воқеъ бошад) муодилаи давра намуди

$$x^2+y^2= R^2 \qquad (2)$$

-ро мегирад.

Масалан, бо осонӣ боварӣ ҳосил намудан мумкин аст, ки муодилаи дуномаълумаи $(x-1)^2+(y+4)^2=9$ муодилаи давраест, ки марказаш дар нуқтаи (1; −4) буда, радиусаш ба 3 баробар аст.

Мувофиқан муодилаи $x^2+y^2+2x=0$ низ муодилаи давра мешавад. Дар ҳақиқат, бо ёрии табдилдиҳиҳои $0=x^2+y^2+2x=(x^2+2x)+y^2=(x^2+$ $+2x+1)+y^2-1$ онро ба намуди $(x+1)^2+(y-0)^2=1$ оварда ва бо (1) муқоиса карда, ҳосил мекунем, ки он муодилаи давраи радиусаш ба 1 ва марказаш дар нуқтаи (−1; 0) ҷойгирбуда мебошад.

?

1. Формулаи масофаи байни ду нуқтаи ҳамвории координатавиро нависед. **2.** Теоремаи Пифагорро баён кунед. **3.** Давра чист? **4.** Муодилаи давраи радиусаш R ва марказаш дар нуқтаи $A_0(a;\ b)$ будаРО нависед. Агар маркази давра дар нуқтаи (0; 0) ҷой гирифта бошад, он гоҳ муодилааш чӣ гуна мешавад? **5.** Оё муодилаҳои (1) ва (2)-ро муодилаҳои дуномаълума номидан мумкин аст?

224. Аз рӯи муодилаи додашуда координатаҳои маркази давра ва радиуси онро муайян кунед:

а) $(x-2)^2+(y-5)^2=4$; д) $\left(x-1\frac{7}{9}\right)^2+\left(y-\frac{25}{4}\right)^2=169$;

б) $(x+3)^2+(y-1)^2=l$; е) $(x-9)^2+(y-16)^2=69\frac{4}{9}$;

в) $(x-11)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$; ж) $(x+1,44)^2+(y+0,2)^2=0,09$;

г) $(x+5)^2+(y-1,1)^2=1,21$; з) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{144}$.

225. Муодилаи дуномаълума, ки муодилаи давра мебошад, ба намуди (1) ё (2) оварда, барояш координатаҳои нуқтаи марказ ва бузургии радиусро ёбед:

а) $x^2+y^2-3x=0$; г) $x^2+y^2-2x+2y=0$; ж) $x^2+y^2=2x-8y+8$;

б) $x^2+y^2+4y=0$; д) $x^2+y^2+x+4y=0$; з) $x^2+y^2=6x+4y+3$.

в) $x^2+y^2-x=0$; е) $x^2+y^2-4x+y=\frac{1}{4}$;

226. Аз рӯи координатаҳои додашудаи нуқтаи $A_0(a; b)$ ва радиуси давра R муодилаашро тартиб дода, графикашро созед:

а) $A_0(0; 0)$, $R=3$; б) $A_0(-3; 5)$, $R=2$; д) $A_0(5; -2)$, $R=4$;

б) $A_0(2; 3)$, $R=11$; г) $A_0(-2; -4)$, $R=1$; е) $A_0(0; -1)$, $R=5$.

227. Координатаҳои марказ $A_0(a; b)$ ва бузургии радиус R-ро аз муодилаи давра ёфта, дар ҷавоб $a+b+R$-ро нависед:

а) $x^2+y^2=16$; г) $x^2+y^2-4x+4y=17$;

б) $x^2+y^2-6x=7$; д) $x^2+y^2+4x-4y=1$;

в) $x^2+y^2-2x+8y-8=0$; е) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$.

228. Аз нуқтаҳои (1; 3), (4; 3), (−3; 2), (7; 1) кадомашон ба давраи муодилааш $x^2+y^2=25$ буда, тааллуқ доранд?

229. Графики функсияи x^2+y^2-2x-0-ро сохта, нуқтаҳои:

а) абсиссааш $x=1$; б) ординатааш $y=0$-ро ёбед.

230. Оё графики а) $x^2+y^2+4x+1=0$ тири Oy-ро; б) $x^2+y^2-6y+4=0$ тири Ox-ро мебурад?

Машқҳо барои такрор

231. Қимати ифодаи $5a^2b^3+4(a-b)$-ро ҳангоми $a=-0,5$ ва $b=-1$ будан ҳисоб кунед.

232. Ададеро ёбед, ки а) 40% ба 12; б) 1,25% ба 55; в) 0,8% ба 184 баробар бошад.

233. Содда кунед:

а) $\dfrac{a^2}{ax-x^2}+\dfrac{x}{x-a}$; б) $\dfrac{x^2-4xy}{2y^2-xy}-\dfrac{4y}{x-2y}$;

234. Системаи муодилаҳои хаттии зеринро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}2x-3y=21,\\2y=-10;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+y=14,\\y-x=10;\end{cases}$ в) $\begin{cases}-x+2y=-7,\\5x-y=-28.\end{cases}$

235. Махраҷи каср аз сураташ 4 воҳид зиёдтар аст. Агар ба он касри чаппаашро ҷамъ кунем, он гоҳ $2\dfrac{16}{21}$-ро ҳосил мекунем. Касрро ёбед.

236. Масофаи байни стансияҳои Душанбе ва Турсунзода 96 км аст. Як қатора назар ба дигараш ин масофаро 40 дақиқа пештар тай намуд. Суръати ҳаракати қаторои якум назар ба дуюм 12 км/соат зиёдтар аст. Суръати ҳаракати қатораҳоро ёбед.

237. $f(x)=-7x+8$. Қимати x-ро ёбед, ки дар он

а) $f(x)=-6$; б) $f(x)=15$; в) $f(x)=0$.

бошад.

238. Нишон диҳед, ки функсияи $f(x)=-2x^3$ дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ камшаванда аст.

17. Тарзи графикии ҳалли системаи муодилаҳо

Пеш аз баёни мақсади асосӣ баъзе маълумотҳои ёрирасонро нисбати системаҳои ду муодилаи хаттии дуномаълума,

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

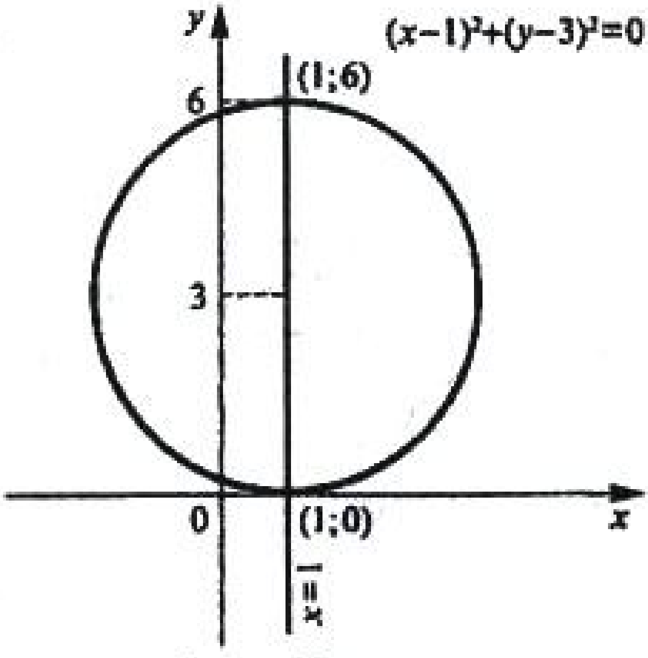
ки дар синфи 7–ум омӯхта будем, ба хотир меорем. **Ҳалли** чунин **система** гуфта ҷуфти қиматҳои $(x;y)$-еро меноманд, ки ҳар як муодилаи системаро қаноат менамояд. **Ҳал кардани системаи муодилаҳо** ин ёфтани **ҳамаи ҳалҳои система** мебошад. Системаро **ҳамҷоя** меноманд, агар **ақалан як реша** дошта бошад ва **ғайриҳамҷоя** меноманд, агар ягонто **ҳал надошта бошад** (ба ибораи дигар ҳалҳои система **маҷмӯи холиро** ташкил медиҳад). **Системаи муодилаҳои ҳалҳояшон якхеларо системаҳои баробаркувва меноманд.**

Қайд мекунем, ки системаи муодилаҳои хаттиро дар синфи 7 бо тарзҳои гузориш, ҷамъкунии алгебравӣ ва графикӣ ҳал карда будем. Дар ин параграф бо системаҳои иборат аз ду муодилаҳои дараҷаи дуюм ё системаҳои аз як муодилаи дараҷаи якум ва як муодилаи дараҷаи дуюм ташкил ёфта машғул шуда, онҳоро бо тарзи графикӣ ҳал мекунем.

М и с о л и 1. Системаи

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=9,\\ x-1=0\end{cases}$$

-ро дида мебароем. Маълум, ки графики муодилаи $(x-1)^2+(y-3)^2=9$ давраи марказаш нуқтаи (1; 3) ва радиусаш ба 3 баробар буда аст. Графики муодилаи $x-1=0$ - хати ростест, ки он аз нуқтаи $x=1$-и тири абсисса гузашта ба тири ордината параллел мебошад. Онҳоро дар як ҳамвории координатавӣ месозем (расми 64, *а*).



Расми 64, *а*

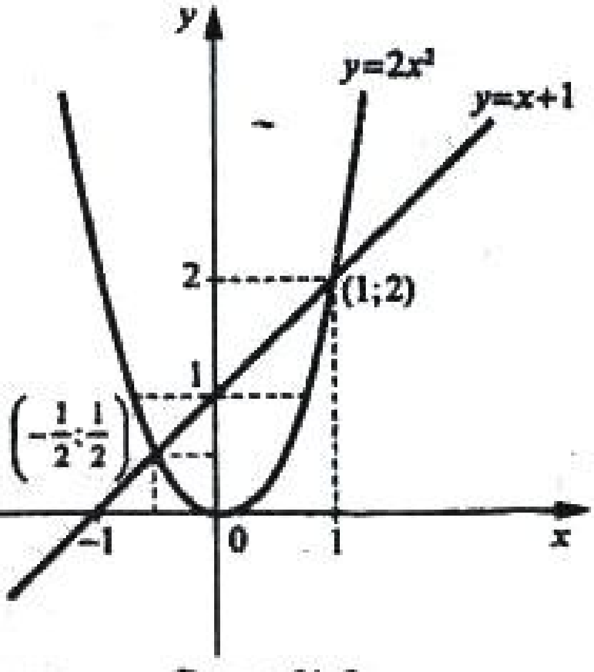
Аз графикҳо намоён аст, ки онҳо ду нуқтаи умумии (1; 0) ва (1; 6) доранд, яъне қиматҳои $x_1=1$, $y_1=0$ ва $x_2=1$, $y_2=6$ муодилаҳои системаро ба баробариҳои дуруст табдил дода (яъне онҳоро қаноат менамоянд), ҳалли системаро ташкил медиҳанд.

М и с о л и 2. Бо тарзи графикӣ системаи

$$\begin{cases}2x^2-y=0\\ y-x-1=0\end{cases}$$

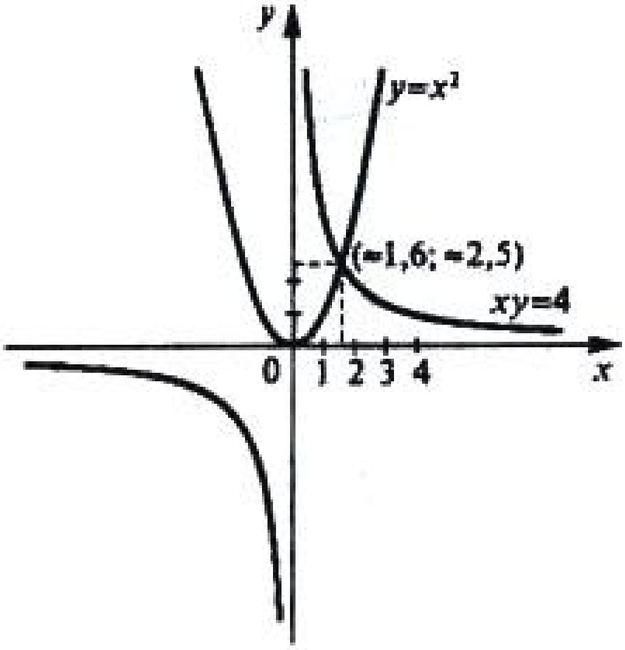
-ро ҳал мекунем. Дар ҳамвории координатавӣ графики функсияи $y=2x^2$ (параболаи қуллаҳояш дар нуқтаи (0; 0) ҷойгир шуда) ва функсияи $y=x+1$ (хати рости тирҳои системаи координатаҳоро дар нуқтаҳои (−1; 0) ва (0; 1) буранда)-ро месозем (расми 64,б).

Координатаҳои нуқтаи дилхоҳи параболаи сохташуда ҳалли муодилаи $y-2x^2=0$ ва координатаҳои нуқтаи дилхоҳи хати рост ҳалли муодилаи $y-x-1=0$-ро ташкил медиҳанд. Азбаски координатаҳои нуқтаҳои (1; 2) ва $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ ки буриши параболаю хати рост мебошанд, муодилаҳои системаро қаноат менамоянд, пас онҳо ҳалли система мешаванд.



Расми 64, *б*

Ҷ а в о б: $x_1=1$; $y_1=2$; $x_2=-\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{1}{2}$.



Расми 64, *в*

Мисоли 3. Ниҳоят системаи $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ xy - 4 = 0, (x \neq 0) \end{cases}$ -ро дида мебароем.

Бо мақсади ёфтани ҳалли система дар як ҳамвории координатавӣ графики функсияҳои $y=x^2$ (парабола) ва $y=\frac{4}{x}$ (гипербола)-ро месозем (ниг. ба расми 64, в).

Нуқтаи буриши ин ду хати каҷ ҳалли ягонаи система мебошад. Аз расм намоён аст, ки $x\approx1,6$ ва $y\approx2,5$ мешавад. Бо ибораи дигар ҳалли тақрибии системаро ташкил медиҳад.

? **1.** Системаи муодилаҳои хаттии дуномаълумаро бо кадом тарз ҳал мекунанд? **2.** Дар кадом ҳолат система ҳамҷоя номида мешавад? **3.** Чӣ гуна системаҳоро баробарқувва меноманд? **4.** Аз нуқтаи назари геометрӣ маънидод кунед: системаи ду муодилаи хаттӣ: а) ҳалли ягона дорад; б) ҳалли бешумор дорад; в) ҳал надорад.

239. Системаи муодилаҳоро бо тарзи графикӣ ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x \cdot y = 8; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 2 = 0; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + y^2 = 11, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ y = x^2 - 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x^2, \\ 2x - y + 5 = 0; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x \cdot y = -12, \\ x - y = 7; \end{cases}$ л) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9, \\ y - x^2 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y - x^2 = 3, \\ x + y = 5; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x + y = -8, \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0; \end{cases}$ м) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 2 \cdot |x|. \end{cases}$

240. Ду ҳал доштани системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 9, \\ y = x^2 - 6; \end{cases}$$

-ро бо тарзи графикӣ нишон диҳед.

241. Қимати ифодаи a^2-3a+6-ро ҳангоми $a=-\frac{1}{3}$ будан ҳисоб кунед.

242. Оё таносуби зерин дуруст аст:

$$3,75 : 10,4=3\frac{11}{13}:10\frac{2}{3}\ ?$$

243. Нишон диҳед, ки барои ҳар гуна адади натуралии k ифодаи $\dfrac{(8^{k+1}+8^k)^2}{4^k-4^{k-1}}$ ба 192 тақсим мешавад.

244. Муқоиса кунед: а) 45^2-31^2 ва 44^2-30^2-ро; б) $297 \cdot 299$ ва 298^2-ро; в) 26^3-24^3 ва $(26-24)^3$-ро; г) $(17+13)^3$ ва 17^3+13^3-ро.

245. Системаи муодилаҳои зеринро бо тарзи ҷамъкунии алгебравӣ ё гузориш ҳал кунед:

а) $\begin{cases}2x+7y=9,\\ y-2x=-1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+y=7,\\ 2x-y=3;\end{cases}$ в) $\begin{cases}5x-2y=6,\\ x-y=0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x+4y=21,\\ 2x-y=6.\end{cases}$

246. Қаиқ мебоист 34 км-ро дар муддати муайяни вақт шино мекард. Вале баъди 3 соати ҳаракат онро дар яке аз бандарҳои дохилӣ ба муддати 40 дақиқа боздоштанд. Барои он ки қаиқ дар вақти муайянгашта ба ҷои зарурӣ расад, суръати ҳаракаташро 2 км/соат зиёд намуд. Суръати аввалаи ҳаракати қаиқро ёбед.

247. Нишон диҳед, ки функсияи $y=0,1x^3+1$ дар тамоми тири ададӣ афзуншаванда аст.

248. Экстремали функсияи квадратиро ёбед;

а) $y=3x^2-7$; б) $y=x^2-4x$; в) $y=-3x^2+18x-11$.

249. Муодилаи биквадратиро ҳал кунед:

а) $x^4-7x^2+6=0$; б) $3x^4-5x^2+2=0$;.

250. Оё графики $2x^2+y^2+9x+9=0$ тири Oy-ро мебурад?

18. Ҳалли системаи муодилаҳои дараҷаи дуюм

Ба монанди пункти гузашта дар ин ҷо ҳам бо системаҳои: а) аз як муодилаи дараҷаи дуюм ва як муодилаи дараҷаи якуми дуномаълума; б) аз ду муодилаи дараҷаи дуюми дуномаълума таркиб ёфта машғул мешавем.

Ҳалли системаҳои намуди а)-ро бо *тарзи гузориш* ҳал мекунанд, ки он аз зинаҳои зерин иборат аст:

– аз муодилаи дараҷаи якуми система яке аз номаълумҳоро ба воситаи дигараш ифода мекунем (чуноне ки ҳангоми ёфтани ҳалли системаҳои хаттӣ дар синфи 7 амал карда будем);

– қисми рости ҳосилшударо ба муодилаи дигари система (ба муодилаи дараҷаи дуюм) гузошта муодилаи якномаълумаеро ҳосил мекунем:

– муодилаи дараҷаи дуюми ҳосилкардаамонро ҳал мекунем;

– решаҳои ҳосилкардаро ба муодилаи табдилёфтаи дараҷаи якум гузошта қимати мувофиқи тағйирёбандаи дуюмро меёбем.

Қайд менамоем, ки бо ин тарз системаҳои намуди а)-ро ҳамеша ҳал кардан мумкин аст.

М и с о л и 1. Системаи

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 4, \\ y - x = -2; \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Мувофиқи гуфтаҳои боло амал карда муодилаи дуюми системаро дар шакли ба аввала баробарқувваи $y=x-2$ менависем. Ин қимати y-ро ба муодилаи якум гузошта баъди иҷрои табдилоти лозимӣ муодилаи якномаълумаи $2x^2-2x-0$-ро ҳосил мекунем. Решаҳои ин муодила $x_1=0$ ва $x_2=1$ мебошад. Қиматҳои ёфтаи x_1 ва x_2–амонро алоҳида–алоҳида ба $y=x-2$ гузошта $y_1=-2$ ва $y_2=-1$-ро пайдо мекунем.

Ҷ а в о б: (0; −2), (1; −1).

М и с о л и 2. Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} x^2 + y = 14, \\ y - x = 8; \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Бо ин мақсад аз муодилаи дуюми система y-ро ба воситаи x ифода намуда (яъне $y=8+x$) қиматашро ба муодилаи якум мегузорем. Дар натиҷа нисбат ба x муодилаи квадратии $x^2+x-6=0$-ро ҳосил мекунем, ки он ба решаҳои $x_1=2$ ва $x_2=-3$ доро аст. Қиматҳои 2 ва −3-ро дар $y=x+8$ гузошта мувофиқан $y_1=10$ ва $y_1=5$-ро ҳосил мекунем.

Ҷ а в о б: (2; 10), (−3; 5).

Акнун фарз мекунем, ки системаҳои намуди б) дода шуда бошанд. Гарчанде ёфтани ҳалли чунин системаи ду муодилаи дараҷаи дуюми дуномаълума мушкил бошад ҳам, вале дар баъзе мавридҳо онҳоро бо ёрии тарзҳои гузориш, ҷамъкунии алгебравӣ ва дигар тарзҳои сунъӣ ҳал кардан мумкин аст.

М и с о л и 3. Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ 3x + y^2 = 10; \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Муодилаҳои системаро аъзо ба аъзо ҷамъ карда муодилаи квадратии $x^2+3x-18=0$-ро ҳосил мекунем, ки решаҳояш $x_1=3$ ва $x_2=-6$ аст. Қимати $x_1=3$-ро ба муодилаи $3x+y^2=10$ гузошта $y^2=1$ ва аз он $y=\pm1$-ро ҳосил мекунем. Гузориши қимати $x_2=-6$ бошад ба муодилаи $y^2=28$ меорад, ки аз он $y=\pm2\sqrt{7}$ -ро пайдо мекунем.

Инак, система чор ҳал дорад: (3; 1), (3;−1), $(-6; 2\sqrt{7})$, $(-6; 2\sqrt{7})$.

М и с о л и 4. Системаи

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3, \\ xy = 1; \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Аз муодилаи дуюм дида мешавад, ки $y=\frac{1}{x}$ аст. Дар муодилаи якум ба ҷои y ифодаи $\frac{1}{x}$ гузошта муодилаи биквадратии $x^4-3x^2+2=0$-ро ҳосил мекунем (ниг. ба п. 14, §5), ки ба решаҳои $x=\pm\sqrt{2}$ ва $x=\pm1$ соҳиб аст. Ин ададҳоро пай дар пай ба формулаи $y=\frac{1}{x}$ гузошта, қиматҳои мувофиқи y-ро дар намуди $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ва $y=\pm1$ меёбем. Ҳамин тариқ, чор ҳал доштани системаи мазкурро муқаррар кардем: $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$.

М и с о л и 5. Ҳалли системаи

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x - y = 4 \end{cases}$$

-ро меёбем.

Онро бо тарзи гузориш ҳал кардан мумкин аст. Вале намуди муодилаи якуми система имконият медиҳад, ки тарзи сунъиро пеш гирем. Муодилаи якумро ба шакли $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=24$ оварда аз он дар асоси муодилаи дуюм $x+y=6$-ро ҳосил мекунем. Дар натиҷа системаи муодилаҳои хаттии

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 4 \end{cases}$$

-и ба аввала баробарқувваро ҳосил мекунем. Ин системаи хаттиро бо тарзи ҷамъкунии алгебравӣ ҳал карда $x=5$, $y=1$-ро ҳосил мекунем.

Ҷ а в о б: (5; 1).

? 1. Намудҳои системаи муодилаҳои дуномаълумаро номбар кунед. 2. Зинаҳои тарзи гузориши ҳалро баён кунед. 3. Боз кадом тарзҳои ҳалли системаи муодилаҳои дараҷаи дуюми дуномаълумаро медонед?

251. Системаи муодилаҳоро бо тарзи гузориш ҳал кунед:

а) $\begin{cases} y^2 - 2x = -6, \\ x - y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2 - 3x = 45, \\ x + y = 3; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = a^2 - 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^2 + 2x = 33, \\ y - x = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y = -a, \\ xy = -2a^2; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 6, \\ 3y - x = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + 2y = 24, \\ y - 2x = 6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 - 2y = 19, \\ 4x + y = 7; \end{cases}$

252. Тарзи гузоришро истифода бурда, системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2 = 2y + 26, \\ 2y - 3x + 8 = 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y \cdot (2x+1) = 8,4, \\ x + 5y = 9; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x \cdot (y-1) = 6, \\ x = 3y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \cdot (1+y) = -4, \\ x + y = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 - 2y = 0, \\ 2y = x + 6; \end{cases}$ к) $\begin{cases} (5x - y) \cdot y = -6,25, \\ y = 5x + 2,5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y^2 + x + 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^2 = y^2 + 6, \\ 7y + 5x = 0; \end{cases}$ л) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ y + 6 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7x - y = 4, \\ y + xy = 6; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2(y - x) - 14 = y, \\ y + xy = -16; \end{cases}$ м) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 10, \\ -x + 2 = 0. \end{cases}$

253. Системаи муодилаҳоро бо тарзи ҷамъкунии алгебравӣ ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ y - x^2 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 228, \\ 3x^2 - 2y^2 = 172; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ -y^2 + x = -5. \end{cases}$

254. Системаи муодилаҳоро бо истифодаи тарзи ҷамъкунии алгебравӣ ҳал намоед:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x^2 - 2y^2 = 14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 3xy + 4y = 0, \\ x + 3xy - 3y = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x + xy = -18, \\ y - xy = 30; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy + x = 56, \\ y - xy = -42; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + 3x - 4y = 20, \\ -x^2 + 2x - y = 5. \end{cases}$

255. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8,5, \\ x + y + 1 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy = -8, \\ x + y^2 = 0; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} (x-1)(y+10) = 9, \\ x + y = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - y = 5, \\ x^2 \cdot y = 36; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + y = 13; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x^2 - y^2 + x + y = -11. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y^2 = 11, \\ x \cdot y^2 = 18; \end{cases}$ е) $\begin{cases} (x-2)(y+3) = 160, \\ x + y = -27; \end{cases}$

256. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{3} = 1, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - y = -3, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = -5\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{10}{3}, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 4y = -2, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{3}{x} = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{2x}{y} + \dfrac{x}{2y} = 5, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

257. Системаи муодилаҳои зеринро бо тарзи графикӣ ва гузориш (ва ё ҷамъкунии алгебравӣ) ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ y=x^2-10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y-x^2-1=0, \\ x+2y=5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ (x-2)^2+y^2=36; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ 2x+y=8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ y=x^2+6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy=9, \\ y=x. \end{cases}$

258. Параболаи $y=2x^2-5x+3$ ва хати рости $2x+y+9=0$-ро насохта собит кунед, ки онҳо якдигарро намебуранд.

259. Исбот кунед, ки хати рости $y-x=\frac{3}{4}$ бо параболаи $y=x^2-2x+3$ як нуқтаи умумӣ дорад ва координатаҳои онро ёбед:

260. Графикҳоро насохта нуқтаҳои буриши хатҳои зеринро ёбед.

а) давраи $x^2+y^2=25$ ва гиперболаи $xy=12$;

б) гиперболаи $xy=16$ ва хати рости $x+y=10$;

в) давраҳои $x^2+y^2=2$ ва $(x-2)^2+(y-2)^2=2$.

Машқҳо барои такрор

261 Қимати тағйирёбандаро, ки барояш ифода маъно надорад, ёбед:

а) $\frac{7x+11}{2x}$; б) $\frac{3}{3x+5}$; в) $\frac{x}{2x-4{,}8}$; г) $\frac{x+1}{2{,}3x-2}$.

262. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y=\frac{x+2}{x\cdot(x+1)}$; б) $y=\frac{2}{2x^2+3}$; в) $y=\sqrt{x+3}$;

263. Ҳисоб кунед:

а) $\left[\left(152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}\right)\cdot 3\right]:0{,}2$; б) $\left(172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}\right):(0{,}8\cdot 0{,}25)$;

в) $\left(6{,}6-3\frac{3}{14}\right)5\frac{5}{6}:[(21-1{,}25):2{,}5]$

264. Содда кунед:

а) $\frac{x}{2a^2-ax}-\frac{4a}{2ax-x^2}$; б) $\frac{12-y}{6y-36}+\frac{6}{6y-y^2}$;

265. Барои кадом қиматҳои x:

а) сеаъзогии квадратии $2x^2-3x+1$ қимати манфӣ;

б) касри $\frac{2+x}{x-3}$ қимати мусбат қабул мекунад?

266. Хушмаҳмад дар нимаи дуюми рӯз, баъди аз нисфирӯзӣ гузаштани $2\frac{1}{6}$ соат, барои машқкунӣ ба сексияи спортӣ рафт. Ӯ соати чанд ба машқкунӣ рафтааст?

267. Масъалае тартиб диҳед, ки ба ҳалли муодилаи

$\frac{x}{x+3}+\frac{x-1}{x-3}=\frac{9}{10}$ оварда расонад.

268. Экстремум ва экстремали функсияро ёбед:

а) $y=3(x-7)^2-4$; б) $y=-2(x-5)^2+6$.

269. График насохта нишон диҳед, ки графики функсияи x^2+2y^2- $-9y+4=0$ тири Ox-ро намебурад.

19. Системаи муодилаҳои якҷинса ва симметрӣ

А) **Системаи якҷинса**. Аввал мафҳуми функсияи якҷинсаро шарҳ медиҳем. Барои осонии кор бисёраъзогии $f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2$-ро мегирем. Дараҷаи ҳар як аъзои ин бисёраъзогӣ ба ду баробар аст. Пас агар x ва y-ро ба ягон адади t зарб занем, он гоҳ $a(xt)^2+b(xt\cdot yt)+$ $+c(yt)^2=t^2\cdot(ax^2+bxy+cy^2)$, яъне $f(xt; yt)=t^2f(x, y)$ мешавад. Функсияҳоеро, ки дорои чунин хосиятанд, **функсияҳои якҷинса** меноманд.

Масалан, $f(x, y)=x^2+\frac{2}{3}xy+5y^2$, $F(x, y)=x^2+xy+y^2$,... функсияҳои якҷинсаанд. Вале функсияҳои $f(x,y)=2x^2+3xy^2+4$, $F(x, y)=-2x^3+xy-y^2$,... якҷинса нестанд.

Таърифи 1. **Муодилаи дуномаълумаи $f(x, y)=0$-ро якҷинса меноманд, агар $f(x, y)$ бисёраъзогии якҷинсаи тартиби ду бошад.**

Нишон медиҳем, ки муодилаи якҷинсаи

$$ax^2+bxy+cy^2=0 \tag{1}$$

ба муодилаи квадратӣ оварда мешавад. Дар ҳақиқат, тарафи чапро дар шакли

$$ax^2+bxy+cy^2=y^2\cdot\left(a\cdot\frac{x^2}{y^2}+b\cdot\frac{x}{y}+c\right),\quad y\neq0$$

навишта

$$a\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2+b\cdot\left(\frac{x}{y}\right)+c=0 \tag{2}$$

-ро ҳосил мекунем, ки он нисбат ба $t=\frac{x}{y}$ муодилаи квадратиро ташкил медиҳад. Вобаста ба аломати дискриминанти муодила (ниг. ба п. 13) хулосаҳои гуногуни мувофиқ баровардан мумкин аст. Масалан, ҳангоми $D>0$ будан он ба ду муодилаи

$$\frac{x}{y}=A \quad \text{ва} \quad \frac{x}{y}=B$$

ҷудо мешавад.

Акнун, ба мақсади асосӣ мегузарем.

Таърифи 2. **Системаи намуди**

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2, \end{cases} \tag{3}$$

-ро, ки қисмҳои чапашон бисёраъзогиҳои якҷинсаи тартиби дуанд, системаи якҷинса меноманд.

Системаҳои якҷинса бо ёрии табдилот ва дохил кардани тағйирёбандаи нав ба муодилаи квадратӣ оварда мешаванд.

Мисоли 1. Системаи

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 8 \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Ду тарафи муодилаи дуюмро ба 20 зарб зада аз муодилаи якум муодилаи ҳосилшударо тарҳ мекунем:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{l} 3x^2 - 2xy \qquad\qquad = 160 \\ \underline{20x^2 - 60xy - 40y^2 = 160} \end{array} \\ - 17x^2 + 58xy + 40y^2 = 0. \end{array}$$

Дар натиҷа системаи якҷинсаи

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160 \\ 17x^2 - 58xy - 40y^2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

-ро ҳосил мекунем, ки ба системаи аввала баробарқувва аст. Муодилаи якҷинсаи $17x^2-58xy-40y^2=0$-ро дида мебароем. Агар $y=0$ бошад, он гоҳ аз худи ҳамин муодила $x=0$-ро пайдо мекунем. Аммо ҷуфти (0; 0) муодилаи якуми системаро қаноат намекунонад. Пас $y \neq 0$ аст. Аз ин ҷо ҳарду қисми муодилаи $17x^2-58xy-40y^2=0$-ро ба y^2 тақсим карда муодилаи ба он баробарқувваи $17 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 58 \cdot \left(\frac{x}{y}\right) - 40 = 0$-ро ҳосил мекунем. Баъди гузориши $\frac{x}{y} = t$ муодилаи квадратии $17t^2-58t-40=0$-ро ҳосил мекунем. Онро ҳал карда решаҳои $t_1=4$ ва $t_2 = -\frac{10}{17}$-ро меёбем. Яъне муодилаи $17x^2-58xy-40y^2=0$ ба ду муодилаҳои $\frac{x}{y} = 4$ ва $\frac{x}{y} = -\frac{10}{17}$ баробарқувва будааст. Аз ин ҷо, баробарқуввагии системаи (4) ба системаҳои

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 4, \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{10}{17}, \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases}$$

оварда мерасонанд.

Онҳоро дар шакли

$$\begin{cases} x = 4y, \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x = -\frac{10}{17}y, \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases}$$

навишта, алоҳида-алоҳида ҳал кардан мумкин аст. Дар асоси муодилаҳои якумашон муодилаҳои дуюми системаҳоро мувофиқан ба намудҳои соддаи $y^2=4$ ва $y^2=\dfrac{289}{4}$ овардан мумкин аст. Азбаски системаҳои

$$\begin{cases} x=\pm 8, \\ y=\pm 12 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x=\mp 5, \\ y=\pm\dfrac{17}{2} \end{cases}$$

ба системаи аввала баробарқувваанд, пас ҳалли система (8; 2), (−8; −2), $\left(-5;\ \dfrac{17}{2}\right)$ ва $\left(5;-\dfrac{17}{2}\right)$ мешавад.

Мисоли 2. Системаи

$$\begin{cases} 3x^2+xy-2y^2=0, \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Муодилаи якуми система муодилаи якҷинса аст, чунки тарафи чапи он нисбат ба x, y бисёраъзогии якҷинсаи тартиби ду мебошад. Ба монанди мисоли 1 дар ин ҷо ҳам $y=0$ гирифта аз муодилаи $3x^2+xy-2y^2=0$ $x=0$-ро ҳосил мекунем. Ҷуфти (0; 0) бошад муодилаи дуюми системаро қаноат намекунонад. Бинобар он ду тарафи муодилаи якҷинсаро ба y^2 $(y\neq 0)$ тақсим карда (ин амалиёт ба гумшавии реша намеорад)

$$3\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}-2=0$$

-ро ҳосил мекунем. Онро ҳал карда ду системаҳои

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=-1, \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}, \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases}$$

-ро пайдо мекунем, ки ба системаи аввала баробарқувва аст. Онҳоро ҳал менамоем:

$$\begin{cases} x=-y, \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y, \\ 2y^2+3y^2+y^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y, \\ 6y^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y, \\ y^2=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

яъне **система ҳал надорад;**

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}y, \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}\cdot y, \\ \dfrac{8}{9}y^2-2y^2+y^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}y, \\ y^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 2, \\ y^2=\pm 3 \end{cases}$$

яъне система ду ҳалли намуди (2; 3) ва (−2; −3)-ро дорад.

Б) **Системаи симметрӣ**. Ифодаи аз ду тағйирёбандаи x ва y **вобаста симметрӣ номида** мешавад, агар ивази x ба y ва y ба x қимати онро тағйир надиҳад. Масалан,

$$x^2-6xy+y^2;\quad \frac{2}{\sqrt{x+y}},\quad (x+y)+5xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad \dots$$

ифодаҳои симметрианд.

Мувофиқан бисёраъзогии аз ду тағйирёбанда вобастаи $P(x, y)$ симметрӣ номида мешавад, агар $P(x, y)=P(y, x)$ бошад. Бисёраъзогиҳои дутағйирёбандаи симметрии $x+y$ ва $x \cdot y$ асосӣ ҳисоб мешаванд, чунки дигар бисёраъзогиҳои симметрӣ ба воситаи онҳо ифода мешаванд. Дар ҳақиқат, агар $x+y=u$ ва $x \cdot y=v$ гузорем, он гоҳ

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v;\\
&x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=u(u^2-v-2v)=u\cdot(u^2-3v);\\
&x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2=\ldots=u^4-4u^2v+2v^2;\\
&x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)=\\
&=(u^2-2v)(u^3-3uv)-uv^2=u^5-5u^3v+5uv^2;\\
&x^2+xy+y^2=(x^2+2xy+y^2)-xy=(x+y)^2-xy=u^2-v;\\
&x^2-xy+y^2=(x^2+xy+y^2)-2xy=u^2-v-2v=u^2-3v.
\end{aligned}\tag{5}$$

Системаҳое, ки ҳамаи муодилаҳояшон бисёраъзогиҳои симметрианд, системаҳои симметрӣ номида мешаванд. Ин системаҳо бо ёрии гузориши $x+y=u$, $x \cdot y=v$ ва формулаҳои (5) ҳал карда мешаванд.

М и с о л и 3. Системаи

$$\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91,\\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Ин система симметрӣ буда, мувофиқи гузоришҳои $x+y=u$, $x \cdot y=v$ ва формулаҳои (5) ба намуди

$$\begin{cases} \left[(u^2-2v)^2-2v^2\right]+v^2=91,\\ (u^2-2v)-v=7 \end{cases} \quad \text{ва ё} \quad \begin{cases} (u^2-2v)^2-v^2=91,\\ u^2-3v=7 \end{cases}$$

оварда мешавад. Аз муодилаи охирин u^2-ро дар шакли $u^2=3v+7$ ифода карда ба муодилаи якум мегузорем ва дар натиҷа

$$\begin{cases} 14v=42,\\ u^2=3v+7 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} v=3,\\ u=\pm 4 \end{cases}$$

-ро пайдо мекунем.

Яъне система ду ҳал доштааст;

$$\begin{cases} u_1=4,\\ v_1=3; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2=-4,\\ v_2=3. \end{cases}$$

Системаи аввала бошад, ба ду системаи зерин баробарқувва мешавад:

$$\begin{cases} x+y=4,\\ x\cdot y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-4,\\ x\cdot y=3. \end{cases}$$

Аз рӯи теоремаи Виет ин ду система дорои ҳалҳои (1; 3), (3; 1) ва (−1; −3), (−3; −1) мебошанд.

Ҷ а в о б: (1; 3), (3; 1) (−1; −3), (−3; −1).

М и с о л и 4. Системаи

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Маълум, ки $x\neq0$ ва $y\neq0$ аст. Инро ба ҳисоб гирифта системаро дар шакли

$$\begin{cases} x^3+y^3=12xy, \\ 3(x+y)=xy \end{cases}$$

менависем, ки он симметрӣ аст. Табдилдиҳиро давом дода системаи ба аввала баробаркуввваи

$$\begin{cases} u^3-3uv=12v, \\ 3u=v \end{cases} \quad \text{ва ё} \quad \begin{cases} u\cdot(u^2-9u-36)=0, \\ v=3u \end{cases}$$

-ро хосил мекунем.

Азбаски $x\neq0$ ва $y\neq0$ аст, пас $u\neq0$ ва $v\neq0$ мешавад. Аз ин ҷо

$$\begin{cases} u^2-9u-36=0, \\ v=3u \end{cases}$$

мешавад, ки аз он

$$\begin{cases} u_1=12, \\ v_1=36 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} u_2=-3, \\ v_2=-9 \end{cases}$$

ҳосил мешавад. Системаҳои ба онҳо баробаркувваи

$$\begin{cases} x+y=12, \\ xy=36; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-3, \\ xy=-9. \end{cases}$$

-ро навишта ҳалҳои онҳоро меёбем. Дар айни хол ин ҳалҳо ҳалҳои системаи аввала ҳам мебошанд.

Ҷ а в о б: (6; 6), $\left(\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right)$.

?

1. Муодилаи якҷинса гуфта кадом муодиларо меноманд? Мисолҳо оред. 2. Намуди умумии системаҳои якҷинсаро нависед. Ин гуна системаҳоро бо кадом тарзҳо ҳал кардан мумкин аст? 3. Кадом ифодаро симметрӣ меноманд? Мисолҳо оред. 4. Чӣ гуна система симметрӣ аст? Барои ҳалли системаҳои симметрӣ аз кадом гузориш ва формулаҳо истифода мебаранд?

270. Кадоме аз ифодаҳои зерин якҷинсаанд:

а) $ax^2+26xy+3y^2$; г) $5xy-y+3$;

б) $4x-3xy-y^2$; д) $4x^4+x^3y-2x^2y^2+3y^4$;

в) $2x^3-xy^2+3y$; е) $x^3+y^3-3x^2y+3xy^2$?

271. Оё муодилаҳои зерин симметрианд?

а) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+2xy=0$; в) $\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}=1$; д) $x+\sqrt{x^2+y^2}=1+xy$;

б) $x^2+y^2+\dfrac{2}{xy}=3$; г) $2(x^2+y^2)+3xy=0$; е) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{y}$;

272. Системаи муодилаҳои якҷинсаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} xy=2, \\ 9x^2+y^2=13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^4-y^4=15, \\ x^3y-xy^3=6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 6x^2+xy-2y^2=0, \\ 3x^2-xy-2y^2=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2(x+y)=80, \\ 2x^2-3x^2y=80; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^2y+2xy^2+y^3=2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=136, \\ x^3y+xy^3=30; \end{cases}$

273. Системаи муодилаҳои симметриро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ (xy+8)(x+y)=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^4+y^4=97; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}, \\ x+y=18; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy(x+y)=20, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=7+xy, \\ x^3+y^3=6xy-1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x^2y+xy^2=30; \end{cases}$

274. Системаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=36, \\ 3x^2+4xy-y^2=94; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-2xy=1{,}25, \\ y^2+4xy+1=0; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^2y+xy^2=540, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{12}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^2-4xy+2y^2=1, \\ 5x^2+8xy+3y^2=16; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=28, \\ x+xy+y=14; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=26, \\ x+y=0{,}75xy; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+xy=36, \\ xy+y^2=45; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19, \\ x-xy+y=7; \end{cases}$

Машқҳо барои такрор

275. Касрро содда кунед: $\dfrac{a\cdot|a-3|}{a^2-a-6}$

276. Барои кадом қиматҳои x ифодаҳои

а) $\sqrt{-x}$; б) $\sqrt{x+3}$; в) $\sqrt{(x-6)^2}$;

маъно доранд.

277. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\sqrt{13^2-12^2}$; в) $\sqrt{4{,}9\cdot 360}$; д) $\sqrt{0{,}09}+\sqrt{0{,}16}$;

б) $\sqrt{313^2-312^2}$; г) $\sqrt{160\cdot 3{,}6}$; е) $\sqrt{0{,}01}-\sqrt{0{,}09}$;

278. Системаи муодилаҳои хаттии зеринро ҳал накарда, муайян кунед, ки кадоме аз онҳо ҳалли ягона дорад, ҳал надорад ва ё ҳалли бешумор дорад:

а) $\begin{cases} 2x+7y=16, \\ -x+y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+4y=11, \\ 2x+8y=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-11y=3, \\ 4x-44y=12; \end{cases}$

279. Муодилаи $x^2+2y^2-24=0$ дода шудааст, y аз x ду маротиба хурд аст. Ҷуфти ададҳои мусбати (x, y)-ро ёбед, ки онҳо муодиларо қаноат менамоянд.

280. Барои кадом қиматҳои x баробарии $\sqrt{(x-7)}^2 = x-7$ ҷой дорад?

281. Махраҷи касри оддии дуруст аз сураташ дида як воҳид калонтар аст. Агар ба сурат 3 ва ба махраҷ 7-ро ҷамъ кунем, он гоҳ касре ҳосил мешавад, ки фарқаш аз касри аввала ба $\frac{1}{6}$ баробар аст. Касрро ёбед.

282. Экстремуми функсияи $y=-3x^2+24x-1$-ро ёбед.

20. Ҳалли масъалаҳои матнӣ бо ёрии системаи муодилаҳои дараҷаи дуюм

Масъалаи 1. Периметрии секунҷаи росткунҷа ба 84 см ва гипотенузааш ба 37 см баробар аст. Масоҳати онро ёбед.

Ҳал. Фарз мекунем, ки асоси секунҷаи росткунҷа x см ва баландиаш y см бошад (онҳо мувофиқан катетҳоро ифода мекунанд). Аз шарти масъала бармеояд, ки периметр ба 84 см баробар аст, бинобар ҳамин, муодилаи $x+y+37=84$-ро ҳосил мекунем. Аз тарафи дигар дар асоси теоремаи Пифагор $x^2+y^2=37^2$-ро навиштан мумкин аст. Аз ин ҷо системаи

$$\begin{cases} x+y=47, \\ x^2+y^2=1369 \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем, ки ҳаллаш $x=35$ ва $y=12$ аст. Пас масоҳати матлуб

$$S=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\cdot 35\cdot 12=35\cdot 6=210\,\text{см}^2,\ S=210\ \text{см}^2$$

мешавад.

Ҷавоб: 210 см^2.

Масъалаи 2. Нисбати фарқи ду адад бар суммаашон ба 3:8 ва бар ҳосили зарбашон ба 6:55 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

Ҳал. Агар ададҳоро бо x ва y ишорат кунем, он гоҳ дар асоси шарти масъала муодилаҳои

$$\frac{x-y}{x+y}=\frac{3}{8} \quad \text{ва} \quad \frac{x-y}{xy}=\frac{6}{55}$$

-ро ҳосил мекунем. Онҳоро чун системаи муодилаҳои дуномаълумаи

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{3}{8}, \\ \dfrac{x-y}{xy}=\dfrac{6}{55} \end{cases}$$

дида мебароем. Ин система ба системаи

$$\begin{cases} -5x+11y=0, \\ \dfrac{x-y}{xy}=\dfrac{6}{55} \end{cases}$$

баробарқувва аст. Аз муодилаи якум y-ро ба воситаи x дар шакли $y=\frac{5}{11}x$ ифода карда, қимати ёфтаамонро ба муодилаи дуюми система мегузорем ва барои ёфтани x муодилаи $\frac{6}{5x}=\frac{6}{55}$ ва аз он x=11-ро ҳосил мекунем. Қимати y-ро аз вобастагии $y=\frac{5}{11}x$ меёбем: y=5. Ҳамин тариқ, ададҳои матлуб 11 ва 5 будаанд.

283. Ҳосили зарби ду адади бутун ба 30 ва суммаашон ба 11 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

284. Ҳосили зарби ду адади мусбат ба 10 ва фарқашон ба 3 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

285. Нисбати ду адади бутун ба 3 ва фарқашон ба 8 баробар аст. Ададҳоро ёбед.

286. Фарқи квадратҳои ду адад ба 16 ва суммаи квадратҳояшон ба 34 баробар аст. Ададҳоро ёбед.

287. Агар ба адади якум адади дуюмро ду маротиба зиёд карда ҷамъ кунем, он гоҳ 10 ҳосил мешавад ва агар ба адади дуюм адади якумро ду маротиба зиёд карда ҷамъ кунем, он гоҳ 11 ҳосил мешавад. Ин ададҳоро ёбед.

288. Тарафҳои секунҷаи росткунҷаро ёбед, агар масоҳати он ба 6 см^2 ва периметраш ба 12 см баробар бошад.

289. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа ба 13 см ва фарқи катетҳо ба 7 см баробар аст. Дарозии катетҳоро ёбед.

290 Майдони замини шакли росткунҷа доштаро, ки периметраш 44 м ва масоҳаташ 120 м^2 аст, панҷара гирифтанд. Дарозӣ ва бари майдонро ёбед.

291. Дарозии тарафҳои ду квадрат бо ададҳои 5 ва 4 мутаносибанд. Агар тарафҳои ҳар яке аз квадратҳоро 2 см кам кунем, он гоҳ фарқи масоҳати квадратҳои ҳосилшуда ба 28 см^2 баробар мешавад. Тарафҳои квадратҳои додашударо ёбед.

292. Як тарафи росткунҷа нисбат ба тарафи квадрат 3 см хурд буда, тарафи дигараш 2 маротиба зиёд аст. Агар масоҳати квадрат аз масоҳати росткунҷа 8 см^2 зиёд бошад, масоҳати квадрат чӣ қадар аст?

293. Дар ҳар як тарафи росткунҷа квадрат кашида шудааст. Ҳосили ҷамъи масоҳати квадратҳо ба 82 $см^2$ ва масоҳати росткунҷа ба 20 $см^2$ баробар аст. Дарозӣ ва бари росткунҷаро ёбед.

294. Дарозӣ ва бари росткунҷа ба ададҳои 3 ва 2 мутаносибанд. Агар дарозӣ ва бари росткунҷаро як сантиметрӣ зиёд кунем, росткунҷае ҳосил мешавад, ки масоҳаташ назар ба масоҳати росткунҷаи аввала 26 $см^2$ зиёдтар аст. Дарозӣ, бар ва масоҳати росткунҷаи авваларо ёбед.

295. Масоҳати росткунҷа ба 36 $см^2$ баробар аст. Агар дарозии онро 6 см ва барашро 1 см зиёд кунем, он гоҳ росткунҷаи масоҳаташ 100 $см^2$ хосил мегардад. Бари росткунҷаи ҳосилшударо ёбед.

296. Масоҳати секунҷаи росткунҷа ба 6 $см^2$ ва гипотенузааш ба 5 см баробар аст. Дарозии катетҳоро ёбед.

297. Диогоналҳои параллелограмм, ки чун 2:3 нисбат доранд, ёфта шавад, агар тарафҳояш мувофиқан ба 11 см ва 23 см баробар бошанд.

298. Диогоналҳои параллелограмм ба 17 см ва 19 см баробар буда, тарафҳояш чун 2:3 нисбат доранд. Тарафҳоро ёбед.

299. Тарафҳои параллелограммро ёбед, агар фарқашон ба 4 см ва диогоналҳояш ба 12 см ва 14 см баробар бошанд.

300. Сайёҳ дар 2 соат 3 км роҳи мумфарш ва 6 км роҳи ноҳамворро тай кард. Ӯ дар роҳи мумфарш назар ба роҳи ноҳамвор бо суръати 2 км/соат зиёд ҳаракат мекунад. Сайёҳ роҳи ноҳамворро бо кадом суръат тай намуд?

301. Завод дар муддати муқарраршуда мебоист 20 дастгоҳ тайёр мекард. Аммо завод плани якрӯзаро ба як дастгоҳ зиёд иҷро карда супоришро як рӯз пештар аз мӯҳлат иҷро намуд. Завод дар як рӯз чанд дастгоҳ тайёр кардааст?

302. Бори массааш 30 т мебоист ба воситаи автомобил дар якчанд сафар кашонда мешуд. Аммо барои кашондани он автомобили борбардориаш аз автомобили пешниҳодшуда 2 т зиёдро фиристонданд ва аз ин рӯ миқдори сафарҳо (рафту омад) аз миқдори пешбинишуда 4–то кам шуд. Бор дар чанд сафар кашонда шуд.

303. Ду тракторчӣ дар як вақт ба кор сар карда кореро дар $5\frac{1}{7}$ соат ба иҷро мерасонанд. Як тракторчӣ танҳо кор карда ин корро назар ба дуюмаш 3 соат тезтар ба анҷом расониданаш мумкин аст. Агар ҳар як тракторчӣ танҳо кор кунад, ин корро дар чанд соат ба анҷом мерасонанд?

304. Ду бригадаи чинакчиён якҷоя кор карда, пахтаи майдонеро дар 18 соату 45 дақиқа мегундоранд. Агар як бригада ҳосили майдонро нисбат ба дигараш 20 соат зудтар ғундорад, он гоҳ бригадаҳо алоҳида–алоҳида кор карда, пахтаи майдонро дар муддати чанд вақт чида метавонанд?

305. Ду ҷисм аз қуллаи кунҷи рост дар як вақт ба тарафҳои он ҳаракат кард. Баъди 10 сонияи ҳаракат масофаи байни онҳо ба $\sqrt{34}$ см баробар шуд. Ҷисми якум дар 3 сония ҳамон қадар масофаро тай кард, ки онро ҷисми дуюм дар 5 сония тай мекунад. Ҳар як ҷисм бо кадом суръат ҳаракат кардааст?

306. Ду пиёдагард дар як вақт аз пунктҳои A ва B, ки масофаи байнашон 32 км аст, ба пешвози якдигар ба роҳ баромаданд. Баъди 2 соат барои дучор шудан боз 6 км роҳ гаштан лозим шуд. Агар пиёдагарди якум аз A $\frac{8}{21}$ соат пештар ба роҳ мебаромад, онҳо дар нисфи роҳ дучор мешуданд. Суръати ҳаракати ҳар як пиёдагардро ёбед?

Машқҳо барои такрор

307. Ифодаро содда кунед:

а) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$.

308. Кадоме аз ададҳои зерин ирратсионалианд:

-2; 1; $\sqrt{12}$; $\sqrt{16}$; $-1{,}5$; $\sqrt{17}$; $0{,}7\cdot\sqrt{225}$?

309. Ҳисоб кунед:

а) $\frac{39^2-38^2}{11}\cdot\frac{1}{7}$; б) $\left[\frac{54(\sqrt{3}-1)}{2+\sqrt{5}}\cdot\frac{9+4\sqrt{5}}{4-2\sqrt{3}}\right]:\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}-\frac{2}{3}$.

310. Ҷадвалро пур кунед

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=\frac{1}{2}x^2$								
$y=-x^2$								
$y=1+4x^2$								

311. Сумма ва фарқи рақамҳои адади дурақама мувофиқан ба 5 ва 1 баробар аст. Ададро ёбед.

312. Дарозии яке аз тарафҳои росткунҷа назар ба дигараш 5 см зиёдтар аст. Агар масоҳаташ 104 см^2 бошад, тарафҳои онро ёбед.

313. Мошини сабукрав 100 км роҳи мумфарш ва 135 км роҳи сангфаршро тай намуд. Дар роҳи сангфарш ронанда суръатро 5 км/соат кам кард. Суръати аввалаи мошинро ёбед, агар маълум бошад, ки тамоми роҳ дар муддати 5 соат тай карда шудааст.

314. Системаи якҷинсаи

$$\begin{cases} x^2+3xy+y^2=5 \\ x^2-2xy=-1 \end{cases}$$

-ро ҳал кунед.

МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

А) **Оиди муодилаҳо**. То Р. Декарт муодилаи дараҷаи як дар шакли $ax=b$ навишта мешуд. Дар давраи фаъолияташ бошад муодилаи номбурда намуди умумии $ax+b=0$-ро гирифта буд. Дар шакли каноникии $f(x)=0$ (яъне бо тарафи рости ба нул баробар) навишта истода, Декарт аввалин шуда муодилаи алгебравиро чун вобастагии байни x ва y, ки мавқеи нуқтаҳоро дар ҳамвории координатавӣ ифода мекунад, дида мебароядр. (Ин намуди навишт баъзан дар корҳои Т. Гариотта ва тасодуфан дар корҳои Штифел вомехӯранд).

Намудҳои ҷузъии муодилаҳои квадратиро ҳанӯз чор ҳазор сол пеш вавилониҳо ҳал мекарданд. Оиди таърихи тараққиёти минбаъдаи ҳалли муодилаҳои тартиби ду хонанда маълумоти заруриро аз китоби дарсии синфи 8 ёфта метавонад.

Тарзҳои ҳалли муодилаҳои дараҷаи аз ду боло бошад (аниқтараш сеюм) ба юнониҳо ва арабҳо маълум набуд.

Дар рисолаҳои алгебравии онҳо бештар муодилаҳо ва системаи муодилаҳои дараҷаи якуму дуюм вомехӯранд. Алалхусус дар байни он тадқиқотҳо ҳалли муодилаҳои кубии намуди ҷузъӣ дошта диққатҷалбкунандаанд. Бояд қайд намуд, ки тарзи ҳаллашон ба ёфтани қиматҳои тақрибии решаҳо оварда расонида шудаанд.

Шоир, файласуф ва риёзидони форсу тоҷик Умари Хайём (1048–1131) дар асараш «Рисола фи-л-бароҳин ало масоил-илҷабр ва-л муқобала» ҳалли муодилаҳои тартиби як, ду, се ва баъзе намудҳои махсусро овардааст. Муодилаҳои тартиби як, ду ва серо Хайём ба се гурӯҳ ҷудо карда бо тарзи геометрӣ ҳал мекунад. Дар поён классификатсияи Хайёмро, ки фақат муодилаҳои тартиби серо дарбар мегирад, меоварем: 1) намудҳои оддӣ ($x^3=a$, $x^3=cx^2$, $x^3=bx$); 2) намудҳои мураккаб ($x^3+cx^2=bx$, $x^3+bx=cx^2$, $x^3=cx^2+bx$, $x^3+bx=a$, $x^3+a=bx$, $x^3=bx+a$, $x^3+cx^2=a$, $x^3+a=cx^2$, $x^3=cx^3+a$), 3) намудҳои чоръазогиро дарбаргиранда ($x^3+cx^2+bx=a$, $x^3+cx^2+a=bx$, $x^3+bx+a=cx^2$, $x^3=cx^2+bx+a$, $x^3+cx^2=bx+a$, $x^3+bx=cx^2+a$, $x^3+a=cx^2+bx$).

Ногуфта намонад, ки муодилаи намудаш умумии дараҷаи сеюми $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ($a\neq0$) бо ёрии ивази як тағйирёбанда ба тағйирёбандаи нави дигар ба муодилаи намуди $x^3+px=q$ оварда мешавад. Дар тадқиқу ҳалли муодилаи охирин як қатор риёзидонони итолиёвӣ ба монанди С.Д.Ферро (1465–1526), Н. Тартал (1499–1557), Д. Кардано (1501–1576), Л. Феррари (1522–1565) ва Р. Бомбелли (1530–1572) ҳиссаи арзанда гузоштаанд.

Аз он ҷумла Сципион Дал Ферро ба ҷустуҷӯи формулаи решаҳои мусбати муодилаи дар боло номбаршудаи $x^3+px+q=0$, ки $p>0$ ва $q>0$ аст, машғул шуда буд. Ин тадқиқоти худро махфӣ нигоҳ дошта, фақат дар охири ҳаёташ ба шогирдонаш хабар дод. Ҳамватани дигари Ферро Н. Тартал бошад, дар як вақт ба масъалаи ҳалли муодилаҳои тартиби сеюм машғул гашта, тарзҳои ҳалли муодилаҳои $x^3+px=q$; $x^3=px+q$, $x^3+q=px$ ва баъзе ҳолатҳои ҷузъии муодилаи $x^3+px+q=0$ (p, $q>0$)-ро ёфт. Д. Кардано, ки аз соли 1539 ба ҳалли муодилаҳои кубӣ машғул буд, аз кашфиёти Тартал бохабар шуда, дар китоби «Санъати бузург ё дар бораи қоидаҳои алгебра»-и соли 1545 навиштааш, дар баробари масъалаҳои дигари алгебра тарзҳои умумии ҳалли муодилаҳои кубиро баён кард. Инчунин, дар китоб Кардано усули ҳалли муодилаи тартиби чоруми шогирдаш Феррари кашфкардаро ҷой дод.

Ба Тартал ё ба Кардано тааллуқ доштани кашфи формулаи решаҳои муодилаи кубӣ то ҳол маълум нест, аммо ҳаминаш аниқ, ки ҳар дуяшон ҳам муодилаҳои кубиро пурра тадқиқ ва ҳал накардаанд. Дар тадқиқу ҳалли пурраи масъалаи болоӣ хизмати Р. Бомбеллӣ бузург аст.

Ҷамшед ибни Масъуд ибни Маҳмуд Ғиёсиддин Кошонӣ, ки бо тахаллуси «Ал–Кошӣ» дар илм маълум аст (донишманди бузурги асри XV), ғайр аз муодилаҳои дараҷаи як ва ду боз муодилаҳои дараҷаи сеюм ва чорумро дида баромада аст. Танҳо худаш 70 намуди ин гуна муодилаҳоро бо ҳар гуна роҳҳои сунъӣ ҳал намудааст.

Ф. Виет (1540–1603) дар асоси аломатҳои (рамзҳои) алгебравии такмилдодааш масъалаҳоеро дида баромада аст, ки ба ҳалли муодилаҳои дараҷаи сеюму чорум вобастаанд. Дар формулаҳои решаҳои муодилаҳои дараҷаҳои сеюму чорум аломати радикал, аниқтараш решаҳои дараҷаи 2-юм, 3-юм ва 4-ум мавҷуд аст.

Ниҳоят қайд мекунем, ки риёзидонон баъди аниқ кардани формулаҳои ҳалли муодилаҳои дараҷаи се ва чор дар муддати қариб 300 сол фаъолияташонро ба ҷустуҷӯи ҳалли муодилаҳои дараҷааш дилхоҳи аз 4 боло равона сохтанд, вале ба ягон натиҷаи назаррасе соҳиб нашуданд. Фақат дар солҳои 20-уми асри XIX риёзидони норвегӣ Н. Абел (1802–1829) дар ин соҳа кашфиёте намуд. Ӯ исбот намуд, ки решаҳои муодилаи дараҷаи аз 5 калон ё ба он баробар бо радикалҳо ифода карда намешаванд.

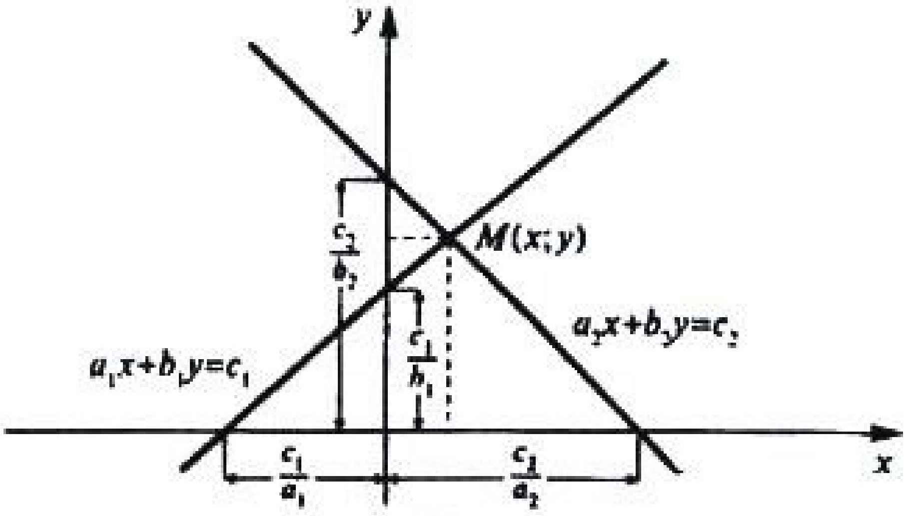
Б) **Ойди системаи муодилаҳо.** Маълум, ки системаи ду муодилаи хаттии дуномаълумаро бо роҳи истисноии номаълумҳо ҳал мекарданд. Дар асрҳои XVII-XVIII роҳҳои истисноии номаълумҳоро Ферма, Нютон, Лейбнитс, Эйлер, Безу, Лагранж ва дигарон кор карда баромадаанд. Дар навишти ҳозиразамон системаҳои дар боло номбурда намуди умумии

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

-ро доранд. Ҳалли системаи (1) бо формулаҳои

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad (2)$$

ифода карда мешавад. Индексҳои дар поёни ҳарфҳо ҷойгиршударо



Расми 65

аввалин шуда риёзидон ва файласуфи немис Готфрид Вилгелм Лейбнитс дохил кардааст, ки ин пешниҳодот дар эҷодшавии назарияи муайянкунандаҳо таъсири худро бештар расонидааст.

Дар асоси методи координатаҳо*, ки дар асри XVII Декарт кашф карда буд, ҳалли геометрии системаи муодилаҳои хаттии (1) амалӣ гардид. Методи графикии ҳалли система аз сохтани абсиссаи x ва ординатаи y-и нуқтаи буриши ду хати рост иборат мебошад. (Расми 65.)

Акнун ба таърихи пайдоиш ва ҳалли системаҳои ғайрихаттӣ назар мекунем. Дар дастхатҳои вавилониҳои қадими асрҳои III–II пеш аз эраи мо масъалаҳои зиёде ёфт шудаанд, ки бо ёрии тартибдиҳии системаи муодилаҳои тартиби дуро дарбаргиранда, ҳалли худро ёфтаанд. Ба сифати мисол яке аз масъалаҳои ин дастхатро мегирем: «Масоҳати ду квадрати худро ман ҷамъ кардам: $25\frac{5}{12}$. Тарафи квадрати дуюм ба $\frac{2}{3}$ ҳиссаи квадрати якум ва боз 5 баробар аст». Системаи ба ин матн мувофиқоянда дар навишти ҳозиразамон намуди

$$\begin{cases} x^2+y^2=25\frac{5}{12}, \\ y=\frac{2}{3}x+5 \end{cases} \qquad (3)$$

-ро дорад. Муаллифи масъала y-ро дар муодилаи дуюми системаи (3) ба квадрат бардошта дар асоси формулаи квадрати сумма (ин формула ба ӯ маълум будааст) ҳосил мекунад.

$$y^2=\frac{4}{9}x^2+\frac{20}{3}x+25$$

* Новобаста аз Декарт ва қариб дар як вақт, ин методро риёзидони дигари франсавӣ Пер Ферма кашф намудааст. Вале ин кашфиёти ӯ баъди 14 соли вафоти муаллиф (яъне с. 1679) ба чоп расид.

Қимати ёфтаашро ба муодилаи якуми система гузошта ба муодилаи квадратии

$$1\frac{4}{9}x^2+6\frac{2}{3}x=\frac{5}{12}$$

меояд. Аз рӯи қоидаҳои ба имрӯза монанд ин муодиларо ҳал карда муаллиф аввал x ва баъд y-ро меёбад. Гарчанде вавилониҳо рамзҳои алгебравӣ надошта бошанд ҳам, масъалаҳоро бо методҳои алгебравӣ ҳал мекарданд.

Диофант бисёр номаълумҳоро бо рамзҳо ишорат накарда бошад ҳам, аммо номаълумро тавре интихоб мекард, ки ҳалли система ба ёфтани ҳалли як муодила табдил меёфт. Масъалаи зеринро аз «Арифметика»-и ӯ мегирем: Ду ададеро ёбед, ки суммаашон ба 20 ва суммаи квадраташон ба 208 баробар бошад». Ҳалли ин масъаларо мо одатан аз тартиб додани системаи

$$\begin{cases} x+y=20, \\ x^2+y^2=208 \end{cases}$$

сар мекардем.

Диофант бошад, ба сифати номаълум ними фарқи ададҳои матлубро гирифта (дар ишоратҳои ҳозира) ҳосил мекунад:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-y)=z \\ \frac{1}{2}(x+y)=10. \end{cases}$$

Ин муодилаҳоро ҷамъ ва тарҳ карда (ҳамаи ин амалиётҳоро ӯ даҳонакӣ иҷро менамояд) пайдо мекунад:

$$x=z+10. \qquad y=10-z$$

Аз ин ҷо $x^2+y^2=(z+10)^2+(10-z)^2=2z^2+200$ ва баъди гузориш ба муодилаи дуюм $2z^2+200=208$-ро ҳосил мекунад. Аз муодилаи охирин бо осонӣ $z=2$, $x=2+10=12$; $y=10-2=8$-ро меёбад.

Ҳалли системаи муодилаҳо диққати Алоуддини Кушчӣ (1402–1474) ва Баҳоуддини Омулиро (1546–1622) ба худ ҷалб кардааст. Баҳоуддин дар охири китоби худ «Ҳулосат-ул-ҳисоб» ҳафт масъалаеро пешниҳод мекунад, ки барои исботи вуҷуд доштан ва надоштани ҳалли онҳо мафҳуми васеи назарияи ададҳо зарур буд. Ба ибораи Баҳоуддин барои ёфтани ҳалли масъала бисёр олимон машғул буданд, аммо натиҷа набахшид.

Ба сифати мисол масъалаи ҳафтумашро мегирем*. «Ба квадрати адад решааш ва адади ду ҷамъ карда шавад, то ки маҷмӯъ квадрат ҳосил гардад. Аз он квадрат решааш ва адади ду кам карда шавад, боз квадрат ҳосил гардад». Ин масъала ҳалли системаи

* Хонанда шаш масъалаи аввалашро аз саҳифаи 123–126-и китоби Г. Собиров «Инкишофи математика дар Осиёи Миёна (асрҳои XV–XVII)», Душанбе, Ирфон, 1966, ёфта метавонад.

$$\begin{cases} x^2+x+2=y^2, \\ x^2-x-2=z^2. \end{cases}$$

-ро талаб мекунад

Неселман ин масъаларо нодуруст тарҷума намуда, системаи зеринро тартиб медиҳад:

$$\begin{cases} x^2+x+2=y^2, \\ x^2+x-2=z^2. \end{cases}$$

Барои ин система Неселман ҳалли

$$x=\frac{34}{15}, \quad y=\frac{46}{15} \quad \text{ва} \quad z=\frac{14}{15}$$

-ро нишон медиҳад, ки он аслан системаи Омулиро қаноат менамояд.

Дар поён баъзе мисолу масъалаҳоеро меорем, ки риёзидонони гузаштаамон машғули ҳаллашон буданд:

1. Аз «Арифметика»-и Диофант:

а) $\begin{cases} x+y=20, \\ x^2-y^2=80; \end{cases}$ (ҷавоб: $x=12$, $y=8$)

б) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+y^2=5(x+y); \end{cases}$ (ҷавоб: $x=6$, $y=2$)

в) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+y^2=10(x-y); \end{cases}$ (ҷавоб: $x=6$; $y=2$)

г) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2-y^2=12(x-y); \end{cases}$ (ҷавоб: (0; 0), (9; 3))

д) $\begin{cases} x=3y, \\ y^2=6x; \end{cases}$ (ҷавоб: (54; 18))

е) $\begin{cases} x=3y, \\ y^2=6(x-y); \end{cases}$ (ҷавоб: (36; 12)

ж) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=(x-y)+20. \end{cases}$ (ҷавоб: $6\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$)

2. Аз «Алҷабр ва-л-муқобала»-и Муҳаммади Хоразмӣ:

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=21; \end{cases}$ (ҷавоб: (7; 3))

б) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2-y^2=40; \end{cases}$ (ҷавоб: (7; 3))

в) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2+y^2=(x-y)+54; \end{cases}$ (ҷавоб: (7; 3))

г) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2=4xy; \end{cases}$ (ҷавоб: (8; 2))

д) $\begin{cases} x+y=10, \\ (x+y)^2=2\frac{7}{9}x^2; \end{cases}$ (ҷавоб: (6; 4))

е) $\begin{cases} x+y=10, \\ \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=2\frac{1}{6}; \end{cases}$ (ҷавоб: (6; 4))

ж) $\begin{cases} x+y=10, \\ y^2=81x; \end{cases}$ (ҷавоб: (1; 9))

з) $\begin{cases} x+y=10, \\ x:(y-x)=\frac{3}{4}. \end{cases}$ (ҷавоб: (3; 7))

3. Аз «Китоби абак»-и Л. Фибоначи (Пизанский):

а) $\begin{cases} xy - y = 42, \\ x - y = 2; \end{cases}$

(ҷавоб: (8; 6), (−5;−7))

б) $\begin{cases} xy + y = 40, \\ x - y = 2; \end{cases}$

(ҷавоб: (7; 5) (−6;−8))

в) $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}+10\right)\left(\dfrac{y}{x}+10\right) = 122\dfrac{2}{3}, \\ x + y = 10; \end{cases}$

(ҷавоб: (6; 4))

г) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \dfrac{x}{y}(x - y) = 24; \end{cases}$

(ҷавоб: (8; 2))

4. Аз китоби «Косс»-и Рудолф:

а) $\begin{cases} (y + x)(x^2+y^2) = 539200, \\ (x - y)(x^2-y^2) = 78400; \end{cases}$

(ҷавоб: (64; 36) (36;64))

б) $\begin{cases} xy + x + y = 573, \\ x^2+y^2-x-y = 1716; \end{cases}$

(ҷавоб: (40; 13))

5. Аз «Арифметикаи умумӣ»-и Нютон:

а) «Тарафҳои $AB=a$, $AC=b$ ба асоси $BC=c$-и секунҷаи ABC дода шудааст. Аз қуллаи кунҷи A ба асос баландии AD фуроварда шудааст. Дарозии порчаҳои BD ва DC-и асосро ёбед». (Ҷавоб: $BD = \dfrac{a^2-b^2+c^2}{2a}$, $DC=c-BD$).

б) «Периметр ва масоҳати секунҷаи росткунҷа дода шудааст. Гипотенузаи BC-ро ёбед». (Ҷавоб: $BC = a - \dfrac{b^2}{a}$, a –нимпериметр ва b^2 - масоҳат.

Машқҳои иловагӣ ба боби II

Ба параграфи 5

315. Муодиларо ҳал кунед:

а) $2x^6-8x^4=0$;
б) $0{,}1x^5-0{,}0001x^2=0$;
в) $x^4=x^2$;
г) $x^4-625=0$;
д) $x^6-64=0$;
е) $x^3+x-2=0$;
ж) $4x^3-3x-1=0$;
з) $(x-1)(x-2)+3(x-2)^2=0$;

316. Муодиларо ҳал кунед:

а) $x^5-6x^4+7x^3+18x^2-44x+24=0$;
б) $2x^5+3x^4-10x^3-15x^2+8x+12=0$;
в) $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$;
г) $x^5-4x^4+4x^3-x^2+4x-4=0$;

317. Решаи муодиларо ёбед:

а) $ax^2+ax-a-bx-bx^2+b=0$;
б) $bx-cx+ax-cx^2+bx^2+ax^2=0$;
в) $8bx^2-2a(1-2b)x-a^2=0$;
г) $4x^2-12bx-4a^2+9b^2=0$;

318. Касрро ихтисор кунед:

а) $\dfrac{15x^2-8bx+b^2}{12x^2-bx-b^2}$;
б) $\dfrac{12a^2-a-1}{3a^2+5a-2}$;
в) $\dfrac{a^2+6a-91}{a^2+8a-105}$;
г) $\dfrac{8x^2+32x-360}{6x^2-72x+210}$;
д) $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-5x+4}$;
е) $\dfrac{b^3-3b^2+2b}{2b^2-7b+5}$;

319. Барои кадом қимати p муодилаи зерин ду реша дорад:

а) $3x^2+px-9=0$; б) $2x^2-x+p=0$?

320. Барои кадом қимати q муодила реша надорад:

а) $5x^2-4x+q=0$; б) $6x^2-qx+2=0$?

321. Ҳамон қиматҳои m-ро ёбед, ки барояшон муодила решаи ягона дорад:

а) $8x^2-4mx+5=0$; б) $7mx^2-x-6=0$;

322. Муодилаи $x^3=4x$-ро бо ду тарз: графикӣ ва ба зарбкунандаҳо ҷудокунӣ ҳал намоед.

323. Бо тарзи гузориш муодиларо ҳал кунед:

а) $(x^2+3)^2-4(x^2+3)+3=0$;

б) $(x^2+2x-3)(x^2+2x-4)-20=0$;

в) $(x^2+3x)(x^2+3x-1)=12$;

г) $(x^2+5x+8)^2-6(x^2+5x+8)+8=0$;

д) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-27\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+50=0$;

е) $(x^2-x-1)(x^2-x+1)=3$;

ж) $(x^2-4x+4)^2-5(x^2-4x+4)+4=0$;

з) $(x^2-6x+9)^2-10(x^2-6x+9)+9=0$;

и) $4(x^2-10x+25)-5(x^2-10x+25)+1=0$;

к) $(5x^2-4)^2+6(5x^2-4)-7=0$;

л) $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$;

м) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$;

324. Яке аз касрҳои ба ҳам чаппаро бо t ва дигарашро бо $\dfrac{1}{t}$ ишорат намуда, муодиларо ҳал кунед:

а) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=2{,}9$; б) $\dfrac{x^3-x^2}{1}-\dfrac{8}{x^3-x^2}=2$;

325. Боварӣ ҳосил намоед, ки муодилаи зерин реша надорад:

а) $7x^4+19x^2+91=0$; б) $3x^6+21x^4+71x^2+2=0$.

Оё муодиларо ҳал накарда ба ин хулоса омадан мумкин аст?

326. Муодилаи биквадратиро ҳал кунед:

а) $3x^4-13x^2+10=0$;

б) $9x^4-x^2-8=0$;

в) $7x^4-2x^2-104=0$;

г) $x^4-5x^2+4=0$;

д) $x^4-13x^2+36=0$;

е) $x^4-25x^2+144=0$;

ж) $x^4-41x^2+400=0$;

з) $4x^4-5x^2+1=0$;

и) $9x^4-10x^2+1=0$;

к) $100x^4-13x^2+0{,}36=0$;

л) $3x^4-75x^2+432=0$;

м) $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$;

н) $16x^4-4(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$;

о) $x^4+x^2+1=0$;

п) $x^4+x^2-1=0$;

р) $x^4-6x^2+9=0$;

327. Барои кадом қиматҳои a муодилаи $2x^4-12x^2+a=0$

а) чор реша дорад; б) ду реша дорад; в) реша надорад?

Ба параграфи 6

328. Оё ҷуфти қиматҳои

а) $x=1, y=3$; б) $x=0, y=0$; в) $x=-2, y=2$; г) $x=-1, y=-3$;

ҳалли муодилаи дуномаълумаи $x^2-y=4$ шуда метавонад?

329. Нишон диҳед, ки муодилаи:

а) $(x+5)^2+(y-3)^2=-9$ ҳал надорад;

б) $(x-7)^2+(y+3)^2=0$ ҳалли ягона дорад.

330. Графики муодилаи дуномаълумаро созед:

а) $3x+4y-12=0$; в) $x^2-y+1=0$; д) $x^2+(y-2)^2=9$;

б) $-2x+3y+6=0$; г) $(x-1)^2+y^2=2\frac{1}{4}$; е) $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{9}{4}$

331. Аз рӯи муодилаи давраи додашуда координатаҳои марказ ва дарозии радиусро ёбед:

а) $x^2+y^2-20=0$; в) $x^2+y^2-x-y=15,5$;

б) $x^2+y^2-2x-10=0$; г) $x^2+y^2-2x+2y-23=0$;

332. Системаи муодилаҳоро бо тарзи графикӣ ҳал кунед:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x-3y=-4;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2+y^2=16,\\ x^2+(y-1)^2=16;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=9,\\ y=3;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y-1=0;\end{cases}$

333. Графикҳоро насохта координатаҳои нуқтаҳои буриши хатҳои зеринро ёбед:

а) параболаи $y=2x^2-5x+4$ ва хати рости $7x-y-6=0$;

б) параболаи $y=4x^2-x+1,5$ ва хати рости $y=4,5$;

в) давраи $x^2+y^2=68$ ва хати рости $3x+y=14$;

г) давраи $x^2+y^2=4$ ва параболаи $x-2y^2=-3$;.

д) гиперболаи $xy=2$ ва параболаи $2x^2+7x-2y=5$.

334. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}x^2+xy=9+3y,\\ 3x+2y=-1;\end{cases}$ ж) $\begin{cases}2x^2+y^2+3x+y=33,\\ x^2-y^2+2x-y=9;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x+2y=4,\\ x^2+xy=y-5;\end{cases}$ з) $\begin{cases}2(x+y)^2-3(x+y)=35,\\ xy-(x+y)=1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2y^2+2xy=80,\\ x-y=2;\end{cases}$ и) $\begin{cases}x^2-xy=3,\\ xy+y^2=2;\end{cases}$

г) $\begin{cases}2x^2+3y^2=5,\\ 2x+y=3;\end{cases}$ к) $\begin{cases}(x+y)^2+2(x+y)=99,\\ (x-y)^2-(x-y)=2;\end{cases}$

д) $\begin{cases}3x^2-4y^2=-1,\\ x+y=2;\end{cases}$ л) $\begin{cases}x^2-3xy+9y^2=67,\\ x^2+3xy+9y^2=103;\end{cases}$

е) $\begin{cases}x^2+2y^2-3xy+4x-3y=5,\\ x+y=3;\end{cases}$ м) $\begin{cases}x^2+xy=36,\\ xy+y^2=45;\end{cases}$

335. Бо истифодаи формулаҳои (5)-и п. 19 системаҳои симметрии зеринро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x+y=\frac{5}{2}xy, \\ x^3+y^3=8\frac{1}{8}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=30, \\ x^2+y^2+xy=27; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=133, \\ x^2-xy+y^2=7; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=6, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=21, \\ x+y+xy=9; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18\frac{2}{3}, \\ x+y=8; \end{cases}$

336. Агар сеаъзогии квадратии $ax^2-3x+2b$ ба сеаъзогии квадратии $x^2+2ax-3$ зарб карда шавад, бисёраъзогии дараҷаи чорум ҳосил мешавад, ки дар он коэффитсиентҳои назди x^3 ва x^2 мувофиқан ба 5 ва 10 баробаранд, a ва b-ро ёфта бисёраъзогии ҳосилшударо дар шакли стандартӣ нависед.

337. Суммаи ду адад ба 20 ва ҳосили зарбашон ба 75 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

338. Периметри росткунҷа ба 24 м баробар аст. Агар яке аз тарафҳои онро 2 м кам ва дигарашро 3 м зиёд кунем, он гоҳ масоҳаташ 2 маротиба зиёд мешавад. Тарафҳои росткунҷаро ёбед.

339. Масоҳати росткунҷа ба 12 м² баробар аст. Агар дарозиашро 1 м кам карда барашро бетағйир гузорем, он гоҳ квадрат ҳосил мешавад. Дарозии росткунҷаро ёбед.

340. Дарозии тарафҳои ду квадрат бо ададҳои 5 ва 4 мутаносибанд. Агар тарафҳои ҳар як квадратҳоро ба 3 см кам кунем, он гоҳ фарқи масоҳати квадратҳои ҳосилшуда ба 24 см² баробар мешавад. Тарафҳои квадратҳои додашударо ёбед?

341. Агар сурати касри оддиро ба квадрат бардорем ва махраҷашро ба 9 воҳид зиёд кунем, он гоҳ касри ба $\frac{1}{4}$ баробар ҳосил мешавад. Агар суратașро ба 5 воҳид зиёд карда, махраҷашро бетағйир гузорем, он гоҳ адади 1-ро ҳосил мекунем. Касрро ёбед.

342. Адади дурақамаеро ёбед, ки суммаи рақамҳояш ба 3 ва ба шашчанди ҳосили зарби рақамҳояш баробар бошад.

343. Ҷамъи рақамҳои адади дурақама ба 8 ва зарбашон ба 15 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

344. Квадрати касри дурусти оддӣ дар сумма бо чорчандаш ба $\frac{57}{16}$ баробар аст. Агар суммаи сурат ва махраҷашро ба 5 воҳид зиёд кунем он ба ҳосили зарби сурат ва маҳраҷаш баробар мешавад. Касрро ёбед.

345. Аз ду шаҳре, ки масофаи байнашон 360 км аст, дар як вақт ду мошин ба пешвози якдигар ба сафар баромаданд ва баъди 4 соат ба якдигар дучор шуданд. Яке аз мошинҳо назар ба дигараш дар ҳамаи роҳ 1 соату 48 дақиқа зиёдтар вақт сарф мекунад. Суръати ҳар як мошинро ёбед.

346. Ду қатора аз стансияҳои A ва B, ки масофаи байнашон 600 км аст, дар як вақт ба пешвози якдигар ба роҳ баромаданд. Қатораи якум ба стансияи B назар ба қатораи дуюм ба стансияи A 3 соат пештар омада расид. Инчунин маълум аст, ки ҳангоми 250 км-ро тай кардани қатораи якум қатораи дуюм 200 км роҳро мепаймояд. Суръати ҳаракати қатораҳоро ёбед.

347. Аз ду пункт, ки масофаи байнашон 650 км аст, ду велосипедрон ба пешвози якдигар баромаданд. Агар ҳар дуи онҳо ҳаракатро дар як вақт сар кунанд, он гоҳ вохӯрӣ баъди 10 соат ва ҳангоми 4 соату 20 дақиқа пештар ба роҳ баромадани велосипедрони дуюм вохӯрӣ баъди 8 соат ба амал меояд. Суръати ҳаракати ҳар як велосипедронро ёбед.

348. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа ба $\sqrt{181}$ см ва масоҳаташ ба 45 $см^2$ баробар аст. Дарозии катетҳои секунҷаи росткунҷаро ёбед.

349. Периметри росткунҷа ба 14 м ва масоҳаташ ба 12 $м^2$ баробар аст. Дарозӣ ва бари росткунҷаро ёбед.

350. Адади дурақама аз чорчанди суммаи рақамҳояш 3 воҳид зиёд аст; агар ба ин адад 18-ро илова кунем, он гоҳ ададе ҳосил мешавад, ки он 18 воҳид аз адади рақамҳояш нисбати адади аввала чаппа ҷойгир буда, хурд аст. Ин ададро ёбед.

351. Агар ба сурати каср 2-ро ҷамъ кунем, он гоҳ воҳид ҳосил мешавад; агар ба маҳраҷ 3-ро илова кунем, он гоҳ каср ба $\frac{1}{2}$ баробар мешавад. Ин касрро ёбед.

*352. Агар талаба ду адади дурақамаи дар тахтаи синф навишташударо дуруст зарб мекард, он гоҳ ӯ 2250 ҳосил мекард. Вале ӯ ҳангоми рӯйбардоркунии шарти мисол дар яке аз ададҳо ба ҷои рақами охиринаш 5 рақами 6-ро навишт ва дар натиҷаи зарб 2300-ро ҳосил намуд. Талаба бояд кадом ададҳоро зарб менамуд?

353. Ду гурӯҳи сайёҳони ҷавон аз маҳалҳои A ва B, ки масофаи байнашон 30 км аст, ба пешвози ҳамдигар ба роҳ баромаданд. Агар гурӯҳи якум нисбат ба гурӯҳи дуюм 2 соат пештар ба роҳ бароянд, он гоҳ онҳо баъд аз 2,5 соати ба роҳ баромадани гурӯҳи дуюм вомехӯранд. Агар гурӯҳи дуюм нисбат ба гурӯҳи якум 2 соат пештар ба роҳ бароянд, он гоҳ вохӯрӣ баъд аз 3

соати ба роҳ баромадани гурӯҳи якум ба амал меояд. Гурӯҳҳо бо кадом суръат ҳаракат мекунанд?

354. Дар адади дурақамаи мусбат рақами даҳиҳо аз рақами воҳидҳо ду маротиба калон аст. Ин ададро ёбед, агар ҳосили зарби ӯ ба суммаи рақамҳояш ба 252 баробар бошад.

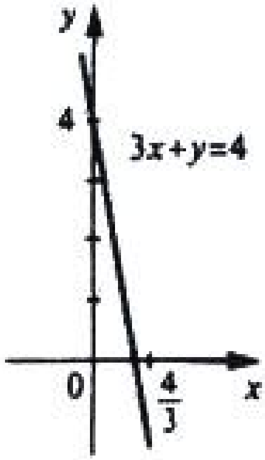
355. Масъалаи зеринро аз «Дастнависҳои Бахшамийск» ҳал кунед: «Ададеро ёбед, ки аз иловакунӣ ба 5 воҳид ва камкунӣ ба 11 воҳид квадрати пурраро ташкил намояд».

ҶАВОБҲО

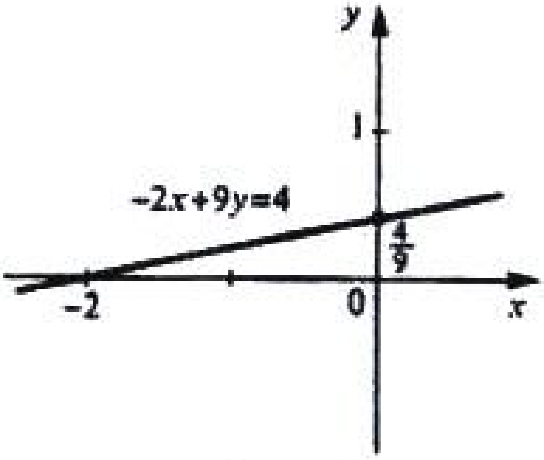
160. а) Ҳа; б) не; в) ҳа; г) не; д) не; е) ҳа. **161**. а), б), в), д), е), з) – муодилаҳои бутун. **162**. а) 11; б) 9; в) 6; г) 1; д) 3; е) 2; ж) 3; з) 1; и) 2; к) 4; л) 2; м) 4; н) 2; о) 2; п) 5; р) 4. **163**. а) 0,376; б) 614; в) 4,82; г) $\frac{95}{216}$; д) $6\frac{1}{4}$. **164**. Баъди кушодани қавсҳо $5{,}5m-0{,}5n$-ро ҳосил мекунем, ки қиматаш барои m ва n-и додашуда ба -9 баробар аст. **166**. 60 км. **167**. $S=2a^2$. $P=6a$, a - яке аз тарафҳои росткунҷа. **168**. а), в) - ҷуфт, б) - тоқ. **169**. $\forall x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup(3;+\infty)$. **170**. 6 км/соат. **171**. а) $x=-1{,}5$; б) $x=8$; в) $y=0$; г) $y=2$; д) $x_1=1,\ x_2=7$; е) $x_{1,2}=a\pm b$; ж) $x_1=a-1, x_2=a-2$; з) $x_1=1,\ x_2=-\frac{a^2+a+1}{a}$. **172**. а) $x=-2$, б) $x_1=-\frac{1}{6},\ x_2=\frac{1}{6}$; в) $y_1=2,\ y_2=-\frac{5}{2}$; г) $x_1=-1, x_2=1$. **173**. а) $x_1=0, x_2=\frac{5}{2}$; б) $x=1\frac{1}{3}$; в) $x=4$; г) $x_1=5, x_2=-\frac{22}{3}$; д) $x=1$; е) $x=2$. **174**. а) $b=\pm1$; ±2; ±3; ±4; ±6; ±8; ±12; ±24; б) ±1; ±3; ±7; ±21. **175**. а) Барои ҳамаи p–ҳои $p>-13$; б) барои ҳамаи p–ҳои $p>\frac{5}{8}$. **177**. а) $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{2}, x_3=2$; б) $x_1=1, x_2=\frac{1}{3}$. **178**. а) $m<4$; б) $m<-\frac{2}{3}$; в) $m<\frac{1}{4}$; г) $m\in R/[-4;4]$; д) $m<1\frac{1}{24}$; е) $m<\frac{9}{2}$; ж) $m>-\frac{1}{16}$; з) $m>-\frac{9}{5}$. **179**. а) $k=\frac{9}{32}$; б) $k=\frac{1}{4}$; в) $k=\pm4\sqrt{5}$; г) $k=\pm8$; д) $k=\frac{8}{7}$; е) $k=-\frac{2}{9}$; ж) $k=\frac{15}{4}$; з) $k=-5\pm2\sqrt{10}$. **180**. а) $t\in\left(-\frac{12}{5};\frac{12}{5}\right)$; б) $t\in(-24;\ 24)$; в) $t\in(-12;\ 12)$; г) $t\in\left(-12\sqrt{6};\ 12\sqrt{6}\right)$; д) $t\in(-1;\ 1)$; е) $t<-\frac{1}{12}$; ж) $t>16$; з) $t>12$. **181**. а) $x_1=0,\ x_{2,3}=\pm6$; б) $x=0$; в) $x_1=0,\ x_2=1{,}5,\ x_1=2$; г) $x_1=0,\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=-\frac{1}{5}$; д) $x_1=1,\ x_2=2$; е) $x=3$; ж) $x=\pm5$; з) $x_1=1,\ x_2=-6$. **182**. а) $x_1=0,\ x_2=\frac{10}{7}$; б) $x_1=0, x_2=144$; в) $x_1=0, x_2=1, x_3=4$; г) $x=2$; д) $x=-2$; е) реша надорад; ж) $x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=2$; з) $t_1=0,\ t_{2,3}=\pm2$; и) $x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=4$; к) $t_1=0,\ t_2=3$; л) $y_1=0,\ y_{2,3}=\pm12$; м) $x_1=0,\ x_2=\pm0{,}1$. **183**. а) $x^3-6x^2+11x-6=0$; б) $x^3-4x^2+x+6=0$; в) $x^4-3x^3-x^2+3x=0$; г) $x^4-6x^3+3x^2+26x-24=0$. **185**. Нишондод. Дар асоси теоремаи Виет $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$ ва $x_1\cdot x_2=$

$=-\frac{3}{2}$ -ро навишта, аз квадрат ва куби суммаи x_1+x_2 барои б) ва в) ҷавоб ёфтан мумкин аст. а) -4; б) $\frac{37}{4}$; в) $-26{,}875$. **186**. 18. **188**. а) $\frac{15}{64}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1800. **189**. а) $\begin{cases} 3x+6, \text{ барои } x \geq -2; \\ -3x-6, \text{ барои } x < -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2, \text{ барои } x \geq -2; \\ -2x-2, \text{ барои } x < -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-x, \text{ барои } x \in R \setminus (0;\ 1); \\ -x^2+x, \text{ барои } x \in (0;\ 1). \end{cases}$ **190**. 7,5 см, 10,5 см, 12 см. **191**. 15 606 сомонӣ. **192**. 8 рӯз. **194**. а) $\forall x \in (-\infty;\ 42)$; б) $\forall x \in (1;2) \cup (4;+\infty)$. **195**. а) $x=2$; б) $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}$; в) $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\pm 3$; г) $x_1=-3$, $x_{2,3}=-3\pm\sqrt{10}$; д) $x_1=3$; $x_2=-4$; е) $x_{1,2}=\pm 2$; ж) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_3=3$; з) $x_1=-3$, $x_2=2$; и) $x_1=-1{,}5$, $x_2=1$, $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$; к) $x_{1,2}=\pm 1$; $x_{3,4}=\pm 2$. **196**. а) $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{3}$; б) $y_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $y_{3,4}=\pm 1$; в) решаҳои ҳақиқӣ надорад; г) $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_{3,4}=\pm 2$; д) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; е) $y_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_{3,4}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$; ж) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm 4$; з) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm 3$; и) $x_{1,2}=\pm 5$, $x_{3,4}=\pm 4$; к) решаи ҳақиқӣ надорад; л) $x_{1,2}=\pm 2$; м) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 3$; н) $y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$, $x_{3,4}=\pm 2$; о) решаи ҳақиқӣ надорад; п) $x_{1,2}=-\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}$; р) $x_{1,2}=\pm 1$.

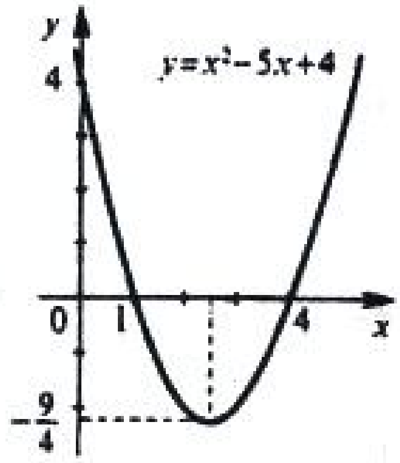
197. а) $A(-2;\ 0)$, $B(2;\ 0)$, $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$, $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$; б) $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}};0\right)$, $B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};0\right)$, $C(1;\ 0)$, $D(-1;\ 0)$; в) $A\left(\frac{1}{2};0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $C(3;\ 0)$, $D\ (-3;\ 0)$; г) $A(\sqrt{2};\ 0)$, $B(-\sqrt{2};\ 0)$, $C(5;\ 0)$, $D(-5;\ 0)$; д) $A\left(\frac{\sqrt{5}}{2};0\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{5}}{2};0\right)$, $C(1;\ 0)$, $D(-1;\ 0)$; е) $A(1;\ 0)$; $B(-1;\ 0)$; ж) $A\left(\sqrt{10};0\right)$, $B\left(-\sqrt{10};0\right)$, $C(1;\ 0)$, $D(-1;\ 0)$, з) $A(1;\ 0)$, $B(-1;\ 0)$. **198**. Ҳа. **199**. Ҳа. **200**. а) $0<k<1$; б) $0<k<1$. **201**. а) $k=\pm\frac{4}{3}$; б) $k=\frac{25}{144}$. **202**. а) $k>-\frac{1}{10}$; б) $k\in(-12;\ 12)$. **203**. а) $(x-1)(x+1)(9x^2+2)$; б) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(13x^2+16)$; в) $(2x-1)^2(2x+1)^2$; г) $(x-1)(x+1)(7x^2+9)$; **204**. а) Решаи ҳақиқӣ надорад. б) $x_1=2$, $x_2=-2$; в) $x=-1$; г) $x_1=1$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. **205**. а) $2<x<3$; б) $1\leq x\leq 7$; в) $-2<x<6$; г) $x\in(-3;\ 1)\cup(2;+\infty)$; д) $x\in(-\infty;\ -1)\cup(3;+\infty)$; е) $x\in\left[-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right]$. **206**. $\frac{239}{693}$. **208**. а) $x+2$; б) $\frac{x+4}{3}$; в) $\frac{3}{1-x}$; г) $x-2$. **209**. 5 ва 6. 210. *Нишондод*. Агар суръати ҳаракати яке аз автомобилҳоро бо x ишорат кунем, он гоҳ суръати ҳаракати автомобили дуюм $x+10$ мешавад. Мувофиқи шарт муодилаи $\frac{420}{x}-\frac{420}{x+10}=1$-ро ҳосил мекунем, ки аз он натиҷаҳои матлубро пайдо кардан мумкин аст. Ҷавоб: 60 км/соат; 70 км/соат. **211**. а) Ҳа; б) не. **212**. а), г), д). **213**. а) Не; б) ҳа; в) ҳа; г) не.



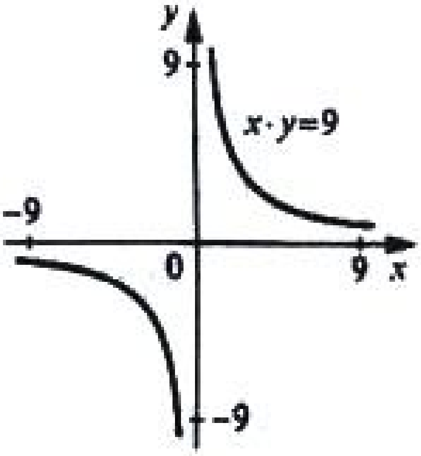
Расми 66



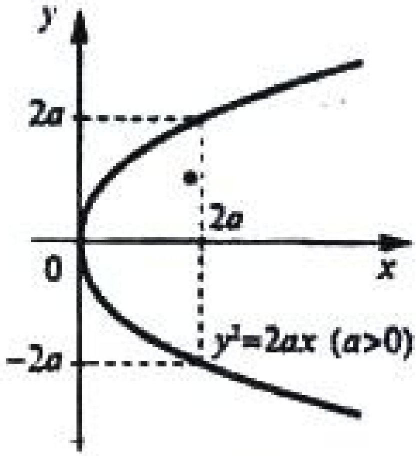
Расми 67



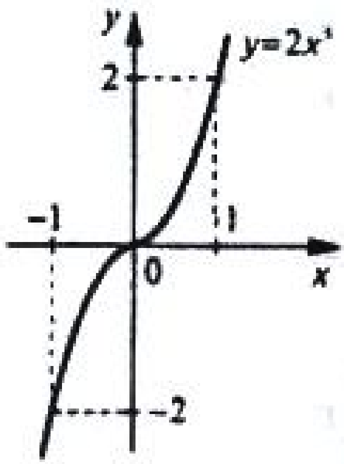
Расми 68



Расми 69

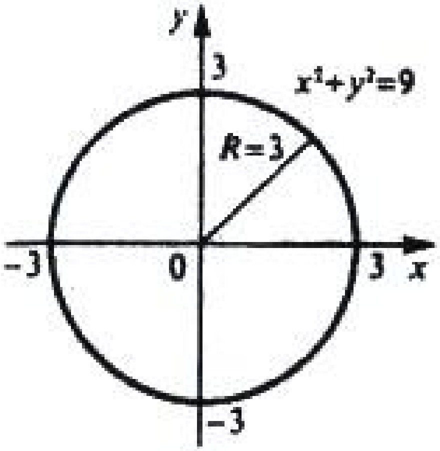


Расми 70

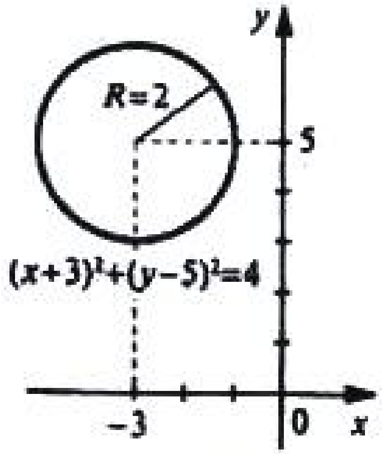


Расми 71

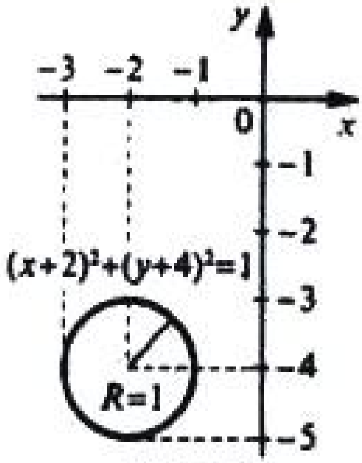
214. а) Расми 66; б) расми 67; в) расми 68; г) расми 69; д) расми 70; е) расми 71.
215. а) 1; б) 1; в) 2; г) 2; д) 4; е) 6; ж) 6; з) 7; и) 12; к) 3; л) 4; м) 2. **216**. 1. **217**. $\frac{400}{9}$.
218. а) $(x-1)(x+7)$; б) $(2a-x+y)(2a+x-y)$; в) $6(x+2y)^2$; г) $(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16)$.
219. 500 000 000 сомонӣ. **220**. Масъала. Суммаи рақамҳои адади дурақама ба 6 ва фарқашон ба 2 баробар аст. Ададро ёбед. (42). **221**. а) $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(0;3)$; б) $x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup[1;+\infty)$; ё $x\in R\setminus\left(-\frac{2}{3};1\right)$. **222**. $x_1=-10$, $x_2=8$. **223**. а) $x=3$ - нули функсия; барои $x<3$ $f(x)$ мусбат ва барои $x>3$ $f(x)$ манфӣ мешавад; б) $x=-4$ - нули функсия; барои $x<-4$ $f(x)$ манфӣ ва барои $x>-4$ $f(x)$ мусбат мешавад.
224. а) $A_0(2;\ 5)$, $R=2$; б) $A_0(-3;\ 1)$, $R=1$; $A_0\left(11;-\frac{3}{2}\right)$, $R=\frac{3}{\sqrt{2}}$; г) $A_0(-5;\ 1{,}1)$ $R=1{,}1$; д) $\left(\frac{16}{9};\frac{25}{4}\right)$, $R=13$; е) $A_0(\ 9;\ 16)$, $R=\frac{25}{3}$; ж) $A_0(-1{,}44;\ -0{,}2)$, $R=0{,}3$; з) $A_0\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{9}\right)$, $R=\frac{1}{12}$. **225**. а) $A_0\left(\frac{3}{2};0\right)$, $R=\frac{3}{2}$. б) $A_0(0;\ -2)$, $R=2$; в) $A_0\left(\frac{1}{2};0\right)$, $R=\frac{1}{2}$. г) $A_0(1;\ -1)$, $R=\sqrt{2}$; д) $A_0\left(-\frac{1}{2};-2\right)$, $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$; е) $A_0\left(2;-\frac{1}{2}\right)$, $R=\frac{3}{\sqrt{2}}$; ж) $A_0(1;\ -4)$, $R=5$;



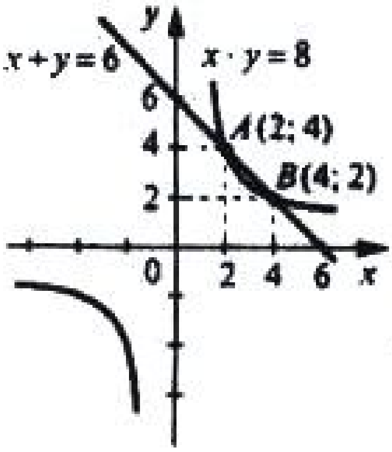
Расми 72



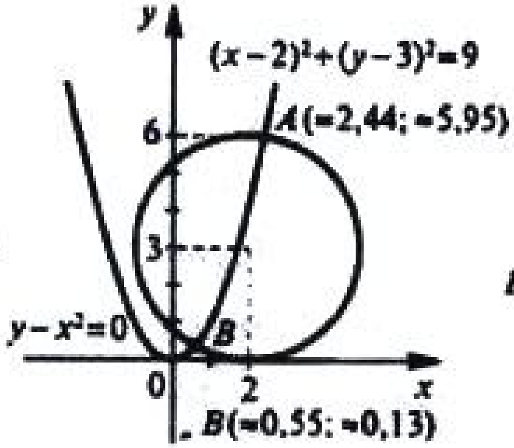
Расми 73



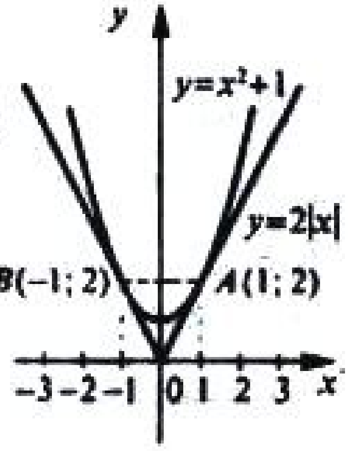
Расми 74



Расми 75



Расми 76



Расми 77

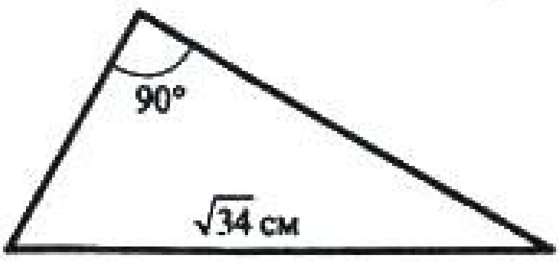
з) $A_0(3; 2)$, $R=4$. **226**. а) Расми 72; в) расми 73; г) расми 74. **227**. а) 4; б) 7; в) 2; г) 5; д) 3; е) 5. **228**. Фақат нуқтаи (4; 3) ба давраи муодилааш $x^2+y^2=25$ таалуқ дорад. **229**. а) (1; −1) ва (1; 1); б) (0; 0) ва (2; 0). **230**. а) Не; б) не. **231**. 0,75. **232**. а) 30, б) 4400; в) 23000. **233**. а) $1+\frac{a}{x}$; б) $2-\frac{x}{y}$. **234**. а) (3; −5); б) (1; 11); в)(−7; −7). **235**. $\frac{3}{7}$. **236**. 48 км/соат; 36 км/соат. **237**. а) $x=2$; б) $x=-1$; в) $x=\frac{8}{7}$. **239**. а) Расми 75; л) расми 76; м) расми 77. **241**. $7\frac{1}{9}$. **242**. Дуруст аст. **244**. а) $45^2-31^2>44^2-30^2$; б) $297\cdot299<298^2$; в) $26^3-24^3>(26-24)^3$; г) $(17+13)^3>17^3+13^3$. **245**. а) (1; 1); б) (2; 1) в) (2;2); г) (5; 4). **246**. 6 км/соат. **248**. а) $x=0$; б) $x=2$; в) $x=3$. **249**. а) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$; б) $x_{1,2}=\pm1$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. **250**. Не. **251**. а) (5; 2), (3; 0); б) (4; 5), (−8; −7); в) (−6; −6), (2; 10); г) (12; −9), (−3; 6); д) $(a; -2a)$, $(-2a; a)$; е) (3; −5), (−11; 51); ж) $(1-a; -a-1)$, $(a+1; a-1)$; з) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **252**. а) $\left(-3; -\frac{17}{2}\right)$, (6; 5); б) (−1; 3), (4; −2); в) (−1; 0), (−2; −1); г) $\left(-\frac{10}{7}; -14\right)$, (1; 3); д) (3; 1,2), (5,5; 0,7); е) (−2; 2),

$(3;\ 4{,}5)$; ж) $(-3{,}5;\ 2{,}5)$, $(3{,}5;\ -2{,}5)$; з) $(-5;\ 4)$, $(-3;\ 8)$; и) $(6;\ 2)$, $(-3;\ -1)$; к) $\left(0;\ \frac{5}{2}\right)$; л) $(\pm 8;\ -6)$; м) $(2;\ 1)$. **253**. а) $(-4;\ \pm 3)$, $(4;\ \pm 3)$; б) $(-10;\ \pm 8)$, $(10;\ \pm 8)$; в) ҳал надорад; г) $(-5;\ 0)$, $(4;\ \pm 3)$. **254**. а) $(\pm 4;\ \pm 1)$; б) $(7;\ 7)$, $(8;\ 6)$; в) $\left(\frac{4}{9};-\frac{1}{3}\right)$, $(1;\ -2)$; г) $(\pm 3;\ \pm 1)$; д) $(6;\ -6)$, $(-1;\ 15)$; е) $(0;\ -5)$, $(1;\ -4)$. **255**. а) $(1{,}5;\ -2{,}5)$, $(2{,}5;\ -1{,}5)$; б) $(\pm 3;\ 4)$; в) $(2;\ \pm 3)$, $(9;\ \pm\sqrt{2})$; г) $(-4;\ 2)$; д) $(\pm 3;\ 4)$, $(\pm 4;\ -3)$; е) $(-14;\ -13)$, $(-8;\ -19)$; ж) $(4;\ -7)$; з) $(-1;\ -3)$, $\left(\frac{9}{2};\ 8\right)$. **256**. а) $(2;\ -3)$, $(0{,}6;\ 1{,}2)$; б) $\left(\frac{8}{3};\ \frac{8}{3}\right)$, $(2;\ 4)$; в) $\left(-\frac{1}{3};\ 2\right)$, $\left(-\frac{12}{11};\ -\frac{3}{11}\right)$; г) $\left(-1;\ \frac{1}{4}\right)$; д) $(\pm 3;\ \pm 1)$; е) $(\pm 4;\ \pm 2)$, $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{13}};\ \pm\frac{16}{\sqrt{13}}\right)$. **257**. а) $(4;\ 6)$, $(-5;\ 15)$; б) $(4;\ 0)$, $(2{,}4;\ 3{,}2)$; в) $(1;\ 2)$, $\left(-1\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{4}\right)$; г) $(0;\ 6)$; д) $(-4;\ 0)$; е) $(\pm 3;\ \pm 3)$. **258**. *Нишондод*. Системаи $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 3, \\ 2x + y + 9 = 0 \end{cases}$-ро ҳал карда боварӣ ҳосил намудан мумкин аст, ки он ҳамҷоя нест. **259**. Графики хати рости $y - x = \frac{3}{4}$ бо параболаи $y = x^2 - 2x + 3$ дар як нуқтаи $\left(\frac{3}{2};\ \frac{9}{4}\right)$ ҳамдигарро мебуранд. **260**. а) $(4;\ 3)$, $(3;\ 4)$, $(-3;\ -4)$, $(-4;\ -3)$; б) $(2;\ 8)$, $(8;\ 2)$; в) $(1;\ 1)$, яъне давраҳо дар нуқтаи координатааш $(1;\ 1)$ ба ҳам мерасанд. **261**. а) 0; б) $-\frac{5}{3}$; в) 2,4; г) $\frac{20}{23}$. **262**. а) $D(f) = (-\infty;-1) \cup (-1;0) \cup (0;+\infty)$; б) $D(f)=R$; в) $D(f)$ $[-3;+\infty)$. **263**. а) 65,625; б) $29\frac{7}{12}$; в) 2,5. **264**. а) $\frac{2a+x}{ax}$; б) $-\frac{y-6}{6y}$. **265**. а) $\forall x \in \left(\frac{1}{2};\ 1\right]$; б) $\forall x \in R \backslash [-2;\ 3]$. **266**. Соати чордаҳу даҳ дақиқа. **267**. $\frac{2}{5}$. Намунаи матни масъала:«Махраҷи каср аз сураташ дида 3 воҳид зиёдтар аст. Агар аз сурат ва махраҷи он мувофиқан 1 ва 3-ро кам кунем, он гоҳ касре ҳосил мешавад, ки дар сумма бо касри матлуб касри дурусти $\frac{9}{10}$-ро ташкил медиҳад. Касрро ёбед». **268**. $x=7$; $y_{min}=-4$; б) $x=5$; $y_{max}=6$. **270**. а), д), е). **271**. Муодилаҳои пунктҳои а), б), в) ва г) симметрианд. Муодилаҳои пунктҳои д) ва е) симметрӣ шуда наметавонанд, чунки бо иваз кардани x ва y ифода тағйир меёбад. **272**. а) $\left(\frac{2}{3};\ 3\right)$, $\left(-\frac{2}{3};\ -3\right)$; б) $(4;\ 1)$; в) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$; г) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2};\ \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3};\ \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$; д) $\left(t;\ -\frac{3}{2}t\right)$; е) $(3;\ 1)$, $(1;\ 3)$, $(-1;\ -3)$, $(-3;\ -1)$. **273**. а) $(-2;\ 3)$, $(3;\ -2)$; б) $(1;\ 4)$, $(4;\ 1)$, $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2};\ \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2};\ \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$; в) $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$ г) $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$, $\left(-\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{103}{48}};\ -\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{103}{48}}\right)$, $\left(-\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{103}{48}};\ -\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{103}{48}}\right)$; д) $(6;\ 12)$, $(12;6)$;

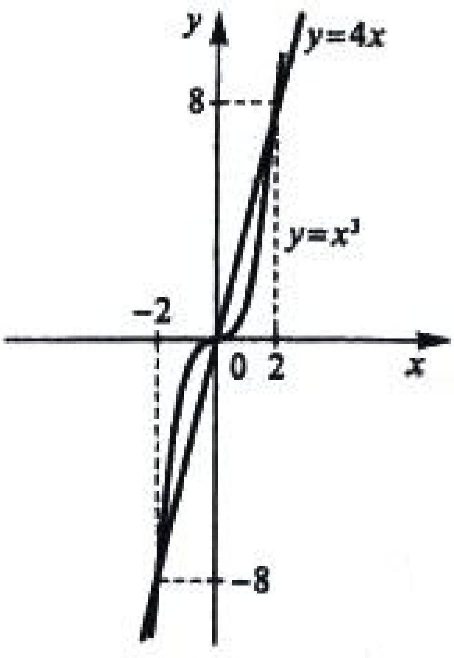
е) (2; 3), (3; 2). **274**. в) (4; 5), (−4; −5); г) $\left(\frac{5}{6};-\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{5}{6};-\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{1}{2};1\right),\left(\frac{1}{2};-1\right)$; д) (2; 4), (4; 2); ж) (3; 12), (12; 3). **275**. Барои $a>3$ ба $\frac{a}{a+2}$ ва барои ҳамаи $a<-2$ ва $-2<a<3$ ба $-\frac{a}{a+2}$ баробар аст. **276**. а) $x\le0$; б) $x\ge-3$; в) $\forall x\in R$. **277**. а) 5; б) 25; в) 42; г) 24; д) 0,7; е) −0,2. **278**. а) Ҳалли ягона дорад, чунки $\frac{2}{-1}\neq\frac{7}{1}$ ё $-2\neq7$ аст; б) ҳал надорад, чунки $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$ мешавад; в) ҳалли бешумор дорад, чунки $\frac{1}{4}=\frac{-11}{-44}=\frac{3}{12}$ аст. **279**. (4; 2) **280**. $x\ge7$. **281**. $\frac{2}{3}$. **282**. $y_{max}=47$. **283**. (5; 6), (6; 5). **284**. (5; 2). **285**. (12; 4). **286**. (5; 3), (−5; −3). **287**. (4; 3). **288**. 3 см; 4 см; 5 см. **289**. 12 см; 5 см. **290**. 10 см; 12 см. **291**. 10 см; 8 см. **292**. 16 см^2. **293**. 4 см; 5 см. **294**. 15 см; 10 см; S=150 см^2. **295**. 10 см. **296**. 4 см, 3 см ва 3 см, 4 см. **297**. 30 см; 20 см. **298**. 15 см; 10 см. **299**. 11 см, 7 см. **300**. *Нишондод*. Бо x ва y мувофиқан суръати ҳаракати сайёҳро дар роҳи мумфарш ва ноҳамвор ишорат намуда, дар асоси шарти масъала системаи муодилаҳои $\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=2,\quad x-y=2$ -ро тартиб додан мумкин аст. Ҷавоб: 4 км/соат. **301**. 5 дастгоҳ. **302**. *Нишондод*. Агар x ва y мувофиқан миқдори сафарҳои пешбинӣ шуда, ва баъдинаро (яъне сафарҳои бо мошини нав амалӣ гардонидашуда) ифода кунанд, он гоҳ ба вобастагиҳои $x-y=4$ ва $\frac{30}{x}+2=\frac{30}{y}$ меоем. Баъди ҳалли система собит мекунем, ки бор бо мошини нав дар 6 сафар кашонда мешавад. **303**. *Нишондод*. Аз рӯи шарти масъала системаи муодилаҳои $y-x=3$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{36}$ -ро тартиб додан мумкин аст. Ҷавоб: 9 соат. 12 соат. **304**. 30 соат, 50 соат. **305**. *Нишондод*. Бо x ва y мувофиқан суръати ҳаракати ҷисмҳои яқум ва дуюмро ишорат мекунем. Мувофиқи шарти масъала $\sqrt{34}$ см дарозии гипотенуза, $10x$ ва $10y$ дарозиҳои катетҳоро ифода мекунанд (расми 78). Аз ин системаи $\begin{cases}x^2+y^2=0{,}34,\\3x-5y=0\end{cases}$ -ро ҳосил мекунем, ки ҳаллашон x=0,5 м/сон, y=0,3 м/сон мешавад. **306**. 6 км/соат; 7 км/соат. **307**. а) $2-\sqrt{3}$; б) *Нишондод*. Дар навбати аввал $9+4\sqrt{2}$ -ро ба шакли $8+4\sqrt{2}+1=(2\sqrt{2})^2+2\cdot2\sqrt{2}+1^2=(2\sqrt{2}+1)^2$ ва баъд $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$ -ро ба намуди $\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$ овардан зарур аст. Ҷавоб: $\sqrt{2}+1$. **308**. $\sqrt{12}$ ва $\sqrt{17}$.

309. а) 1; б) $53\frac{1}{3}$. **311**. 32. **312**. 8 см, 13 см.

314. (1; 1), (−1; −1), $\left(\frac{1}{\sqrt{11}};\frac{6}{\sqrt{11}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{11}};-\frac{6}{\sqrt{11}}\right)$.



Расми 78



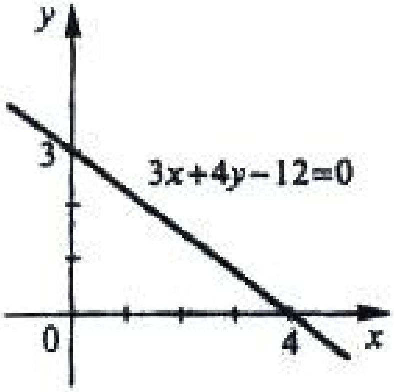
Расми 79

315. а) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm2$; б) $x_1=0$, $x_2=0{,}1$; в) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm1$; г) $x_{1,2}=\pm5$; д) $x_{1,2}=\pm2$; е) $x_1=1$; ж) $x_1=1$; $x_2=-\frac{1}{2}$; з) $x_1=2$, $x_2=\frac{7}{4}$. **316.** а) $x_1=1$, $x_{2,3}=2$, $x_4=3$, б) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm2$, $x_5=-\frac{3}{2}$; в) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=2{,}5$, $x_4=5$; г) $x_1=1$, $x_2=2$. **317.** а) $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; б) $x_1=0$; $x_2=-1$; в) $x_1=\frac{a}{4b}$; $x_2=-\frac{a}{2}$; г) $x_{1,2}=\frac{3b\pm2a}{2}$. **318.** а) $\frac{5x-b}{4x+b}$; б) $\frac{4a+1}{3(a+2)}$; в) $\frac{a+13}{a+15}$; г) $\frac{4(x+9)}{3(x-7)}$; д) $\frac{2x-1}{x-4}$; е) $\frac{b\cdot(b-2)}{2b-5}$. **319.** а) $\forall p\in(-\infty;+\infty)$; б) $\forall p\in\left(-\infty;\frac{1}{8}\right)$. **320.** а) $\forall q\in\left(\frac{4}{5};+\infty\right)$; б) $\forall q\in(-4\sqrt{3};4\sqrt{3})$. **321.** а) $m=\pm\sqrt{10}$; б) $m=-\frac{1}{168}$. **322.** $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$. Графики функсияҳои $y=x^3$ ва $y=4x$ дар нуқтаи (0; 0), (2; 8) ва (−2; −8) ҳамдигарро мебуранд. (Расми 79.) **323.** а) $x=0$; б) $x_1=2$, $x_2=-4$, $x_3=-1$; в) $x_1=1$, $x_2=-4$; г) $x_1=-1$, $x_2=-2$, $x_3=-3$, $x_4=-4$; д) $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{25}{2}\pm\frac{\sqrt{621}}{2}$; е) $x_1=-1$, $x_2=2$; ж) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=4$; з) $x_1=4$, $x_2=2$, $x_3=6$, $x_4=0$; и) $x_1=4$, $x_2=4{,}75$, $x_3=5{,}25$, $x_4=6$; к) $x_1=-1$, $x_2=1$; л) $x_1=-4$, $x_2=2$; м) $x_1=3$, $x_{2,3}=3\pm2\sqrt{5}$.

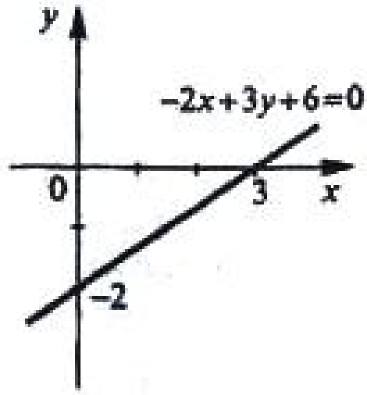
324. а) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$; б) $x_1=-1$, $x_2=2$. **326.** а) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{10}{3}}$; б) $x_{1,2}=\pm1$; в) $x_{1,2}=\pm2$; г) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm2$; д) $x_{1,2}=\pm2$, $x_{3,4}=\pm3$; е) $x_{1,2}=\pm3$, $x_{3,4}=\pm4$; ж) $x_{1,2}=\pm4$, $x_{3,4}=\pm5$; з) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$; и) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{3}$; к) $x_{1,2}=\pm\frac{3}{10}$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{5}$; л) $x_{1,2}=\pm4$, $x_{3,4}=\pm3$; м) $x_{1,2}=\pm a$, $x_{3,4}=\pm b$; н) $x_{1,2}=\pm\frac{a}{2}$, $x_{3,4}=\pm\frac{b}{2}$; о) ҳал надорад; п) $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$; р) $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$.

327. а) $a\in(0;18)$; б) $a=18$; в) $a\in(18;+\infty)$. **328.** а) Не; б) не; в) не; г) ҳа. **329.** б) $x=7$, $y=-3$. **330.** а) Расми 80; б) расми 81; в) расми 82; г) расми 83; д) расми 84; е) расми 85. **331.** а) (0; 0), $R=2\sqrt{5}$; б) (1; 0), $R=\sqrt{11}$; в) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $R=4$; г) (1; −1), $R=5$. **332.** $\left(\frac{-2+3\sqrt{6}}{5},\frac{6+\sqrt{6}}{5}\right)$, $\left(\frac{-2-3\sqrt{6}}{5},\frac{6-\sqrt{6}}{5}\right)$; б) (2; 3); в) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{7};\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{7};\frac{1}{2}\right)$.

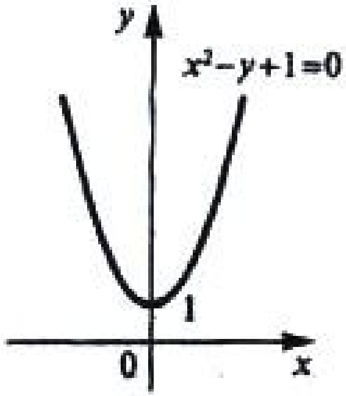
333. а) (1; 1), (5; 29); б) (1; 4,5), $\left(-\frac{3}{4};\frac{9}{2}\right)$; в) (2; 8), (6,4; −5,2); г) (≈1,8; ≈±0,8), (1,4; ±1,5); д) (1; 2), $\left(4;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-4\right)$. **334.** а) (3; −5), (5; −8); б) (−2; 3), (−3; 3,5); в) (−2; −4), (4; 2); г) $\left(\frac{11}{7};-\frac{1}{7}\right)$, (1; 1); д) (15; −13), (1; 1); е) $\left(\frac{1}{3};2\frac{2}{3}\right)$, (2; 1); ж) (3; −3),



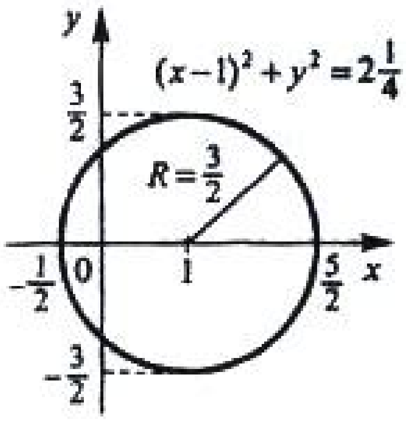
Расми 80



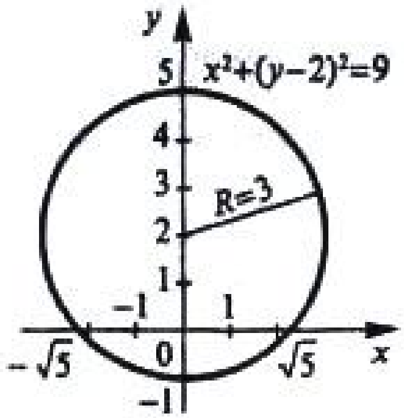
Расми 81



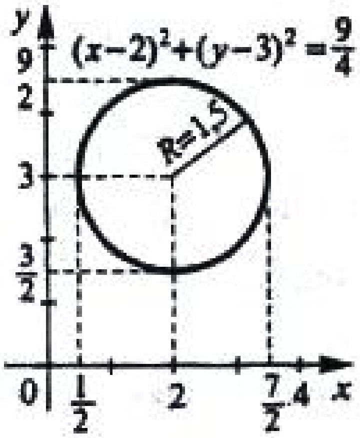
Расми 82



Расми 83



Расми 84



Расми 85

(3; 2), (≈–4,666; ≈1,422), (≈–4,666; ≈–4,222); з) (2; 3), (3; 2), $\left(\frac{7\pm\sqrt{89}}{4}; \frac{-7\mp\sqrt{89}}{4}\right)$; и) (±1; ±2), к) (4; 5), (–6; –5), $\left(-\frac{9}{2}; -\frac{13}{2}\right)$, $\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}\right)$; л) (±2; ±3), $\left(\pm 9; \pm\frac{2}{3}\right)$; м) (±4; ±5).

335. б) (3; 2), (2; 3); в) (1; 4), (4; 1); г) (3; 3), д) (3; 3), $\left(\frac{-3(1\pm\sqrt{5})}{4}; \frac{-3(1\mp\sqrt{5})}{4}\right)$; е) (2; 6), (6; 2). **336**. $a=-2$; $b=2$, $-2x^4+5x^3+10x^2+61x-48$ ё $a=2$; $b=8$, $2x^4+5x^3+10x^2+5x-12$.

337. 15; 5. **338**. 10 м ва 2 м. **339**. 4 м. **340**. 10 см; 8 см. **341**. $\frac{2}{7}$. **342**. *Нишондод.* Адади дуракамаи $\overline{xy}$ -ро дар шакли $10x+y$ гиред. Адади матлуб 12 аст. **343**. 35 ва 53. **344**. *Нишондод.* Аз рӯи шарти масъала системаи муодилаҳои $xy-5=x+y$ ва $\left(\frac{x}{y}\right)^2+4\frac{x}{y}=\frac{57}{16}$ -ро тартиб дода, гузориши $\frac{x}{y}=z$ -ро татбиқ кардан зарур аст. **345**. 40 км/соат, 50 км/соат. *Нишондод.* 1 соату 48 дақиқаро дар шакли 1,8 соат навиштан зарур аст. **346**. 50 км/соат, 40 км/соат. *Нишондод.* Бигузор x-суръати ҳаракати қатораи якум ва y-суръати ҳаракати қатораи дуюм бошад. Масофаи 600 км-ро қатораи якум дар муддати $\frac{600}{x}$ соат ва қатораи дуюм дар муддати

$\frac{600}{y}$ соат тай мекунад. Мувофиқи шарти масъала вобастагиҳои зеринро ҳосил кардан мумкин аст: $\frac{600}{x}+3=\frac{600}{y}$; $\frac{250}{x}=\frac{200}{y}$. Онро чун система ҳал карда натиҷаи матлубро ҳосил кардан мумкин аст. **347**. 35 км/соат, 30 км/соат. *Нишондод.* Дар ҳолати аввала то воҳўрӣ велосипедрони якум $10x$ км ва велосипедрони дуюм $10y$ км-ро тай мекунад, ки ба вобастагии $10x+10y=650$ меорад. Дар ҳолати дуюм бошад, велосипедрони якум $8x$ км ва дуюм (8 соат + + 4 соату 20 дақиқа = 12 соату 20 дақиқа = $12\frac{1}{3}$ соат) $12\frac{1}{3}y$ км масофаро тай мекунад. Мувофиқи шарт $8x+12\frac{1}{3}y=650$ мешавад. Системаи муодилаҳои ҳосилшударо ҳал кардан зарур аст. **348**. 9 см ва 10 см. **349**. 3 м ва 4 м. **350**. *Нишондод.* Бигзор адади дурақамаи матлуб $\overline{ab}$ бошад, он гоҳ мувофиқи шарти масъала $\begin{cases}\overline{ab}=4(a+b)+3,\\ \overline{ab}+18=\overline{ba}-18\end{cases}$ -ро ҳосил мекунем. Агар ба ҷои $\overline{ab}$ ва $\overline{ab}$ мувофиқан $10a+b$ ва $10b+a$ гирем, он гоҳ баъди баъзе табдилдиҳо системаи ду муодилаи хаттии $\begin{cases}2a-b=1,\\ a-b=-4\end{cases}$ пайдо мешавад. Ҷавоб: 59. **351**. Агар касрро дар шакли $\frac{x}{y}$ гирем, он гоҳ вобастагиҳои $\frac{x+2}{y}=1$ ва $\frac{x}{y+3}=\frac{1}{2}$ -ро ҳосил мекунем ($y\neq 0$, $y\neq -3$). Барои ёфтани касри матлуб системаи $\begin{cases}x+2=y,\\ 2x=y+3\end{cases}$ -ро ҳал кардан зарур аст. Ҷавоб: $\frac{5}{7}$. **352**. 50 ва 45. *Нишондод.* Агар яке аз ададҳоро бо x ва дигарашро бо y (яъне $y=10a+5$) ишорат кунем, он гоҳ барои ёфтани ададҳои матлуб системаи $\begin{cases}x\cdot(10a+5)=2250,\\ x\cdot(10a+b)=2300\end{cases}$ -ро ҳосил мекунем. **353**. 5 км/соат, 3 км/соат. **354**. Агар адади матлуби дурақамаро дар намуди $\overline{ab}=10a+b$ гирем, он гоҳ шарти масъала ба системаи $\begin{cases}a=2b,\\ (10a+b)(a+b)=252\end{cases}$ меорад. Ҷавоб: 42. **355**. *Нишондод.* Мувофиқи шарт $x+5=a^2$, $x-11=b^2$ мешавад. Аз ин ҷо $a^2-b^2=(a-b)=16$ шуда, ду ҳолат ба миён меояд: 1) $a+b=8$, $a-b=2$, $a=5$, $b=3$, $x=20$; 2) $a+b=16$, $a-b=1$, $a=\frac{17}{2}$, $b=\frac{15}{2}$, $x=67\frac{1}{4}$. Ҷавоб: 20 ва ё $67\frac{1}{2}$.

Боби III

ПРОГРЕССИЯҲО

§7. ПРОГРЕССИЯИ АРИФМЕТИКӢ

21. Пайдарпаиҳои ададӣ ва тарзи дода шудани онҳо.

Пеш аз он, ки мафҳуми пайдарпаиҳоро дохил кунем, ба мисол муроҷиат мекунем. Агар адади тоқи маҷмӯи ададҳои натуралиро бо тартиби афзуншавиашон пай дар пай нависем, он гоҳ қатори ададҳои

$$1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13;\ 15;\ 17;\ 19;\ 21;...$$

-ро ҳосил мекунем, ки онро **пайдарпаии ададҳои бутуни мусбати тоқ** ё мухтасар **пайдарпай** меноманд. Мушоҳидаи бевосита нишон медиҳад, ки адади ҳафт дар ҷои чорум, адади 13 дар ҷои ҳафтум ва адади 105 дар ҷои панҷоҳу сеюми пайдарпаии дар боло навишташуда ҷойгир аст. Ҳамин тариқ, барои адади натуралии дилхоҳи n адади тоқи ба он мувофиқ ба $2n-1$ баробар аст, ки инро мо ҳанӯз дар синфи 6 муқаррар карда будем.

Акнун касрҳои дурусти сураташон ба 2 баробари

$$\frac{2}{3};\ \frac{2}{4};\ \frac{2}{5};\ \frac{2}{6};\ \frac{2}{7};\ \frac{2}{8};\ \frac{2}{9};\ ...$$

-ро муоина мекунем. Мебинем, ки барои ҳар гуна адади натуралии n чунин каср ба касри $\frac{2}{n+2}$ баробар аст.

Ҳамин тариқ, $\frac{2}{8}$ дар ҷои шашум, $\frac{2}{33}$ дар ҷои сию якум ва $\frac{2}{102}$ дар ҷои садуми пайдарпай меистад.

Ададҳои пайдарпаиро ташкилдиҳанда аз рӯи тартиби ҷойгиршавиашон мувофиқан аъзоҳои якум, дуюм ва ғайраи пайдарпай номида мешаванд.

Масалан, аъзоҳои якум ва панҷуми пайдарпаии ададҳои тоқ ба 1 ва 9, пайдарпаии касрҳои дурусти сураташон 2 мувофиқан ба $\frac{2}{3}$ ва $\frac{2}{7}$

баробар аст. Дар шакли умумӣ аъзоҳои пайдарпаиро бо ҳарфҳои индексдори a_1, a_2, a_3, ... ишорат карда, онҳоро мувофиқан «a-и якум, a-и дуюм, a-и сеюм, ... меҳонанд. Бо ибораи дигар индексҳо рақами *тартибии* ҷойгиршавии аъзоҳоро дар пайдарпай ифода мекунанд. Дар ин ҳолат аъзои пайдарпаии рақамаш n-ро (яъне аъзои n-уми пайдарпаиро) бо a_n ва худи пйдарпаиро бо рамзи (a_n) ишорат мекунанд.

Аз гуфтаҳои боло бармеояд, ки дар байни пайдарпаиҳои ададӣ ва маҷмӯи ададҳои натуралӣ вобастагии функсионалӣ вуҷуд дорад.

Т а ъ р и ф. **Функсияе, ки соҳаи муайяниаш маҷмӯи ададҳои натуралӣ аст, пайдарпаии ададӣ ном дорад.**

Агар ин функсия маълум бошад, он гоҳ таъриф имконият медиҳад, ки пайдарпаиро бо ёрии формулаи n-умаш ифода кунем: $a_n=f(n)$*.

Ҳамин тариқ, пайдарпаии ададҳои тоқ бо формулаи $a_n=2n-1$ ва пайдарпаии касрҳои дурусти сураташон 2 бо формулаи $a_n=\dfrac{2}{n+2}$ ифода карда мешавад.

Пайдарпаиҳои дар боло дида баромадаамон **пайдарпаиҳои беохири ададӣ** буданд, чунки миқдори аъзоҳои онҳо беохир аст. Дар ҳолати охирнок будани шумораи аъзоҳои пайдарпай онро **пайдарпаии охирнок** меноманд. Масалан, пайдарпаии

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots,\ 98,\ 99,\ 100$$

охирнок буда сад аъзоро дарбар мегирад. Акнун якчанд мисолҳои диққатҷалбкунандаро дида мебароем.

М и с о л и 1. Аз рӯи формулаи аъзои n-уми $a_n=1-2n^2$ аъзоҳои пайдарпаиро барқарор мекунем.

Бо ин мақсад ба ҷои n ададҳои натуралии 1, 2, 3, 4, 5 ва ғайраро гузошта

$$a_1=-1,\ a_2=-7,\ a_3=-17,\ a_4=-31,\ a_5=-49,\ \ldots$$

-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо аъзоҳои аввалини пайдарпаии матлуб

$$-1;\ -7;\ -17;\ -31;\ -49;\ \ldots$$

мешаванд.

М и с о л и 2. Пайдарпай бо формулаи $a_n=(-1)^n$ дода шудааст. Амалиёти дар мисоли 1 гузаронидаамонро такрор намуда

$$a_1=-1,\ a_2=1,\ a_3=-1,\ a_4=1,\ a_5=-1,\ \ldots$$

-ро ҳосил мекунем, ки аъзоҳояш фақат аз ду ададҳои пай дар пай такроршавандаи -1 ва 1 иборат аст (аъзоҳои рақамашон тоқ ба -1 ва аъзоҳои рақамашон ҷуфт ба 1 баробаранд). Пайдарпай намуди

* $a_n=f(n)$-ро ин хел ҳам маънидод мекунанд: пайдарпаии ададҳои беохири (a_n) чун функсия дар маҷмӯи ададҳои натуралӣ муайян мебошад.

$$-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \dots\ (-1)^n;\ \dots$$

-ро дорад. Ин гуна пайдарпаиҳо, ки аз ду адади аломаташон муқобили қимати мутлақашон якхела ва паи ҳам омада иборатанд, **пайдарпаии алвонҷхӯранда** номида мешаванд. Намуди умумии ин гуна пайдарпаиҳоро бо формулаи

$$a_n=(-1)^n k,$$

ки дар он k - адади ҳақиқии дилхоҳ аст, ифода мекунанд. Масалан, агар ба ҷои k ададҳои 5 ва $\sqrt{2}$ -ро гирем, он гоҳ пайдарпаиҳои

$$-5;\ 5;\ -5;\ 5;\ -5;\ \dots$$

$$-\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ \dots$$

-ро ҳосил мекунем.

Мисоли 3. Пайдарпаиеро дида мебароем, ки ҳамаи аъзоҳояш ҳамон як адади дилхоҳи c мебошад:

$$c;\ c;\ c;\ c;\ c;\ c;\ \dots .$$

Маълум, ки он бо ёрии формулаи $a_n=c$ муайян мегардад. Дар оянда ин гуна пайдарпаиҳоро **пайдарпаиҳои статсионарӣ** (аз калимаи лотинии statsionaris - беҳаракат) меноманд.

Дар боло мо бо тарзи ошкор дода шудани падарпаии (a_n)-ро муоина намудем. Акнун тарзи дигари дода шудани пайдарпай, ки **рекуррентӣ** (аз калимаи лотинии recurro - баргаштан) ном дорад, дида мебароем.

Аз мисолҳо сар мекунем.

Мисоли 4. Пайдарпаии (a_n), ки дар ин ҷо $a_1=1$ ва $a_n=2a_{n-1}-1$ аст, менависем.

Мувофиқи додашудаҳо $a_2=2\,a_1-1=2\cdot 1-1=1$, $a_3=2\,a_2-1=2\cdot 1-1=1$.

Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки барои ҳар гуна адади натуралии n $a_n=1$ аст, яъне пайдарпаии статсионарии

$$1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ \dots\ 1;\ \dots$$

пайдарпаии матлуб аст.

Мисоли 5. Аъзои якум ва дуюми пайдарпай ба 1 ва ҳар як аъзои пасояндаш ба суммаи ду аъзои пешоянда баробар аст. Аъзоҳои ин пайдарпаиро меёбем.

Аз шарт зоҳиран фаҳмост, ки аъзоҳои пайдарпай барои ҳар гуна n-и натуралӣ формулаи $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$-ро қаноат менамоянд. Аз рӯи ин формула $a_3=a_1+a_2=2$, $a_4=a_2+a_3=3$, $a_5=a_3+a_4=5$, $a_6=a_4+a_5=8$, $a_7=a_5+a_6=13$, $a_8=a_6+a_7=21$, ...-ро ҳосил мекунем.

Пайдарпаии ҳосилшудаи

$$1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ \dots$$

-ро ададҳои Фибоначчи (тахаллуси математики итолиёвӣ Леонард Пизанский (1170-1250)) меноманд.

М и с о л и 6. Аъзои якуми пайдарпаии (a_n) ба 1 баробар аст. Ҳар як аъзои пасоянд ба сечандаи куби аъзои пешоянд баробар аст. Аъзоҳои ин пайдарпаиро меёбем.

Мувофиқи шартҳои додашуда $a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n^3$. Ин формулаҳо имконият медиҳанд, ки аз рӯи аъзои якуми маълуми он $a_2=3 \cdot a_1^3=$ $=3$-ро, баъд аз рӯи a_2 аъзои сеюм $a_3=3a_2^3=81$ ва ғайраҳоро ҳисоб кунем. Ин ба пайдарпаии

$$1;\ 3;\ 81;\ 1594\,323;\ \ldots$$

меоварад.

Формулае, ки аъзои дилхоҳи пайдарпаиро аз ягон аъзояш сар карда ба воситаи як ё якчанд аъзои пешоянд ифода мекунад, формулаи **рекуррентӣ** меноманд. Формулаҳои дар мисолҳои 5 ва 6 навиштаамон рекуррентианд.

М и с о л и 7. Агар (a_n) пайдарпаии ададҳои натуралии ба 7 каратӣ бошад, он гоҳ

а) чор аъзои аввалааш;

б) аъзои панҷоҳу дуюм ва $3p$-умаш

-ро меёбем.

Аз рӯи шарти масъала маълум аст, ки $a_n=7n$ мешавад.

а) Дар формулаи $a_n=7n$ ба ҷои n ададҳои 1, 2, 3 ва 4-ро гузошта чор аъзои аввали матлуби пайдарпаиро меёбем:

$$a_1=7 \cdot 1=7, \quad a_2=7 \cdot 2=14, \quad a_3=7 \cdot 3=21, \quad a_4=7 \cdot 4=28;$$

б) Тарзи болоии амалиётро такрор карда истода a_{52} ва a_{3p}-ро дар намуди зерин ёфтан мумкин аст:

$$a_{52}=7 \cdot 52=364, \quad a_{3p}=7 \cdot 3p=21p.$$

М и с о л и 8. Формулаи аъзои n-умро барои пайдарпаии

$$2;\ 5;\ 10;\ 17;\ 26;\ \ldots$$

тартиб медиҳем.

Аъзоҳои пайдарпаиро дар шакли зерин менависем: $a_1=2=1^2+1$; $a_2=5=2^2+1$; $a_3=10=3^2+1$; $a_4=17=4^2+1$; $a_5=26=5^2+1$; $a_6=37=6^2+1$; ... .

Мушоҳидаи бевоситаи навиштаҷотҳои болоӣ нишон медиҳанд, ки аъзои n-уми ин пайдарпай бо формулаи $a_n=n^2+1$ ифода мешавад.

?

1. Таърифи пайдарпаии ададиро диҳед. **2.** Дар кадом ҳолат барои (a_n) формулаи $a_n=f(n)$, ки a_n аъзои n-уми пайдарпай аст, дуруст мебошад? **3.** Оё маҷмӯи ададҳои ҷуфт ва касрҳои мусбати дурусти сураташон ба 1 баробар пайдарпаии ададиро ташкил медиҳанд? **4.** Чӣ тавр аз рӯи аъзои n-уми пайдарпай, ки бо формулаи $a_n=f(n)$ ифода мешавад, пайдарпаиро тартиб додан мумкин аст? Мисол оред. **5.** Мисолҳои пайдарпаиҳои статсионарӣ ва рекуррентиро оред. **6.** Пайдарпаиҳои беохир ва охирнокро шарҳ дода, мисолҳо оред.

356. Аъзоҳои номаълуми пайдарпаии

а) 2; 4; ?; 8; 10; ?; ?; 16; б) 144; ?; 36; 18; ?; ?;? $\frac{9}{8}$ -ро ёбед

357. Пайдарпаии ададии (a_n)

1; 3; 9; 27; 81; 243; 729; 2187; 6561; 19683; 59049

аст. Аъзоҳое, ки дар байни

а) a_1 ва a_4 б) a_3 ва a_6 в) a_5 ва a_9 г) a_9 ва a_{11}

ҷойгиранд ёбед.

358. Агар (b_n) ва пайдарпаии ададҳои натуралии ба 4 каратӣ бошад, он гоҳ

а) шаш аъзои аввалааш;

б) аъзои нуҳум ва саду якумаш;

в) аъзои $2k$-умаш

-ро ёбед.

359. (c_n) пайдарпаиест, ки дар он ҳамаи аъзоҳои индексаш тоқ ба 2 ва аъзоҳои индексаш ҷуфт ба −1 баробар аст.

а) Панҷ аъзои аввалаашро нависед;

б) аъзоҳои c_7, c_{12}, c_{21}, c_{103}, c_{204}, c_{2k-1}, c_{2k}-ро ки $k \in N$ аст, ёбед.

360. (x_n) пайдарпаии аъзоҳояш дучандаи квадрати ададҳои натуралӣ аст.

а) ҳашт аъзои аввалашро нависед;

б) аъзоҳои x_{18}; x_{23}; x_{41} ва x_{2n}-ро ёбед.

361 Формулаи аъзои n-умро барои пайдарпай тартиб диҳед:

а) $1; 2; 3; 4; 5; \ldots$ б) $2;\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{6}{5};\ldots$

в) $\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \ldots$ г) $\frac{1}{1\cdot 2};\ \frac{1}{2\cdot 3};\ \frac{1}{3\cdot 4};\ \frac{1}{4\cdot 5};\ \ldots$

362. Аз рӯи аъзоҳои додашудаи пайдарпаии

а) $\frac{2}{3};\ \frac{4}{5};\ \frac{6}{7};\ \frac{8}{9};\ \frac{10}{11};\ \ldots$ б) $\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \frac{5}{6};\ \frac{6}{7};\ \ldots$

формулаи аъзои n-умашро тартиб диҳед.

363. Пайдарпаии ададиро тартиб диҳед, агар:

а) $a_n = 0{,}5n + 2,\ \ 1 \le n \le 6;$ г) $a_n = (1)^n \cdot 12,\ \ 1 \le n \le 10;$

б) $a_n = -n^2 + 1,\ \ 1 \le n \le 3;$ д) $a_n = n^2 + 2n,\ \ 1 \le n \le 4;$

в) $a_n = 4,\ \ 1 \le n \le 5$ е) $a_n = n^2 - 4n + 3,\ \ 1 \le n \le 5;$

бошад

364. Ҳафт аъзои аввали пайдарпаиро, ки бо формулаи:

а) $x_n = 2n^2 - 1;$ г) $x_n = 2n - 5;$ ж) $x_n = 3n^2 + 1;$

б) $x_n = 3n + 2;$ д) $x_n = \dfrac{2n}{n+1};$ з) $x_n = (-1)^n \cdot 3;$

в) $x_n = \dfrac{2n-1}{n+1};$ е) $x_n = 3 \cdot 2^{n-3};$ и) $x_n = 0{,}5 \cdot 4^{n+1};$

дода шудааст, ёбед.

365. Пайдарпаии (b_n) бо формулаи $b_n = n^3+2n$ дода шудааст. Аъзоҳои b_4, b_{13} ва b_{61}-и онро ёбед.

366. Аъзоҳои дуюм, сеюм, чорум, панҷум ва шашуми пайдарпаии (c_n)-ро ҳисоб кунед: агар:

а) $c_1=12$ ва ҳар як аъзои пасоянда аз аъзои пешоянда 8 воҳид калон бошад (яъне $c_{n+1}=c_n+8$);

б) $c_1=400$ ва ҳар як аъзои пасоянда аз пешоянда 4 маротиба хурд бошад (яъне $c_{n+1}=c_n : 4$).

367. Агар:

а) $a_1=19$, $a_{n+1}=a_n+1$; д) $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n+3$;

б) $a_1=1000$, $a_{n+1}=0{,}01a_n$; е) $a_1=9$, $a_{n+1}=3a_n^2+7$;

в) $a_1=160$, $a_{n+1}=-0{,}5a_n$; ж) $a_1=10$, $a_{n+1}=\dfrac{3}{a_n^2}$;

г) $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n^{-1}$; з) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n^3-1$

бошад, шаш аъзои аввалаи пайдарпаии (a_n)-ро нависед.

368. Агар:

а) $b_1=15$, $b_{n+1}=b_n+5$; д) $b_1=4$, $b_{n+1}= 2b_n-3$;

б) $b_1=25$, $b_{n+1}=5b_n-3$; е) $b_1=6$, $b_{n+1}=2b_n^{-1}$;

бошад, панҷ аъзои аввалаи пайдарпаии (b_n)-ро нависед.

369. Аъзои якуми пайдарпаии (x_n) ба 3 баробар буда, ҳар як аъзои пасояндаш ба куби аъзои пешинааш баробар аст ($x_1=3$; $x_{n+1}=x_n^3$). Се аъзои аввалаи пайдарпаиро ёбед.

370. Бигузор $y_1=1$, $y_{n+1}=0{,}5y_n$ бошад. Пайдарпаии (y_n)-ро тартиб диҳед.

371. Аъзои пайдарпаии (a_n)-ро аз рӯи формулаи $a_n=(-1)^n \cdot 7$ ёбед.

Машқҳо барои такрор

372. Ифодаҳои зеринро содда кунед:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$; г) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$.

373. Ҳисоб кунед:

а) $(2^2)^3$; в) $-(-2^2)^3$; д) $(4^2-5^2)^2$;

б) $(-2)^5 \cdot 3$; г) $(4^2-3^2)^3$; е) $(3^3-2^3)^2$.

374. Муодилаи $x^2-5x+6=0$-ро ҳал накарда:

а) x_1+x_2; б) $x_1 \cdot x_2$; в) $x_1^2 \cdot x_2+x_1 \cdot x_2^2$

-ро ҳисоб кунед

375. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\dfrac{4}{x+3}+1=\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{5}{3-x}$; б) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{4}{1-x}=\dfrac{5-x}{x^2-1}$.

376. Қаиқи мотордор дар 4 соат 44 км ба муқобили ҷараёни дарё ва 56 км ба равиши ҷараён шино кард. Агар суръати ҷараёни дарё ба 3 км/соат баробар бошад, он гоҳ суръати қаиқро дар оби ором ёбед?

377. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 3x + y = 3, \\ 7x - y = -23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2{,}1x + 1{,}3y = 6, \\ y - x = 2. \end{cases}$

378. Функсия бо формулаи $f(x) = \dfrac{x^2 - 7}{x + 1}$ дода шудааст. Ёбед:

а) $f(1)$; б) $f(-1)$; в) $f(0)$; г) $f(1{,}1)$; д) $f(-0{,}5)$.

379. Масъалаи Магнитскийро аз китоби «Арифметика»-аш ҳал кунед: Агар квадрати ададро ба 108 ҷамъ кунем, он гоҳ ададе ҳосил мешавад, ки аз худи адади матлуб 24 маротиба зиёд аст. Ададро ёбед.

22. Таърифи прогрессияи арифметикӣ

Дар пункти 21 ба мафҳуми пайдарпай хеле хуб шинос шудем. Пайдарпаиҳои

(a_n) 1; 6; 11; 16; 21; …

(b_n) 2; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; …

(c_n) −1; −5; −9; −13; −17; …

-ро, ки бо баъзе хосиятҳояшон диққатҷалбкунандаанд, дида мебароем. Масалан, пайдарпаии (a_n) пайдарпаии ададҳои натуралиеро ифода мекунад, ки аз аъзои дуюм сар карда ҳангоми ба 5 тақсим кардан дар бақия 1 мемонад. Аз тарафи дигар, ҳар як аъзои ин пайдарпай, аз аъзои дуюм сар карда, дар натиҷаи ба аъзои пешоянд ҷамъ кардани ҳамон як адади $d=5$ ҳосил мешавад. Ногуфта намонад, ки хусусияти охирин барои пайдарпаиҳои дуюм ва сеюм (яъне (b_n) ва (c_n) ҷой дошта бароящон адади дар боло номбаршуда мувофиқан $d=0{,}1$ ва $d=-4$ мебошад. Хулоса, хусусияти фарққунандаи ин пайдарпаиҳо дар он аст, ки барои n-и дилхоҳ аъзои онҳо баробарии $a_{n+1}=a_n+d$-ро қаноат менамоянд. Дар ҳақиқат, барои пайдарпаиҳои интихобкардаамон мувофиқан $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+5$, $b_1=2$, $b_{n+1}=b_n+0{,}1$ ва $c_1=-1$, $c_{n+1}=c_n-4$ мебошанд. Ин пайдарпаиҳо мисоли **прогрессияи арифметикӣ** мебошанд.

Т а ъ р и ф. **Пайдарпаие, ки ҳар як аъзояш аз аъзои дуюм сар карда дар натиҷа ба аъзои пешоянд ҷамъ кардани ҳамон як адад ҳосил мешавад, прогрессияи арифметикӣ* номида мешавад.**

Ба ибораи дигар, иҷрои шарти $a_{n+1}=a_n+d$ шаҳодат медиҳад, ки пайдарпаии (a_n) **прогрессияи арифметикӣ** мебошад. Аз баробарии охирин баробарии

$$a_{n+1}-a_n=d$$

-ро навиштан мумкин аст (он аз худи таъриф ҳам бармеояд), ки маънои зеринро дорад: аз аъзои дуюм сар карда фарқи байни аъзои

* Прогрессия аз калимаи лотинии progressio гирифта шуда, маънояш «ҳаракат ба пеш» аст.

дилхоҳи прогрессияи арифметикӣ аз аъзои пешояндаш ба адади доимии d баробар аст. Адади d-ро **фарқи прогрессияи арифметикӣ** меноманд.

Аз муҳокимарониҳои болой бармеояд, ки **барои тартиб додани прогрессияи арифметикӣ донистани аъзои якум ва фарқи он кифоя аст.**

Масалан, агар $a_1=2$ ва $d=3$ бошад, он гоҳ мувофиқи формулаи $a_{n+1}=a_n+d$ пайдарпаии

$$2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14;\ \ldots$$

-ро ҳосил мекунем, ки вай прогрессияи арифметикӣ аст.

Айнан ҳамин хел ҳангоми $a_1=5$ ва $d=-3$ будан прогрессияи арифметикии

$$5;\ 2;\ -1;\ -4;\ -7;\ -10;\ \ldots$$

ҳосил мешавад. Агар $a_1=1$ ва а) $d=1$, б) $d=2$ бошад, он гоҳ мувофиқан пайдарпаиҳои

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

ва

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$$

-ро ҳосил мекунем. Яъне ададҳои натуралӣ ва ададҳои тоқи мусбати бутун прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд.

Пайдарпаии статсионарии

$$5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ \ldots$$

низ прогрессияи арифметикиро бо аъзои $a_n=5$ ва фарқи $d=0$ ифода мекунад.

Пайдарпаиҳои

$$1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \ldots$$

ва

$$2,\ 5,\ 8,\ 10,\ 13,\ 15,\ 18,\ \ldots$$

прогрессияи арифметикӣ нестанд, чунки барои якумаш $a_3-a_2=5-3=2$, $a_4-a_3=6-5=1$ ва барои дуюмаш $a_3-a_2=8-5=3$, $a_4-a_3=10-8=2$.

Қайд мекунем, ки агар фарқи прогрессия мусбат бошад, он гоҳ онро **афзуншаванда** ва агар манфӣ бошад, **камшаванда** меноманд.

Масалан прогрессияи

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots$$

афзуншаванда буда, прогрессияи

$$4,\ 2,\ 0,\ -2,\ -4,\ -6,\ \ldots$$

камшаванда аст.

Дар охир таъкид менамоем, ки прогрессияҳои охирнок ва беохир ба монанди пайдарпаиҳои охирнок ва беохир (ниг. ба п. 21) маънидод карда мешаванд. Ин тасдиқот табиатан дуруст аст, чунки чӣ хеле дар боло гуфта гузашта будем, прогрессияҳо як намуди махсуси пайдарпаиҳои ададианд.

Аъзоҳои аввалин ва охирини прогрессияи охирнокро аъзоҳои канорӣ меноманд. Масалан. дар прогрессияи арифметикии

9; 16; 23; 30; 37;

аъзоҳои 9 ва 37 канорианд.

? 1. Таърифи прогрессияи арифметикиро баён карда мисолҳо оред. 2. Фарқи чунин прогрессия гуфта чиро мегӯянд? 3. Аз рӯи аъзоҳои якум ва фарқи прогрессияи арифметикӣ онро чӣ тавр тартиб додан мумкин аст? Мисолҳо оред.

380. Оё пайдарпаи прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад:

а) 1; 4; 10; 11; 14; 17; ...

б) −2: −4; −6: −8; −10: −12; ...

в) 3; 3: 3: 3: 3; 3; ...

г) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{8}$; ...?

381. Аз рӯи аъзои якум ва фарқи прогрессия прогрессияи арифметикиро тартиб диҳед:

а) $a_1 = 2$, $d=1$;

б) $a_1=\frac{1}{2}$, $d=\frac{1}{2}$;

в) $a_1=-7$, $d=3$;

г) $a_1=5$, $d=2$;

д) $a_1=2{,}1$, $d=0{,}2$;

е) $a_1=-1$, $d=0$;

ж) $a_1=0{,}51$, $d=0{,}09$;

з) $a_1=2{,}1$, $d=-0{,}1$;

и) $a_1=3$, $d=0{,}5$;

к) $a_1=1$, $d=9$;

382. Фарқи прогрессия d-ро ёбед, агар прогрессияи арифметикӣ намуди:

а) 2; 4; 6; 8; ...

б) $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{10}{3}$; ...

в) −1; −2; −3: −4; ...

г) 1; 5; 9; 13; ...

д) −10; 0; 10; 20; ...

е) −10; −19; −28; −37; ...

ж) 8; 15; 22; 29; ...

з) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; ...

и) −9; −7; −5; −3; ...

к) 13; 19; 25; 31; ...

-ро дошта бошад.

Машқҳо барои такрор

383. Аз пункти A ба пункти B автомобили боркаш ва баъди 1 соат аз A ба B автомобили сабукрав ба роҳ баромад. Ба пункти B автомобилҳо дар як вақт омада расиданд. Агар автомобилҳо аз пункти A ва B дар як вақт ба пешвози якдигар ба роҳ мебаромаданд, он гоҳ баъди 1 соату 12 дақиқаи ҳаракат вомехӯрданд. Автомобили боркаш масофаи пунктҳои A ва B-ро дар чанд соат тай кардааст?

384. Амалро иҷро кунед:

а) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$;

б) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}:\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{x^2+x+1}{x}$.

385. Муодиларо ҳал кунед:

а) $|x|+x^3=0$; б) $(2x-1)(|x|+1)=3$.

386. Исбот кунед, ки $3^{2n+2}-8n-9$ ба 64 бебақия тақсим мешавад.

387. Тарафҳои росткунҷаи масоҳаташ ба a см^2 ва кунҷи тези байн диагоналҳояш ба 60° баробарро ёбед.

388. Кадоме аз нуктаҳои $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ -3)$, $C(3;\ 3)$, $D(-2{,}1;\ 1{,}2)$, $E\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$, $F\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$ ба графики функсияи $y=2|x|-3$ тааллуқ дорад?

389. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $f(x)=\dfrac{2x}{4-x}$; б) $f(x)=\dfrac{8}{x^2+4}$.

390. Аз рӯи аъзоҳои додашудаи пайдарпаии

а) $\frac{3}{2};\ \frac{6}{3};\ \frac{9}{4};\ \frac{12}{5};\ \frac{15}{6};\ \ldots$ б) $-6;\ 6;\ -6;\ 6;\ -6;\ \ldots$

формулаи аъзои n-умашро тартиб диҳед.

23. Формулаи аъзои n-уми прогрессияи арифметикӣ

Чӣ тавре, ки дар пункти 22 дидем, аъзои якум ва фарқи прогрессияи арифметикиро дониста, пай дар пай (яъне аввал аъзои дуюм, баъд аъзои сеюм ва ҳоказо) аъзои дилхоҳи онро ёфтан мумкин аст. Аммо барои ёфтани аъзои рақами тартибиаш ба қадри имкон калони прогрессия ин тарз муфид набуда, ба ғайр аз ҳисобу китоби зиёд, вақти тулониро талаб менамояд. Бо мақсади ёфтани тарзи вақти каму ҳисоби кӯтоҳро талабкунанда боз як маротиба ба таърифи прогрессия мурочиат мекунем. Дар асоси он

$$\begin{aligned}
a_2&=a_1+d\\
a_3&=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,\\
a_4&=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,\\
a_5&=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d
\end{aligned}$$

ва ғайра. Аз таҳлили қонуни тағйирёбӣ маълум мегардад, ки коэффитсиентҳои назди d-и ифодаҳои ҳосилшуда аз индекси аъзои мувофиқи прогрессия як воҳид кам аст:

$$a_2=a_1+\underline{1}\cdot d,\quad a_3=a_1+\underline{2}\cdot d,\quad a_4=a_1+\underline{3}\cdot d,\quad a_5=a_1+\underline{4}\cdot d.$$

Аз ин рӯ барои ёфтани a_n ба a_1 ифодаи $(n-1)\cdot d$-ро ҷамъ кардан кофист, яъне

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$$

мешавад.

Формулаи охирин ба ёфтани **аъзои n-уми (дилхоҳи) прогрессияи арифметикӣ** имконият медиҳад. Истифодаи онро дар ҳалли мисолҳои мушаххас меорем.

Мисоли 1. Пайдарпаии (a_n) прогрессияи арифметикӣ буда, дар он $a_1=0{,}32$ ва $d=0{,}22$ аст. Аъзои бисту сеюми онро меёбем:

$$a_{23}=a_1+(23-1)d=0{,}32+22\cdot 0{,}22=0{,}32+4{,}84=5{,}16.$$

Ҷавоб: $a_{23}=5{,}16$.

М и с о л и 2. Муайян мекунем, ки адади -108 аъзои прогрессияи арифметикии (x_n):

$$18;\ 13{,}8;\ 9{,}6;\ 5{,}4;\ 1{,}2;\ -3;\ \dots$$

ҳаст ё на.

Бо ин мақсад аз рӯи аъзоҳои прогрессияи додашуда d-ро меёбем: $d=x_2-x_1=13{,}8-18=-4{,}2$. Формулаи аъзои n-уми прогрессияи арифметикии (x_n)-ро тартиб медиҳем:

$$x_n=18+(n-1)(-4{,}2) \quad \text{ё} \quad x_n=22{,}2-4{,}2n.$$

Агар чунин адади натуралии n мавҷуд бошад, ки қимати ифодаи $22{,}2-4{,}2n$ ба -108 баробар шавад, он гоҳ ин адад аъзои прогрессияи арифметикии (x_n) мешавад. Барои муайян кардани ин муодилаи

$$22{,}2-4{,}2n=-108$$

-ро ҳал мекунем:

$$4{,}2n=108+22{,}2, \quad 4{,}2n=130{,}2, \quad n=31.$$

Ҳамин тариқ, адади -108 аъзои сию якуми прогрессияи арифметикии додашуда будааст.

Формулаи аъзои дилхоҳи прогрессияи арифметикӣ имконият медиҳад, ки аз рӯи ягон аъзо (яъне a_s) ва фарқаш (d) ё аз рӯи ду аъзо (a_s ва a_k) ҳар гуна аъзои дигари (яъне a_l, ки $l\neq k, s$) он ёфта шавад.

М и с о л и 3. Агар $a_{20}=214$ ва $d=0{,}7$ бошад, a_1-ро меёбем.

Формулаи аъзои n-уми прогрессияи арифметикиро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$a_{20}=a_1+(n-1)d; \qquad a_1=a_{20}-19d=214-19\cdot 0{,}7=214-13{,}3=200{,}7.$$

Аз ин ҷо $a_1=200{,}7$. Ҳамин тариқ, прогрессия бо аъзои якуми ба 200,7 баробар *сар* мешавад.

М и с о л и 4. Агар $a_6=32$ ва $a_{19}=123$ бошад, аъзои якум ва фарқи прогрессияи (a_n)-ро меёбем. Дар асоси додашудаҳо системаи муодилаҳои дуномаълумаи

$$\begin{cases} a_6=32, \\ a_{19}=123 \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} a_1+5d=32, \\ a_1+18d=123 \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем. Онро бо тарзи ҷамъкунии алгебравӣ ҳал мекунем:

$$\begin{cases} a_1+18d=123, \\ -a_1-5d=-32; \end{cases} \begin{cases} a_1+18d=123, \\ 13d=91; \end{cases} \begin{cases} a_1=123-18\cdot 7, \\ d=7; \end{cases} \begin{cases} a_1=-3, \\ d=7. \end{cases}$$

Инак, аъзои якуми прогрессия ба -3 ва фарқаш ба 7 баробар аст.

М и с о л и 5. Агар $a_5=72$ ва $a_{11}=138$ бошад, аъзои понздаҳуми прогрессияи (a_n)-ро меёбем. Дар навбати аввал аз рӯи схемаи ҳалли мисоли 4 амал карда, аъзои якум ва фарқи прогрессияро аз системаи зерин меёбем:

$$\begin{cases} a_5=72, \\ a_{11}=138; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1+4d=72, \\ a_1+10d=138; \end{cases} \qquad \begin{cases} 6d=66, \\ a_1+4d=72; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=72-4\cdot 11, \\ d=11; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1=72-44, \\ d=11; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1=28, \\ d=11. \end{cases}$$

Аъзои матлуби понздаҳуми прогрессияи арифметикӣ баъди ба ҷои a_1 ва d гузоштани қиматҳои ёфтаамон ба

$$a_{15}=28+(15-1)\cdot 11=28+14\cdot 11=28+154=182$$

баробар мешавад.

Мисоли 6. Дар прогрессияи арифметикии (x_n) аъзои якум ба 8,7 ва фарқ ба $-0,3$ баробар аст. Муқаррар мекунем, ки шартҳои $x_n \geq 0$ ва $x_n<0$ барои кадом аъзоҳои прогрессия иҷро мешаванд.

Ҳал. Барои $x_1+(n-1)d$, ки ба x_n баробар аст, ҳосил мекунем:

$$8,7+(n-1)(-0,3)=8,7+0,3-0,3n=9-0,3n.$$

Аз ин ҷо, ҳангоми $x_n \geq 0$ будан нобаробарии $9-0,3n \geq 0$ ё $n \leq 30$ ва ҳангоми $x_n<0$ будан нобаробарии $n>30$-ро ҳосил мекунем.

Ҳамин тарик, 30-тои аъзоҳои аввалаи прогрессия ғайриманфӣ буда, пасояндҳояш (яъне аз аъзои 31-ум сар карда) ададҳои манфианд.

Мисоли 7. Ҷисми ростхатта ҳаракаткунанда дар соати аввал 13 км масофаро тай кард. Агар он дар ҳар як соати минбаъда назар ба соати пешоянд 1,5 км-ро зиёдтар тай кунад, он гоҳ дар соати ёздаҳуми ҳаракаташ вай кадом масофаро тай мекунад?

Ҳал. Ҳаракати муоинашаванда (аз рӯи шарт) ҳаракати ростхаттаи номунтазам аст, чунки дар фосилаҳои баробари вақт масофаи гуногунро тай менамояд. Дар ҳақиқат, ҷисм соати аввал $S_1=13$ км, соати дуюм $S_2=S_1+1,5=14,5$ км. соати сеюм $S_3=S_2+1,5=16$ км, ... масофаро тай мекунад. Хулоса, тағйирёбии вазъияти ҷисм баъди ҳар як соати ҳаракаташ намуди пайдарпаии (S_n)

$$13;\ 14,5;\ 16;\ 17,5;\ \ldots$$

-ро мегирад, ки он прогрессияи арифметикиро бо нишондодҳои $S_1=13$ ва $d=1,5$ ифода мекунад. Аз ин ҷо мо формулаи $S_n=S_1+(n-1)d$-ро навишта метавонем, ки бо ёрии он дар соати дилхоҳи n чанд км масофа тай кардани ҷисмро меёбем. Ҳангоми $n-11$ будан

$$S_{11}=S_1+(11-1)d=13+10\cdot 1,5=13+15=28 \text{ (км)}$$

мешавад.

Ҷавоб: Ҷисм дар соати ёздаҳуми ҳаракаташ 28 км масофаро тай мекунад.

Мисоли 8. Дар байни ададҳои 4 ва 40 чунин чор ададеро гузоред, ки онҳо дар якҷоягӣ бо ададҳои додашуда прогрессияи арифметикиро ташкил диҳад.

Ҳал. Мувофиқи шарт мо бояд пайдарпаии охирнокӣ ба прогрессияи арифметикии

$$4;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ 40$$

мувофиқояндаро барқарор намоем. Аз қиматҳои маълуми $a_1=4$ ва $a_6=40$ истифода бурда d-ро меёбем:

$$a_6=a_1+5d; \quad 5d=a_6-a_1; \quad 5d=40-4; \quad 5d=36; \quad d=7,2.$$

Аз ин ҷо пай дар пай аъзоҳои матлуби

$a_2=4+7,2=11,2;$ $a_3=4+2\cdot 7,2=18,4;$

$a_4=4+3\cdot 7,2=25,6;$ $a_5=4+4\cdot 7,2=32,8$

ҳосил мешаванд.

Ҷ а в о б: 11,2; 18,4; 25,6; 32,8.

М и с о л и 9. Маълум, ки суммаи дучандаи аъзои якум ва панҷуми прогрессияи арифметикӣ ба 7 ва фарқи аъзои сеюму ҳафтум ба 8 баробар аст. Прогрессияро барқарор мекунем.

Ҳ а л. Бо мақсади ёфтани аъзои якум ва фарқи прогрессия аз рӯи шарт системаи

$$\begin{cases} 2a_1 + a_5 = 7, \\ a_3 - a_7 = 8; \end{cases}$$

-ро тартиб дода, онро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 2a_1 + a_1 + 4d = 7, \\ a_1 + 2d - a_1 - 6d = 8; \end{cases} \begin{cases} 3a_1 + 4d = 7, \\ -4d = 8; \end{cases} \begin{cases} 3a_1 = 7 + 8, \\ d = -2; \end{cases} \begin{cases} a_1 = 5, \\ d = -2. \end{cases}$$

Аз рӯи ин нишондодҳои охирин прогрессияи матлуб

5; 3; 1; −1; −3; −5; −7; ... мешавад.

Э з о ҳ. Формулаи аъзои n-уми прогрессияро табдил дода ҳосил мекунем:

$$a_n=a_1+(n-1)d=a_1+n\cdot d-d=n\cdot d+(a_1-d), \quad a_n=n\cdot d+m,$$

ки $m=a_1-d$ аст. *Яъне формулаи аъзои n-уми прогрессияи арифметикиро* дар шакли

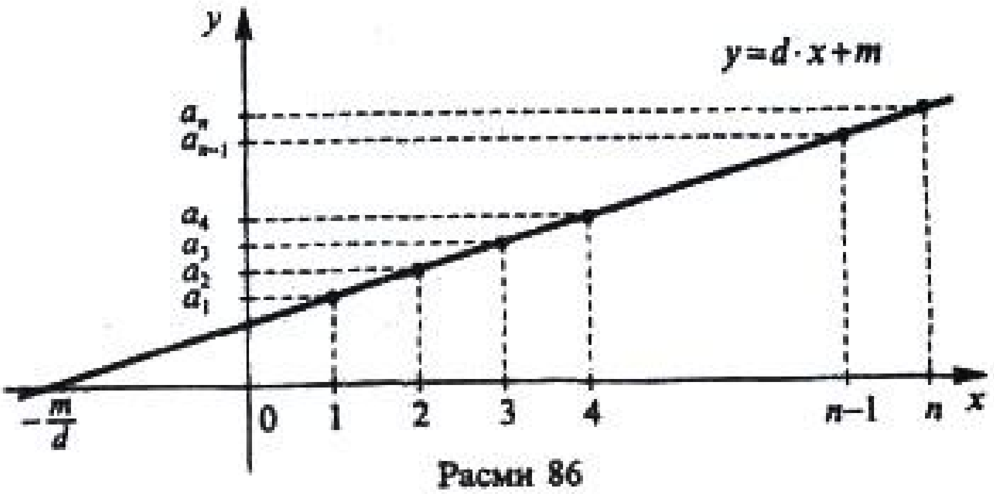
$$a_n=n\cdot d+m$$

ҳам навиштан мумкин аст.

Формулаи охирин муодилаи $y=ax+b$-и хати ростро, ки дар синфи 7 омӯхта шуда буд, ба хотир меорад. Соҳаи муайянии он тамоми нуктаҳои тири ададӣ аст. Вале соҳаи муайянии $a_n=n\cdot d+m$ бошад фақат маҷмӯи ададҳои натуралиро ташкил медиҳад. Бо тағйирёбии n (яъне қиматҳои 1, 2, 3, ... k, ... адади n) қиматҳои

$$a_1=d+m, \quad a_2=2d+m, \quad a_3=3d+m, \quad \ldots \quad a_k=k\cdot d+m, \quad \ldots$$

-ро ҳосил мекунем. Нуктаҳои $(n;\ a_n)$, $n\in N$ координатаҳои маҷмӯи нуқтаҳои дар хати рости $y=x\cdot d+m$ хобандаро, ки аз якдигар дар масофаи ба $\sqrt{1+d^2}$ баробар ҷойгиранд, ифода мекунад. (ниг. ба расми 86).



Расми 86

Шакли нави $a_n=n \cdot d+m$-и навишти аъзои n–уми прогрессияи арифметикии (a_n) аз он шаҳодат медиҳад, ки ҳамаи аъзоҳои прогрессия дар ҳамвории координатавӣ ординатаҳои нуқтаҳои $(n; a_n)$, $n \in N$ мебошад, ки онҳо дар хати рости $y=x \cdot d+m$ мехобанд.

Ниҳоят қайд мекунем, ки тасдиқоти зерин низ ҷой дорад: *ҳар гуна пайдарпаии (a_n)-и аъзои дилхоҳаш бо формулаи $a_n=n \cdot d+m$ дода шуда, прогрессияи арифметикӣ мебошад.* Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки фарқи $a_{n+1}-a_n$ ба

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)d+m-(n \cdot d+m)=nd+d+m-nd-m=d$$

баробар мешавад: $a_{n+1}-a_n=d$.

Баробарии охирин аз он шаҳодат медиҳад, ки пайдарпаии (a_n) дар ҳақиқат прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад.

Масалан, пайдарпаии (a_n), ки бо формулаи $a_n=2n+1$ дода шудааст, прогрессияи арифметикиро бо фарқи $d=2$ ва аъзои якуми $a_1=1 \cdot d+m=2+1=3$ ифода мекунад.

? 1. Аъзои n-уми прогрессияи арифметикии (a_n)-ро аз рӯи кадом формула меёбанд? 2. Агар a_k ва a_m $(k \neq m)$ аъзоҳои прогрессияи арифметикӣ бошанд, он гоҳ a_1 ва d-ро аз рӯи формулаи $a_n=a_1+(n-1)d$ ёфта метавонем? 3. Тасдиқотҳоеро, ки аз формулаи $a_n=n \cdot d+m$ бармеоянд, баён кунед. Мисолҳо оред.

391. (a_n) прогрессияи арифметикиро бо аъзои якуми a_1 ва фарқи d ифода мекунад. Аъзоҳои

а) a_{17}; б) a_{126}; в) a_{281}; г) a_{k+2}; д) a_{k+15}; е) a_{2k+1}-ро ба воситаи a_1 ва d ифода кунед.

392. Пайдарпаии (b_n) прогрессияи арифметикӣ мебошад. Агар:

а) $b_1=28$ ва $d=3$ бошад, b_5-ро;
б) $b_1=15{,}8$ ва $d=-1{,}5$ бошад, b_{21}-ро;
в) $b_1=-3$ ва $d=0{,}7$ бошад, b_{111}-ро
г) $b_1=108$ ва $d=-0{,}6$ бошад, b_{216}-ро;
д) $b_1=-1$ ва $d=2$ бошад, b_{31}-ро;
е) $b_1=12{,}1$ ва $d=-0{,}1$ бошад, b_{18}-ро;
ж) $b_1=5$ ва $d=2{,}3$ бошад, b_{23}-ро;
з) $b_1=103$ ва $d=-5$ бошад, b_{57}-ро;
и) $b_1=-41$ ва $d=4$ бошад, b_{19}-ро;
к) $b_1=191$ ва $d=-21$ бошад, b_7-ро ёбед.

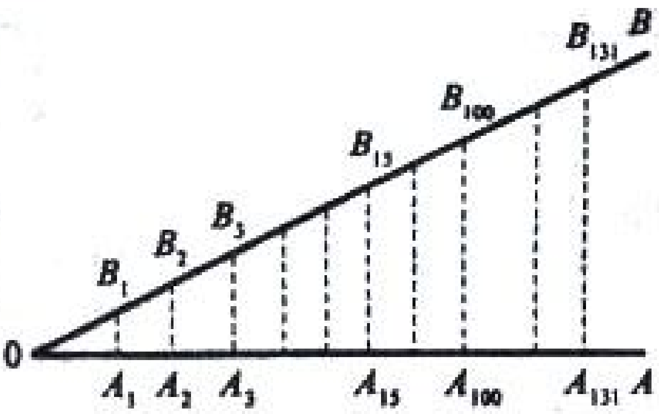
393. Аъзои даҳум, бисту якум ва n-уми прогрессияи арифметикии

а) $\frac{2}{3}$; -2; ... б) 2,3; 1,3; ... в) -15; 10; ...

-ро ёбед.

394. Аъзои 8-ум, 23-юм ва n-уми прогрессияи арифметикии а) $-8,5$; $-6,5$; ... б) 10; 7; ... в) 15; -10; ...-ро ёбед.

395. Агар тайёраи аз Душанбе ба Маскав парвозкунанда суръати ҳаракаташро ҳар як дақиқа мунтазам 100 м зиёд кунад, он гоҳ баъди 1 соат ба кадом суръат доро мешавад?



Расми 87

396. Сангпушт соати аввали ҳаракаташ 0,8 км ва ҳар як соати минбаъда назар ба соати пешоянд 0,3 км масофаро зиёдтар тай кард. Сангпушт соати ҳафтуми ҳаракат чӣ қадар масофаро тай мекунад?

397. Қатора аз шаҳри Хуҷанд ба сӯи Конибодом равона шуда, суръаташро ҳар дақиқа 80 м мунтазам зиёд мекард. Суръати қатора дар дақиқаи бисту шашум чӣ қадар мешавад?

398. Кунҷи дилхоҳи AOB дода шудааст. Аз қулла дар тарафи OA порчаҳои баробар ҷудо шуда, аз нугҳои онҳо хатҳои рости параллел гузаронидаанд (расми 87). Агар дарозии порчаи A_1B_1 0,5 см бошад, он гоҳ дарозии порчаҳои $A_{15}B_{15}$, $A_{100}B_{100}$ ва $A_{131}B_{131}$ ба чанд баробар мешавад?

399. Агар:

а) $a_{301}=1212$, $d=4$;   в) $a_{52}=243$, $d=2$;

б) $a_{145}=908$, $d=-7$;   г) $a_{18}=97$, $d=3$

бошад, аъзои якуми прогрессияи арифметикии (a_n)-ро ёбед.

400. Дар прогрессияи арифметикии (y_n):

а) $y_1=13$, $y_{15}=55$;   в) $y_1=-4$; $y_{11}=-54$;

б) $y_1=24,5$; $y_{25}=-59,5$;   г) $y_1=9$, $y_{37}=63$

аст. Фарқи прогрессияро ёбед.

401. Дар байни ададҳои 15 ва 4,5 шаш ададро чунон гузоред, ки онҳо дар якҷоягӣ бо ададҳои додашуда прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд. Ин ададҳо кадомҳоянд?

402. Дар байни ададҳои 2 ва -28 чунин нӯҳ ададеро гузоред, ки онҳо бо ҳамроҳии ададҳои додашуда прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд.

403. Прогрессияи арифметикии (c_n) дода шудааст. Агар:

а) $c_8=31,5$, $c_{29}=63$;   г) $c_3=15$, $c_{17}=85$;

б) $c_{20}=0$, $c_{66}=-92$;   д) $c_5=12$, $c_{29}=60$;

в) $c_{10}=-44,2$, $c_{36}=117$;   е) $c_7=-93$, $c_{11}=-153$

бошад, он гоҳ аъзои якум ва фарқи прогрессия ёфта шавад.

404. Аъзои a_l-и прогрессияи арифметикии (a_n) ёфта шавад, агар
а) $a_s=17$, $a_k=45$, $s=3$, $k=7$, $l=11$;
б) $a_s=-7$, $a_k=-34$, $s=4$, $k=13$, $l=7$
бошад.

405. Оё дар прогрессияи арифметикии 12; 19; ... адади
а) 320; б) 365 ҳаст?

406. Дар прогрессияи арифметикии −20,8; −19,2; ... чанд аъзо аломати манфӣ дорад? Аъзои мусбати якуми ин прогрессия ба чанд баробар аст?

407. Прогрессияи арифметикии (a_n)-ро аз рӯи вобастагиҳои

а) $\begin{cases} a_2+3a_4=82, \\ 2a_3-a_6=-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2a_4-a_1=26, \\ a_5+4a_2=64; \end{cases}$

тартиб диҳед.

408. Пайдарпаии (a_n) бо формулаи:
а) $a_n=8n+3$; д) $a_n=-2,5n+1,5$; и) $a_n=5n-3$;
б) $a_n=2n^2-5$; е) $a_n=-9n$; к) $a_n=11n+4$;
в) $a_n=n+14$; ж) $a_n=-14n+7$; л) $a_n=\frac{2}{n}$;
г) $a_n=31n+4$; з) $a_n=2n^2+n-4$; м) $a_n=8$
дода шудааст. Оё ин пайдарпаӣ прогрессияи арифметикӣ аст ва агар бошад, аъзои якум ва фарқи онро ёбед.

Машқҳо барои такрор

409. Суммаи рақамҳои адади дурақама ба 7 баробар аст. Агар ба ҳар як рақами адад 2 воҳидӣ илова кунем, он гоҳ ададе ҳосил мешавад, ки аз дучандаи адади аввала 3 воҳид кам аст. Ададро ёбед.

410. Номаълуми x-ро аз таносуб ёбед:
а) $4,25 : 0,5=2\frac{1}{3} : x$; б) $(m+2) : (m-2)=(m^2-4) : m^2x$.

411. Нобаробариро ҳал кунед:
а) $4(2x-3)-5x<x+4$; в) $-3(x^2-1)\geq 0$;
б) $\frac{2x}{3}<7$; г) $5\leq\frac{2}{3}\cdot(x-3)$.

412. Муодиларо бо тарзи графикӣ ҳал кунед:
а) $\sqrt{x}=x$; б) $\sqrt{x}=x-2$.

413. Касрро ихтисор кунед:
а) $\frac{a^2-16}{ax+4x}$; б) $\frac{3x^2+15xy}{x+5y}$; в) $\frac{3\cdot(x-2)}{7\cdot(2-x)}$.

414. Ифодаро содда кунед:
$$\frac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}.$$

415. Муодилаҳои дуномаълумаи

$$а)\ (x-1)^2+(y+3)^2=36$$

ва

$$б)\ 2x+3y=6$$

дар ҳамвории координатавӣ кадом хатҳоро тасвир мекунанд?

416. Аз рӯи формулаи $a_n=n^3-1$ пайдарпай тартиб диҳед.

24. Формулаи суммаи n аъзои аввалаи прогрессияи арифметикӣ

Дар назди худ масъалаи ёфтани суммаи аъзоҳои шумораашон охирноки прогрессияи арифметикиро мегузорем. Нишон медиҳем, ки бе ҷамъкунии бевосита ҳам ҳалли масъалаи гузошташуда имконпазир аст.

Ба сифати мисол суммаи охирноки

$$2+4+6+...+46+48+50,$$

ки пайдарпаии ададҳои ҷуфт мебошад, мегирем. Онро бо S ишорат карда, дар ду намуд бо тартиби афзуншавӣ ва бо тартиби камшавии ҷамъшавандаҳояш менависем:

$$S=2+4+6+...+46+48+50,$$
$$S=50+48+46+...+6+4+2.$$

Онҳоро аъзо ба аъзо ҷамъ мекунем:

$$2S=(2+50)+(4+48)+(6+46)+...+(46+6)+(48+4)+(50+2).$$

Намоён аст, ки тарафи чап (ниг. ба қавсҳо) аз 25 ҷуфти ададҳои ҳар якеаш ба 52 баробар иборат аст. Пас $2S=52 \cdot 25$ ва ё $S=650$-ро ҳосил мекунем.

Қайд мекунем, ки якхела будани суммаи ҷуфти ададҳои зери якдигарбуда дар ин мисол тасодуф набуда, балки ба ҳар гуна прогрессияҳои арифметикӣ, чӣ тавре ки дар поён мебинем, хос аст.

Акнун ба тарзи ёфтани суммаи аъзоҳои прогрессияи арифметикии дар мисол истифода кардашуда характери умумӣ медиҳем.

Бигузор суммаи n-аъзои аввалаи прогрессияи арифметикии

$$(a_n): \quad a_1; \ a_2; \ a_3; \ ...; \ a_n; \ ...$$

-ро ёфтан зарур бошад. Онро бо S_n, яъне $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ ишорат намуда, суммаро дар шаклҳои

$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$ (бо тартиби афзуншавии индексҳо) ва

$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_3+a_2+a_1$ (бо тартиби камшавии индексҳо) менависем. Баъдан, онҳоро аъзо ба аъзо ҷамъ карда, ҳосил мекунем:

$$2 \cdot S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+...+(a_{n-2}+a_3)+$$
$$+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

Нишон медиҳем, ки қимати ҳар як ифодаи дар қавсҳо буда ба a_1+a_n баробар аст:

$$a_2+a_{n-1}=(a_1+d)+(a_n-d)=a_1+a_n;$$
$$a_3+a_{n-2}=(a_2+d)+(a_{n-1}-d)=a_2+a_{n-1}=a_1+a_n;$$
$$a_4+a_{n-3}=(a_3+d)+(a_{n-2}-d)=a_3+a_{n-2}=a_1+a_n;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Возеҳ аст, ки шумораи чунин қавсҳо (ё ҷуфтҳо) ба n баробар мебошад.

Пас,

$$2S_n=(a_1+a_n)n$$

ва аз он

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n \qquad (1)$$

Ин формула **формулаи суммаи n аъзои аввалаи прогрессияи (a_n)** ё кӯтоҳ, **формулаи суммаи прогрессияи арифметикӣ** буда, бо ҳамин ном маъмул аст.

Ҳамин тариқ **суммаи прогрессияи арифметикии охирнок ба ҳосили зарби нимсуммаи аъзоҳои канорӣ бар миқдори аъзоҳо баробар аст.**

Формулаи (1) ба олими Юнони Қадим Диофант* тааллуқ дорад.

Формулаи (1)-ро дигар хел ҳам менависанд. Дар он ҷо ба ҷои a_n қиматаш $a_1+(n-1)d$-ро гузошта (ниг. ба пункти 23).

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2}\cdot n \qquad (2)$$

-ро пайдо мекунем. Формулаи (2) имкон медиҳад, ки суммаи дилхоҳи аъзоҳои прогрессияи арифметикиро аз рӯи аъзои якум ва фарқи он, ёбем.

Мисоли 1. Суммаи панҷоҳ аъзои аввалаи прогрессияи арифметикии

$$5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ \ldots$$

-ро меёбем.

Барои татбиқи формулаи (1) кифоя аст, ки аъзои a_{50}-ро ёбем. Азбаски $a_1=5$ ва $a_2=9$ аст, пас $d=a_2-a_1=9-5=4$ ва аз ин ҷо $a_{50}=a_1+49d=$ $=5+49\cdot4=5+196=201$ мешавад. Он гоҳ суммаи матлуби S_{50} ба

$$S_{50}=\frac{a_1+a_{50}}{2}\cdot 50=(5+201)\cdot 25=206\cdot 25=5150$$

баробар мешавад.

Мисоли 2. Суммаи чил аъзои аввалаи прогрессияи арифметикии (a_n), ки бо формулаи $a_n=9n-14$ (ниг. ба эзоҳи пункти 23) дода шудааст, меёбем.

---

* Диофант (асри III) - риёзидони Александрия. Дар «Арифметика»-и ӯ ибтидои алгебра оварда шуда, як қатор муодилаҳои дараҷаи гуногун ҳал шудаанд.

Аз формулаи $a_n=9n-14$ ба ҷои n аввал 1 ва баъд 40 гузошта аъзоҳои a_1 ва a_{40}-ро меёбем:

$a_1=9\cdot 1-14=9-14=-5;$ $\qquad a_{40}=9\cdot 40-14=360-14=346.$

Қиматҳои ёфтаамонро ба формулаи (1) гузошта ҳосил мекунем:

$$S_{40}=\frac{-5+346}{2}\cdot 40=341\cdot 20=6820, \quad S_{40}=6820.$$

М и с о л и 3. Суммаи $1+2+3+...+n$-ро меёбем.

Дар ин ҷо $a_1=1$ ва $a_n=n$ аст. Дар асоси формулаи (1) ин сумма ба $\frac{n(n+1)}{2}$ баробар мешавад.

Ҳамин тариқ, барои суммаи ададҳои натуралии аз 1 то n формулаи

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$$ -ро ҳосил кардем.

Дар мавриди хусусӣ суммаи 100 аъзои аввалаи ададҳои натуралӣ ба

$$S_{100}=\frac{100\cdot(100+1)}{2}=50\cdot 101=5050$$ баробар мешавад*.

М и с о л и 4. Суммаи ҳамаи ададҳои натуралии ба нӯҳ каратии аз 500 калон набударо меёбем.

Ададҳои натуралии ба нӯҳ каратиро бо формулаи $a_n=9n$ ифода кардан мумкин аст. Дар асоси пункти 23 ин гуна адад аъзои n-уми прогрессияи арифметикӣ бо фарқи $d=9$ мебошад. Барои муайян кардани миқдори аъзоҳои прогрессия, ки аз 500 калон нестанд, нобаробарии $a_n\le 500$ ё $9\cdot n\le 500$-ро ҳал мекунем.

Аз ин ҷо $n\le 55\frac{5}{9}$ -ро ҳосил карда ба хулоса меоем, ки шумораи аъзоҳои прогрессияи ба суммаи матлуб дохилшаванда 55-то аст (n - адади касрӣ шуда наметавонад). Пас, $a_1=9$, $a_{55}=9\cdot 55=495$ ва

$$S_{55}=\frac{9+495}{2}\cdot 55=\frac{504}{2}\cdot 55=252\cdot 55=13860$$

мешавад.

Ҷ а в о б: 13860.

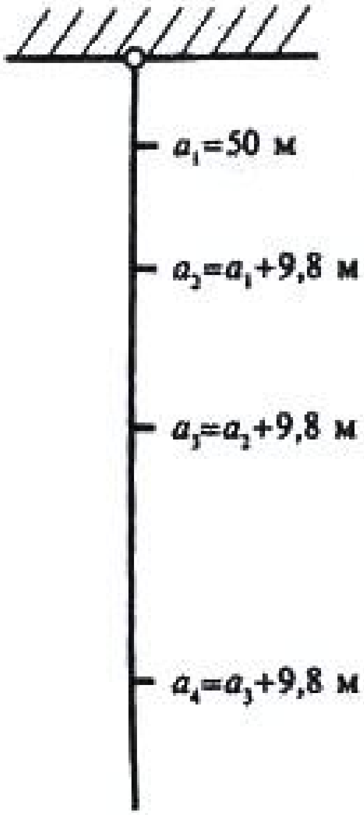
М и с о л и 5. Суммаи ҳамаи ададҳои натуралии дурақамаро меёбем.

Суммаи матлуб ба $S=10+11+...+99$ баробар аст. Маълум, ки ҷамъшавандаҳои он прогрессияи арифметикӣ мебошад. Дар он $a_1=10$, $a_n=99$ ва $d=1$ аст. Аз рӯи формулаи $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$ шумораи аъзоҳои прогрессияро меёбем:

$99=10+(n-1);$ $\qquad n-1=99-10;$ $\qquad n=90.$

---

* Риёзидони машҳури олмонӣ Карл Гаусс Фридрих (1777–1855) ҳанӯз дар синни хурди мактабиаш ин суммаро дар муддати як дақиқа ҳисоб карда буд. Баробар будани суммаҳои 1+100, 2+99, ..., 100+1-ро пайхас карда, адади 101-ро ба шумораи умумии суммаҳо 50 зарб кард.



Расми 88

Аз ин ҷо

$S=10+11+12+...99=\dfrac{10+99}{2}\cdot 90=109\cdot 45=4905$.

Ин натиҷаро бо роҳи дигар ҳам ёфтан мумкин аст.

Маълум, ки $S=S_{99}-S_9=S_{100}-S_9-100$ ҳам мешавад. Азбаски $S_{100}=5050$ ва $S_9=45$ аст (ниг. ба мисоли 3), пас $S=5050-45-100=4905$.

Мисоли 6. Парашутчӣ дар сонияи аввали озодафтиаш 50 м ва дар ҳар як сонияи минбаъда 9,8 м зиёдтар масофаро тай мекунад. Агар парашутчӣ дар 12 сония ба замин омада расида бошад, он гоҳ аз кадом баландӣ ҷаҳиданашро меёбем.

Ҳал. Траекторияи ҳаракати парашутчӣ ба поён ростхатта аст. Мувофиқи шарт ӯ дар ҳар як сонияи минбаъдаи поёнфуроӣ назар ба сонияи пештара 9,8 м зиёдтар масофаро тай мекунад (ниг. ба расми 88).

Тағйирёбии мавқеи парашутчӣ дар ҳар як сонияи озодафтӣ ба пайдарпаии

$$50; \quad 59{,}8; \quad 69{,}6; \quad 79{,}4; \quad ...$$

оварда мерасонад, ки он прогрессияи арифметикиро бо нишондодҳои $a_1=50$ ва $d=9{,}8$ ифода мекунад. Азбаски

$$a_{12}=a_1+11\cdot d=50+11\cdot 9{,}8=50+107{,}8=157{,}8 \text{ (м)}$$

аст (яъне парашутчӣ дар сонияи 12-ум 157,8 м поён мефарояд), пас баландии матлуб

$$S_{12}=\frac{50+157{,}8}{2}\cdot 12=207{,}8\cdot 6=1246{,}8 \text{ (м)}$$

мешавад.

Ҷавоб: 1246,8 м.

Мисоли 7. Бигузор v_0 - суръати ибтидоӣ, a - шитоб ва t - вақт бошад. Масофаи тайкардан нуқтаи материалиро дар вақти t-и ҳаракаташ меёбем.

Ҳал. Азбаски a зиёдшавии суръатро дар муддати як сонияи ҳаракат ифода мекунад, пас аз рӯи формулаи $v_t=v_0+at$ пайдарпаии

$$v_1=v_0+a, \quad v_2=v_0+2a, \quad v_3=v_0+3a, \quad v_4=v_0+4a, \quad ...$$

ҳосил мешавад. Пайдарпаии (v_t), $t\in N$ прогрессияи арифметикиро бо фарқи a ташкил медиҳад. Аз ин ҷо роҳи тайшударо дар муддати t сония бо формулаи (1) меёбем:

$$S=\frac{v_0+v_t}{2}\cdot t=\frac{v_0+v_0+at}{2}\cdot t=\frac{2v_0+at}{2}\cdot t=v_0\cdot t+\frac{a\cdot t^2}{2}.$$

Ин формула дар физика ҳамчун **формулаи ҳаракати собитшитоби нуқтаи материалӣ** маълум аст.

Мисоли 8. Дар мусобиқаи мактабӣ оид ба футбол 36 бозӣ гузаронида шуд. Агар ҳар як команда бо командаи дигар як маротиба бозӣ карда бошад, дар мусобиқа чанд команда иштирок карданашро меёбем.

Ҳал. Бигузор дар мусобиқа n ($n>0$) команда иштирок карда бошад. Он гоҳ яке аз ин командаҳо бо дигарҳояш $n-1$ бозӣ мекунад. Аз $n-1$ командаи боқимонда якеаш бо дигараш як маротибагӣ бозӣ карда $n-2$ вохурӣ мегузаронад. Возеҳ аст, ки дар охир ду команда мемонад ва бо якдигар як бозӣ мекунанд. Дар асоси муҳокимарониҳоямон прогрессияи арифметикии

$$n-1; \quad n-2; \quad ...; \quad 3; \quad 2; \quad 1$$

-ро ҳосил мекунем, ки мувофиқи шарти масъала суммаи аъзоҳояш ба 36 баробар аст. Яъне мувофиқи формулаи суммаи прогрессияи арифметикӣ

$$36=\frac{(n-1)+1}{2}\cdot(n-1).$$

Аз ин ҷо

$$72=n^2-n$$

ё

$$n^2-n-72=0.$$

Ин муодилаи квадратии ислоҳшударо ҳал карда меёбем:

$$n_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+72}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{289}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{17}{2}; \quad n_1=9,\ n_2=-8.$$

Азбаски шумораи командаҳо адади манфӣ шуда наметавонад, пас қимати $n=9$-ро ба инобат мегирему халос.

Ҷавоб: 9 команда.

?

1. Формулаи (1)-ро, ки суммаи n аъзои аввали прогрессияи арифметикиро ифода мекунад, исбот кунед. Мисолҳо оред. **2.** Оё аз рӯи аъзои якум ва фарқи прогрессия суммаи прогрессияи арифметикӣ ёфта мешавад? Агар чунин амалиёт имконпазир бошад, он гоҳ аз рӯи кадом формула амалӣ мегардад? Мисолҳо оред.

417. Суммаи понздаҳ аъзои аввалаи прогрессияи арифметикии (a_n)-ро ёбед, агар $a_1=7$ ва $d=-3$ бошад.

418. Пайдарпаии (x_n) дода шудааст.

а) $x_n=4n+12$; б) $x_n=2n+13$; в) $x_n=n-8$; г) $x_n=-3n+5$.

Суммаҳои панҷоҳ сад ва n аъзои аввали онро ёбед.

419. Суммаро ёбед:

а) $2+4+6+\ldots+(2n-2)+2n+(2n+2)$;

б) $1+3+5+\ldots+(2n-3)+(2n-1)+(2n+1)$.

420. Ёбед:

а) суммаи ҳамаи ададҳои натуралии аз 250 калон набударо;

б) суммаи ҳамаи ададҳои натуралии аз 80 то 180-ро;

в) суммаи ҳамаи ададҳои натуралии ба се каратию аз 800 калон набударо;

г) суммаи ҳамаи ададҳои натуралии ба 6 каратию аз 180 калон набударо;

д) суммаи ҳамаи ададҳои натуралии ба 9 каратию аз 210 калон набударо;

е) суммаи ҳамаи ададҳои дурақамаи тақсимкунандаи 4 ва бақияи 1 доштаро;

ж) суммаи $a_{11}+a_{12}+...+a_{44}$ бо аъзои $a_n=7n$-ро.

421. Прогрессияи арифметикиеро ёбед, ки дар он чӣ қадар аъзоҳояшро нагирем, ҳамеша суммааш ба сечанди квадрати шумораи ин аъзоҳо баробар аст.

422. Прогрессияи арифметикии (a_n) дода шудааст. Агар:

а) $a_2=13$ ва $d=3$ бошад, $a_{15}+a_{16}+...+a_{30}$-ро ёбед;

б) $a_1=21$ ва $a_2=20,5$ бошад, $a_6+a_7+...+a_{25}$-ро ёбед;

в) $a_8=14$ ва $a_{19}=-35,5$ бошад, S_{20}-ро ёбед;

г) $a_1=4,2$ ва $a_{12}=18,5$ бошад, S_{15}-ро ёбед.

423. Бори аз тайёра бо парашют партофташуда дар сонияи аввали ҳаракат 5,2 м ва дар ҳар як сонияи минбаъда нисбати сонияи пешина 9,8 м зиёд масофаро тай мекунад. Агар бор пас аз 11 сония ба замин расад, пас вай аз кадом баланди партофта шудааст?

424. Ҷисми озодафтанда (яъне $v_0=0$, $a=g=9,8$ м/сон^2) дар

а) сонияи даҳуми баъди ибтидои афтиш;

б) даҳ сонияи баъди ибтидои афтиш чӣ қадар масофаро тай мекунад?

425. Дар мусобиқаи шоҳмотбозон 45 бозӣ гузаронида шуд. Ҳар як бозингар бо шоҳмотбозӣ дигар як навбат бозӣ кардааст. Шумораи иштирокчиёни мусобиқаро ёбед?

Расми 89

426. Саққоҳо дар шакли секунҷа ҷойгиранд. Дар қатори якум 1-то, дар қатори дуюм 2-то ва ғайра саққоҳо ҳаст (расми 89).

а) Агар ҳамаи саққоҳо 276 дона бошанд, он гоҳ онҳо дар чанд қатор ҷой мегиранд?

б) Барои тартиб додани секунҷаи дорои 80 қатор чандто саққо лозим мешавад?

427. Оё қимати пайдарпаии ифодаҳои $(a+x)^2$, (a^2+x^2), $(a-x)^2$, ... прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад? Агар бошад, суммаи n-аъзои аввалаашро ёбед.

Машқҳо барои такрор

428. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y=2\sqrt{x-1}+\dfrac{5}{\sqrt{4-x}}$; г) $y=\dfrac{\sqrt{20+x-x^2}}{x^2-16}$;

б) $y=\dfrac{x-1}{x+2}+\sqrt[3]{x-1}$; д) $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$.

в) $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2-1}$; е) $y=\sqrt{x^2-7x+12}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x-4}}$.

429. Суммаи рақамҳои адади дурақама ба 9 баробар аст. Агар ҷои рақамҳои инададро иваз кунем, адади наверо ҳосил мекунем, ки он ба $\dfrac{5}{6}$ ҳиссаи адади аввала баробар аст. Адади дурақамаро ёбед.

430. Периметри росткунҷа ба $2p$ ва масоҳаташ ба S баробар аст. Аз рӯи ин ду нишондод муодилаи квадратии ислоҳшудаи аз бузургии тарафҳои росткунҷа вобастаро тартиб диҳед.

431. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\dfrac{2^8\cdot7^9}{14^{10}}$; б) $\dfrac{14^{10}}{2^8\cdot7^9}$; в) $\dfrac{12^5}{2^3\cdot3^4}:\dfrac{10^5}{2^6\cdot5^7}$; г) $\dfrac{10^5}{2^6\cdot5^7}:\dfrac{12^5}{2^3\cdot3^4}$.

432. Графики функсияро созед:

а) $y=\left|\dfrac{2x-3}{x-2}\right|$; б) $y=\dfrac{1}{|x-2|}$.

433. Кадоме аз функсияҳои хаттии

а) $y=2x+7$; б) $y=-4x+3$; в) $y=0{,}1x+2$; г) $y=2-x$

афзуншаванда ва кадомаш камшавандаанд?

434. Нишон диҳед, ки барои қимати дилхоҳи x сеаъзогии $-5x^2+10x-5$ қимати ғайримусбатро мегирад.

§8. ПРОГРЕССИЯИ ГЕОМЕТРӢ

25. Таърифи прогрессияи геометрӣ

Аз мисол сар мекунем. Пайдарпаиҳои

$$3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48;\ \ldots \quad \text{ва} \quad 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \ldots$$

-ро дида мебароем. Мушоҳидаи бевосита нишон медиҳад, ки дар пайдарпаии якум аз аъзои дуюмаш сар карда ҳар як аъзои пасоянда ду маротиба зиёд ва дар пайдарпаии дуюм ду маротиба кам мешавад. Ин мисолҳо ба мафҳуми *прогрессияи геометрӣ* меоваранд, ки мо ба омӯзиши он шурӯъ мекунем.

Бигузор пайдарпаии

$$(b_n): \quad b_1; \ b_2; \ b_3; \ \ldots; \ b_n; \ \ldots$$

дода шудааст.

Т а ъ р и ф. **Пайдарпаии аъзоҳояш ғайринулӣ прогрессияи геометрӣ номида мешавад, агар аз аъзои дуюмаш сар карда ҳар як аъзои пасояндаш ба ҳосили зарби пешояндаш бар адади доимӣ баробар бошад.**

Дар асоси таъриф барои пайдарпаии (b_n) баробарии

$$b_{n+1}=b_n \cdot q$$

-ро, ки дар ин ҷо q - ягон адад аст, навиштан мумкин аст. Масалан, барои мисолҳои дар боло навиштаамон мувофиқан баробариҳои

$$b_{n+1}=b_n \cdot 2 \quad \text{ва} \quad b_{n+1}=b_n \cdot \frac{1}{2}$$

ҷой доранд.

Қайд мекунем, ки аз таъриф хулосаи муҳими дигар ҳам бармеояд: аз аъзои дуюм сар карда, нисбати аъзои дилхоҳи он бар пешояндаш ба адади доимии q баробар аст:

$$b_{n+1} : b_n=q$$

Адади доимии ғайринулии q-ро махраҷи прогрессияи геометрӣ меноманд. Махраҷҳои прогрессияҳои мисолҳои дар боло зикршуда мувофиқан ба 2 ва $\frac{1}{2}$ баробар мебошанд.

Баробарии $b_{n+1}=b_n \cdot q$ нишон медиҳад, ки барои муайян кардани прогрессияи геометрӣ, яъне ёфтани аъзои дилхоҳи он, донистани аъзои якум ва махраҷи он кифоя аст (чуноне ки барои прогрессияи арифметикӣ донистани аъзои якум ва фарқаш кифоя буд).

Дар ҳақиқат, масалан, агар:

а) $b_1= -1$ ва $q=2$ бошад, он гоҳ

$$(b_n): \quad -1; \ -2; \ -4; \ -8; \ -16; \ -32; \ -64; \ \ldots$$

б) $b_1=\frac{1}{3}$ ва $q=1$ бошад, он гоҳ

$$(b_n): \quad \frac{1}{3}; \ \frac{1}{3}; \ \frac{1}{3}; \ \ldots; \ \frac{1}{3}; \ \ldots$$

в) $b_1=3$ ва $q=-2$ бошад, он гоҳ

$$(b_n): \quad 3; \ -6; \ 12; \ -24; \ 48; \ -96; \ \ldots$$

г) $b_1=2$ ва $q = 0{,}2$ бошад, он гоҳ

$$(b_n): \quad 2; \ 0{,}4; \ 0{,}08; \ 0{,}016; \ 0{,}0032; \ \ldots .$$

Ба монанди прогрессияи арифметикӣ прогрессияи геометрӣ ҳам вобаста ба шумораи аъзоҳояш *охирнок ва беохир* мешавад. Масалан прогрессияи

$$6; \ -18; \ 54; \ -162; \ 486;$$

охирнок аст, чунки ҳамагӣ панҷ аъзо дорад. Вале прогрессияи геометрии $\left((b_n): b_1=\frac{1}{8}, \ q=\frac{1}{3}\right)$

$$\frac{1}{8}; \ \frac{1}{24}; \ \frac{1}{72}; \ \frac{1}{216}; \ \ldots$$

беохир аст, чунки шумораи беохири аъзоҳоро дарбар гирифта аст.

Дар прогрессияи геометрии охирноки

$$-1; \quad -0{,}1; \quad -0{,}001; \quad -0{,}0001$$

аъзоҳои -1 ва $-0{,}0001$-ро *аъзоҳои канорӣ* меноманд.

Ниҳоят қайд мекунем, ки ду аъзои b_s аз b_k-и прогрессияи геометрӣ (он барои прогрессияи арифметикӣ низ дуруст аст) аз аъзои дигари b_l *дар як хел дурӣ* ҷойгир аст, агар шарти

$$|s-l|=|k-l|$$

иҷро гардад. Масалан b_{15} аз b_{10} ва b_{20} дар як хел дурӣ ҷой гирифтааст.

? 1. Чӣ гуна пайдарпаиро прогрессияи геометрӣ меноманд? Мисолҳо оред. 2. Махраҷи прогрессия гуфта кадом ададро меноманд? Якчанд прогрессияи геометриро оварда махраҷашро нишон диҳед. 3. Барои муайян кардани прогрессияи геометрӣ дода шудани чиҳо кифоя аст? 4. Кадом прогрессияҳоро охирнок ва кадомашонро беохир меноманд? 5. Кадом аъзоҳои прогрессияи геометриро аъзоҳои канорӣ меноманд? Мисолҳо оред.

---

435. Аз рӯи аъзои якум ва махраҷи прогрессияи геометрии (b_n) шаш аъзои аввалаашро ёбед:

а) $b_1=2$, $q=2$;
б) $b_1=-18$, $q=\frac{1}{2}$;
в) $b_1=-24$, $q=-2{,}5$;
г) $b_1=\frac{2}{5}$, $q=3\sqrt{2}$;
д) $b_1=1$, $q=\frac{2}{3}$;
е) $b_1=-4$, $q=9$;
ж) $b_1=-5$, $q=-2$;
з) $b_1=-\frac{3}{4}$, $q=\frac{1}{3}$.

436. Агар:

а) $b_1=0{,}1$, $q=3$;
б) $b_1=-\frac{1}{10}$, $q=\frac{1}{10}$;
в) $b_1=-9$, $q=1$
г) $b_1=11$, $q=-3$;
д) $b_1=10$, $q=\frac{1}{2}$;
е) $b_1=13$, $q=-2$;
ж) $b_1=12$, $q=0{,}1$;
з) $b_1=7$, $q=5$;
и) $b_1=4$, $q=0{,}2$;
к) $b_1=8$, $q=-4$

бошад, прогрессияи геометрии (b_n)-ро тартиб диҳед.

437. Аз формулаи $b_{n+1}=b_n\cdot 3$ истифода карда прогрессияи геометрии (b_n)-ро тартиб диҳед, агар

а) $b_1=-4$;
б) $b_1=-\frac{1}{9}$;
в) $b_1=1$;
г) $b_1=11$;
д) $b_1=20$;
е) $b_1=15$;
ж) $b_1=0{,}02$;
з) $b_1=8$;
и) $b_1=19$;
к) $b_1=3$;
л) $b_1=0{,}3$;
м) $b_1=-10$

бошад.

438. Аз рӯи аъзои додашудаи прогрессияи геометрӣ ва махраҷаш аъзои пасояндашро ёбед:

а) $b_6=104$, $q=-\frac{1}{2}$;
б) $b_{100}=1000$, $q=\frac{1}{10}$;
в) $b_5=27$, $q=\frac{1}{9}$;
г) $b_{32}=141$, $q=3$.

439. Агар:

а) $b_3=31$ ва $q=2$ бошад, он гоҳ дар ҷавоб b_4^2-ро;

б) $b_6=-14$ ва $q=-\frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ дар ҷавоб $\frac{b_7^3}{49}$-ро;

в) $b_{29}=144$ ва $q=-\frac{1}{12}$ бошад, он гоҳ дар ҷавоб $32b_{31}$-ро;

г) $b_{61}=169$ ва $q=\frac{1}{13}$ бошад, он гоҳ дар ҷавоб b_{62}-ро нависед.

440. Прогрессияи геометриро то аъзои ҳафтумаш нависед:

а) 0,2; 0,4; ...;

б) $\sqrt{2}$; $0{,}3\sqrt{2}$; ...;

в) 7; 49; 343; ...;

г) 5,625; −39,375; ...;

д) $\frac{1}{5}\sqrt{7}$; $\frac{1}{25}\sqrt{7}$; ...;

е) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}$; ...;

ж) 2; 8; 32; ...;

з) 1,4; 1,82; .... .

441. Кадоме аз прогрессияҳои геометрии

а) $-\frac{1}{2}$; 1; −2; 4; −8;

б) 6; 2; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{27}$;

в) −3; 1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3^2}$; $-\frac{1}{3^3}$;

г) 11; 11; 11; 11; ...;

д) 5; $\frac{5}{4}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{5}{64}$; $\frac{5}{256}$;

е) 0,2; 0,02; 0,002; ...;

ж) $\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{5^2}$; $\frac{1}{5^3}$; $-\frac{1}{5^4}$; ...;

з) $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; 1; 3

охирнок ва кадомашон беохиранд?

442. Аъзоҳои канории прогрессияи охирнокро ёбед:

а) 6; −3; $\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{4}$;

б) 1; 7; 49; 343; 2401;

в) $\frac{1}{10^2}$; $-\frac{1}{10}$; 1; −10; b_5;

г) b_1; 3; −9; 27; −81; b_6.

443. Прогрессияи геометрии охирноки

$$b_1;\quad b_2;\quad b_3;\quad \ldots\quad b_{20}$$

дода шудааст.

а) Ҷуфти аз аъзои b_7 дар як хел дурӣ ҷой гирифтаи фарқи индексҳояшон ба 3 воҳид баробар бударо ёбед;

б) Аъзоҳои b_2 ва b_6-и (b_n) аз кадомаш дар як хел дурӣ воқеъ аст;

в) Оё аъзоҳои b_3, b_{10} ва b_{15} аз якдигар дар як хел дурӣ ҷойгиранд?

Машқҳо барои такрор

Ду масъалаҳои зерини (№ 444, 445) ал-Қарачиро ҳал кунед:

444. Масоҳати росткунҷаи асосаш аз баландиаш 2 баробар зиёд ва масоҳаташ ададан ба периметраш баробарро ёбед.

445. Диаметри доираеро ёбед, ки масоҳаташ ба 100 баробар бошад.

446. Исбот кунед, ки суммаи ду адади мусбати ба ҳам чаппа аз 2 хурд нест.

447. Аз рӯи решаҳои додашуда муодилаи квадратӣ тартиб диҳед:

а) 2 ва 3; б) $2-\sqrt{3}$ ва $2+\sqrt{3}$; в) $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

448. Ёбед:

а) 8%-и 20,4 т-ро; в) 62,5%-и $248\frac{3}{4}$ га-ро:

б) $\frac{3}{4}$ %-и 600 т-ро; г) $3\frac{1}{4}$ %-и 1980-ро.

449. Хурдтарин каратнокии умумии ададҳои 750, 600 ва 450-ро ёбед.

450. Графикро насохта абсиссаи нуқтаҳои бурриши хатҳо ва тири Ox-ро ёбед:

а) $y=3x+5$; в) $y=2x+3$; д) $y=x^2-2\frac{1}{4}$;

б) $y=4x-2$; г) $y=2x^2-8$; е) $y=x^2+1$.

451. Дар ифодаи зерин квадрати пурра ҷудо карда шавад:

а) $x^2-8x-13$; б) $2x^2-4x-9$.

452. Касри $\dfrac{3x^2-5x+2}{(x-1)^2}$ -ро ихтисор кунед.

26. Формулаи аъзои n-уми прогрессияи геометрӣ

Бигузор аъзои якум b_1 ва махраҷи прогрессияи геометрӣ q дода шуда бошад. Аз рӯи ин додашудаҳо ҳосил мекунем:

$$b_2=b_1\cdot q=b_1\cdot q^{2-1}$$
$$b_3=b_2\cdot q=(b_1\cdot q)\cdot q=b_1\cdot q^2=b_1\cdot q^{3-1},$$
$$b_4=b_3\cdot q=(b_1\cdot q^2)\cdot q=b_1\cdot q^3=b_1\cdot q^{4-1},$$
$$b_5=b_4\cdot q=(b_1\cdot q^3)\cdot q=b_1\cdot q^4=b_1\cdot q^{5-1}.$$

Бо ҳамин тарз пай дар пай аъзоҳои дигари прогрессия $b_6=b_1\cdot q^{6-1}$, $b_7=b_1\cdot q^{7-1}$ ёфта мешаванд. Агар ба қисми рости баробариҳои болой диққат диҳем, он гоҳ мебинем, ки аз аъзои дуюм сар карда дараҷаи q дар онҳо аз рақами индекси қисми чап як воҳид хурд аст. Пас аз рӯи ин нишона барои ёфтани b_n-аъзои якумро ба q^{n-1} зарб задан кофист:

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1} \qquad (1)$$

Ин формуларо формулаи **аъзои n-уми прогрессияи геометрӣ** меноманд.

Дар поён ҳалли мисолу масъалаҳоеро меорем, ки истифодаи ин формула самараи хуб додааст.

Мисоли 1. Агар $b_1=\frac{10}{11}$ ва $q=\frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ b_6-и прогрессияи геометрии (b_n)-ро меёбем.

Аз формулаи (1) ҳангоми $n=6$ будан

$$b_6=b_1\cdot q^5=\frac{10}{11}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{11}\cdot\frac{1}{32}=\frac{5}{176}.$$

Мисоли 2. Дар прогрессияи геометрӣ $b_5=2304$ ва $b_9=589\ 824$ аст. Аъзои дувоздаҳуми онро меёбем.

Дар асоси формулаи аъзои n-ум барои b_5 ва b_9 баробариҳои $b_5=b_1\cdot q^4$ ва $b_9=b_1\cdot q^8$-ро навиштан мумкин аст. Нисбати

$$\frac{b_9}{b_5}=\frac{589824}{2304};\quad \frac{b_1\cdot q^8}{b_1\cdot q^4}=\frac{589824}{2304}$$

-ро тартиб дода, аз он $256=q^4$-ро ҳосил мекунем.

Барои ёфтани қимати q муодилаи

$$0=256-q^4=16^2-(q^2)^2=(16-q^2)\cdot(16+q^2)=$$
$$=(4-q)\cdot(4+q)\cdot(16+q^2)$$

-ро ҳал мекунем. Азбаски $16+q^2\neq 0$ аст, пас $(4-q)(4+q)=0$ мешавад. Решаҳои ин муодилаи квадратӣ $q_1=-4$ ва $q_2=4$ мебошанд. Азбаски мувофиқи таърифи прогрессияи геометрӣ $b_5=b_1\cdot q^4$ аст, пас ҳангоми $q=\pm4$ будан $b_1=\frac{b_5}{q^4}=\frac{2304}{256}=9$ мешавад.

Ҳамин тариқ ду прогрессия вуҷуд дорад, ки онҳо шарти масъаларо қаноат менамоянд. Агар $q=4$ бошад

$$b_{12}=9\cdot 4^{11}=9\cdot 1048\ 576=37\ 748\ 736$$

ва ҳангоми $q=-4$ будан

$$b_{12}=9\cdot(-4)^{11}=9\cdot(-1048\ 576)=-37\ 748\ 736$$

мешавад.

Мисоли 3. Пайдарпаии 3; b_2; b_3; 192 прогрессияи геометриро ташкил медиҳад. b_2; ва b_3-ро меёбем. Аз рӯи таърифи прогрессияи геометрӣ баробариҳои $3q=b_2$, $b_3\cdot q=192$-ро навиштан мумкин аст. Аз онҳо

$$b_3\cdot q=192;\quad b_2\cdot q^2=192;\quad 3q^3=192;\quad q^3=64;\quad q=4$$

-ро ҳосил мекунем. Мувофиқи формулаи (1) $b_2=b_1\cdot q=3\cdot 4=12$ ва $b_3=b_1\cdot q^2=3\cdot 4^2=3\cdot 16=48$-ро пайдо мекунем.

Ҷавоб: $b_2=12$; $b_3=48$.

Мисоли 4. Пайдарпаии (b_n) прогрессияи геометриест, ки аъзои якумаш ба c_1 ва махраҷаш ба q баробар аст. $2c_{18}$ ва $c_2\cdot c_{10}$-ро ба воситаи c_1 ва q ифода мекунем.

Ҳал. Формулаи (1) имконият медиҳад, ки баробариҳои

$$c_2=c_1\cdot q,\quad c_{10}=c_1\cdot q^9\quad \text{ва}\quad c_{18}=c_1\cdot q^{17}$$

-ро нависем. Аз онҳо ҳосил мекунем:

$$2c_{18}=2c_1\cdot q^{17}$$
$$c_2\cdot c_{10}=c_1\cdot q\cdot c_1\cdot q^9=c_1^{\,2}\cdot q^{10}$$

Мисоли 5. Агар бонк ҳар сол амонатпулии мизоҷонашро 5% зиёд кунад, он гоҳ меёбем, ки 4000 сомонӣ пули гузошташуда баъди панҷ сол чанд сомониро ташкил мекунад?

Ҳал. Агар бо b_1 пули гузошташударо ишорат кунем, он гоҳ баъди расо як сол $b_2=4000+4000\cdot 0{,}05=4000\cdot 1{,}05=4200$ сомонӣ мешавад. Дар охири соли дуюм миқдори пул ба $b_3=4200\cdot 1{,}05=4410$

сомонӣ мерасад. Яъне мо бо прогрессияи геометрии нишондодҳояш $b_1=4000$, $q=1,05$ сару кор дорем ва аз он $b_6=b_1 \cdot q^5=4000 \cdot (1,05)^5=$ $=4000 \cdot 1,2762815=5105,126$. Ҳамин тариқ баъди 5 сол пули гузошташуда 5105 сомонию 13 дирамро ташкил медиҳад.

? 1. Аъзои n-уми прогрессияи геометриро аз рӯи кадом формула меёбанд? 2. Бо иҷрошавии кадом шарт аъзоҳои прогрессияи геометрӣ ба ҳамдигар баробар мешаванд? 3. Агар а) $b_1<0$, $q<0$ ва б) $b_1>0$, $q<0$ бошад, нисбати аломати аъзоҳои прогрессия чӣ гуна хулосаҳо баровардан мумкин аст? Мисолҳо оред.

453. Пайдарпаии (c_n) прогрессияи геометриест, ки аъзои якумаш ба c_1 ва махраҷаш ба q баробар аст.

а) c_{16}; г) c_k; ж) $3 \cdot c_{41}$; к) $c_7 \cdot c_k$;
б) c_{30}; д) c_{k+8}; з) $2 \cdot c_{83}$; л) $c_{19} : c_{12}+c_1$;
в) c_{126}; е) c_{2k}; и) $c_5 \cdot c_{17}$; м) $c_7 + c_{21}$
-ро ба воситаи c_1 ва q ифода кунед.

454. Пайдарпаии (x_n) прогрессияи геометрӣ мебошад. Агар:

а) $x_1=160$ ва $q=\frac{1}{2}$ бошад, x_8-ро;
б) $x_1=-810$ ва $q=\frac{1}{9}$ бошад, x_4-ро;
в) $x_1=2\sqrt{2}$ ва $q=-\sqrt{2}$ бошад, x_9-ро;
г) $x_1=12\ 500$ ва $q=0,2$ бошад, x_8-ро;
д) $x_1=17$ ва $q=-2$ бошад, x_9-ро;
е) $x_1=10$ ва $q=5$ бошад, x_{11}-ро;
ж) $x_1=-\frac{1}{10}$ ва $q=10$ бошад, x_5-ро;
з) $x_1=\frac{2}{3}$ ва $q=\frac{3}{2}$ бошад, x_6-ро;
и) $x_1=\frac{9}{4}$ ва $q=\frac{2}{3}$ бошад, x_6-ро;
к) $x_1=1,8$ ва $q=\frac{2}{\sqrt{3}}$ бошад, x_4-ро
ёбед.

455. Аъзои ҳафтум ва n-уми прогрессияи геометрии

а) $-2;\ 6;\ -18;\ 54;\ \ldots$ д) $4;\ -8;\ 16;\ -32;\ \ldots$
б) $80;\ 40;\ 20;\ 10;\ \ldots$ е) $5;\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{125};\ldots$
в) $0,125;\ 0,25;\ \ldots$ ж) $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{8};\ \frac{1}{32};\ \ldots$
г) $-12;\ 12;\ -12;\ 12;\ \ldots$ з) $a;\ 3a^2;\ 9a^3;\ \ldots$
-ро ёбед.

456. Прогрессияи геометрии (b_n) дода шудааст. Агар:

а) $b_8=27$, $q=3$; г) $b_4=\frac{1}{2}$, $q=-4$; ж) $b_6=0{,}32$, $q=0{,}2$;

б) $b_9=\frac{21875}{32}$, $q=-2\frac{1}{2}$; д) $b_9=18$, $q=3$; з) $b_5=14641$, $q=11$

в) $b_7=2$, $q=-3$; е) $b_2=8$, $q=-1$;

бошад, аъзои якуми прогрессияро ёбед.

457. Прогрессияи геометрии (c_n) дода шудааст. Агар:

а) $c_3=-\frac{6}{9}$, $c_5=-6$; в) $c_3=20$, $c_6=-160$;

б) $c_{10}=3{,}24$, $c_8=9$ г) $c_4=192$, $c_{10}=786432$.

бошад, махраҷи прогрессияро ёбед.

458. Пайдарпаии (b_n) прогрессияи геометрӣ мебошад. Агар:

а) $b_2=25$ ва $b_4=1$ бошад, b_6-ро;

б) $b_1=-\frac{2}{9}$ ва $b_5=-18$ бошад, b_7-ро;

в) $b_4=-1$ ва $b_6=-100$ бошад, b_1-ро;

г) $b_5=324$ ва $b_7=2916$ бошад, b_{10}-ро;

д) $b_3=0{,}048$ ва $b_5=0{,}00192$ бошад, b_8-ро; ёбед.

459. Дар байни ададҳои 6 ва 1458 чор ададеро нависед, ки онҳо дар якҷоягӣ бо ададҳои додашудаи канорӣ прогрессияи геометриро ташкил диҳанд.

460. Дар байни ададҳои 1 ва 256 чунин се ададеро нависед, ки пайдарпаии 1; x_2; x_3; x_4; 256 прогрессияи геометриро ташкил диҳад.

461. Прогрессияи геометрии (x_n) аз шаш аъзои

$$\frac{1}{2};\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5;\ \frac{1}{64};$$

иборат аст. Онро ёбед.

462. Аъзои якум ва махраҷи прогрессияи геометрӣ ёфта шавад, агар:

а) $b_3-b_1=9$ ва $b_5-b_3=36$; б) $b_1+b_4=27$ ва $b_2+b_3=18$;

бошад.

463. Агар бонк ҳар сол амонатпулии мизоҷонашро 3%-и зиёд кунад, он гоҳ 1800 сомонӣ пули гузошташуда баъди чор сол чанд сомониро ташкил медиҳад?

Машқҳо барои такрор

464. Муодиларо ҳал кунед:

а) $(x-9)(x+11)=0$; б) $0{,}2x^2-5=0$; в) $x^2-17x+16=0$.

465. Ҷадвалро пур кунед:

x	-3	-2	$-0{,}2$	0	$\frac{2}{3}$	1	$3{,}1$	6	10
x^2									
$\frac{x^2}{x+1}$									

466. Касрҳоро ихтисор кунед:

а) $\frac{a^6-b^6}{a^3-b^3}$; б) $\frac{6c^2-6cn}{12cn-12n^2}$; в) $\frac{mn}{m^2n-n^2m}$.

467. Корхона барои таъмини мунтазами истеҳсолот ҳар рӯз 0,5 т сӯзишворӣ истифода мебарад. Дар ин ҳолат захираи сӯзишворӣ ба 120 рӯз мерасад. Агар корхона ҳар рӯз 0,3 т сӯзишворӣ истифода барад, он гоҳ захира ба чанд рӯз мерасад?

468. Масъалае тартиб диҳед, ки матнаш ба ҳалли муодилаи

$$x \cdot (x+16)=7680$$

меорад.

469. Нуктаи бурриши параболаи $y=2x^2-3x+8$-ро бо тири Oy ёбед.

470. Самти равиши шохаҳои параболаро муайян намоед:

а) $y=0{,}2x^2-3x+11$; в) $y=-4x^2-\frac{2x}{3}+\frac{3}{8}$;

б) $y=-3x^2+0{,}3x+0{,}2$; г) $y=x^2-15x$;

471. Суммаи $a^{2000}+\frac{1}{a^{2000}}$-ро ҳисоб кунед, агар $a^2-a+1=0$ бошад.

472. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 5xy+3x^2=57, \\ 15xy-x^2=81, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=b. \end{cases}$

27. Формулаи суммаи *n* аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ

Шарҳи мақсади асосиро аз ҳалли мисол сар мекунем. Бо ин мақсад дар назди худ масъалаи ёфтани суммаи

$$1+2+2^2+\ldots+2^{63}$$

-ро мегузорем.* Суммаи болоиро бо S ишорат карда, баъди ба 2 зарб кардану фарқи $2S-S$-ро тартиб додан ҳосил мекунем:

$$2S-S=(2+2^2+2^3+\ldots+2^{64})-(1+2+2^2+\ldots+2^{63})=2^{64}-1.$$

Яъне $S=2^{64}-1$. Ҳисоб карда шудааст, ки $2^{64}-1$ ба 18446744073709551615 баробар аст.

Тарзи ҳалли масъалаи дар боло зикршуда ба ёфтани суммаи n-аъзои аввали прогрессияи геометрии (b_n), ки махраҷаш q аст, имконият медиҳад. Ба ибораи дигар дар асоси мулоҳизаҳои болоӣ суммаи

$$S_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n \qquad (1)$$

-ро ёфтан мумкин аст. Ҳар ду қисми (1)-ро бо q зарб зада

* Хонанда ривояти ба ин сумма вобастаро, ки дар саршавии эраи мо чун масъала - қиссаи ихтироъкори шоҳмот дар байни мардум маъруф буд, аз қисми «Маълумоти таърихӣ» ёфта метавонад.

$$q \cdot S_n = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \ldots + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q =$$
$$= b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n \cdot q$$

ё

$$q \cdot S_n = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n \cdot q \qquad (2)$$

-ро ҳосил мекунем. Аз баробариҳои (1) ва (2) истифода бурда фарқи $q \cdot S_n - S_n$-ро тартиб медиҳем:

$$S_n \cdot q - S_n = (b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n \cdot q) - (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n) =$$
$$= b_n \cdot q - b_1$$

Инак, $S_n \cdot q - S_n = (b_n \cdot q - b_1)$. Аз ин баробарӣ ҳангоми $q \neq 1$ будан меёбем:

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1} \qquad (3)$$

Формулаи (3) суммаи n-аъзои аввалаи прогрессияи геометрии (1)-ро ифода мекунад. Агар $q=1$ бошад (ҳамаи аъзоҳои прогрессия ба аъзои аввала баробаранд), он гоҳ аз (1)

$$S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} = \underbrace{b_1 + b_1 + b_1 + \cdots + b_1}_{n\text{-то}} = n \cdot b_1$$

ҳосил мешавад.

Дар ҳалли масъалаҳое, ки маълумҳояш аъзои якум ва махраҷи прогрессияро дарбар мегиранд, қулай аст, ки аз формулаи

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \qquad (4)$$

истифода барем. Формулаи (4) баъди ба ҷои b_n гузоштани $b_1 \cdot q^{n-1}$ ҳосил мегардад (ниг. ба формулаи (1)-и п. 26).

Мисоли 1. Суммаи нӯҳ аъзои аввалаи прогрессияи геометриро, ки барояш $b_1=2$ ва $q=\frac{1}{3}$ аст, меёбем.

Дар ин ҷо қулай аст, ки аз формулаи (4) истифода барем:

$$S_9 = \frac{2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^9 - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{19683} - 1\right)}{-\frac{2}{3}} = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{19683}\right) =$$
$$= 3 \cdot \frac{19682}{19683} = \frac{19682}{6561} = 2\frac{6551}{6561}, \qquad S_9 = 2\frac{6551}{6561}.$$

Мисоли 2. Агар $q=2$ ва $b_{10}=2560$ бошад, он гоҳ суммаи даҳ аъзои аввалаи прогрессияи геометриро меёбем.

Фаҳмост, ки $b_{10} = b_1 \cdot q^9$, $2560 = b_1 \cdot 2^9$, $2560 = 512 \cdot b_1$, $b_1 = 5$ аст. Пас, аз рӯи формулаи (3) суммаи матлуб ба

$$S_{10} = \frac{b_{10} \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{2560 \cdot 2 - 5}{2 - 1} = 5120 - 5 = 5115.$$

баробар мешавад.

Ҷавоб: $S_{10} = 5115$.

М и с о л и 3. Суммаи ҳашт аъзои аввалаи прогрессияи геометриро меёбем, агар $b_5=3125$ ва $b_7=78125$ бошанд.

Дар ин ҷо ифодакунии b_7 ба воситаи b_5 қулай мебошад: $b_7=b_6\cdot q=b_5\cdot q^2$. Аз ин баробарӣ аввал q^2 ва баъд q-ро меёбем:

$$q^2=\frac{b_7}{b_5}=\frac{78125}{3125}=25, \qquad q=\pm 5.$$

Натиҷаи охирин мавҷудияти ду прогрессияро ифода мекунад, ки шарти масъаларо қаноат менамоянд.

Бигузор $q=5$ бошад, он гоҳ $b_1=\frac{b_5}{q^4}=\frac{3125}{625}=5$,

ва $S_8=\frac{b_8\cdot q-b_1}{q-1}=\frac{b_7\cdot q^2-b_1}{q-1}=\frac{78125\cdot 25-5}{5-1}=\frac{1953125-5}{4}=\frac{1953120}{4}=488280$ мешавад.

Акнун ба ҷои q адади -5-ро мегузорем. Дар ин ҳолат суммаи матлуб (аз формулаи (4) истифода мебарем) ба

$$S_8=\frac{b_1\cdot(q^8-1)}{q-1}=\frac{5\left[(-5)^8-1\right]}{-5-1}=\frac{5\cdot(390625-1)}{-6}=5\cdot(-65104)=-325520$$

баробар мешавад.

М и с о л и 4. Суммаи аъзоҳои пайдарпаии 1; x; x^2; ...; x^{n-1} $(x\neq 1)$-ро меёбем.

Дар ҳақиқат, ҷамъшавандаҳои суммаи $1+x+x^2+...+x^{n-1}(x\neq 1)$ аъзоҳои пайдарпаии $1, x, x^2, x^3, ..., x^{n-1}$ мебошанд. Ин пайдарпай бошад прогрессияи геометриро бо додашудаҳои $b_1=1$, $q=x$ ва $b_n=x^{n-1}$ ифода мекунад. Аз ин рӯ, ҳалли масъала ба ёфтани суммаи n-аъзои аввалаи прогрессияи (x_n) оварда мешавад. Мувофиқи (3)

$$S_n=\frac{x^{n-1}\cdot x-1}{x-1}=\frac{x^n-1}{x-1} \quad \text{ё} \quad 1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1} \quad (x\neq 1)$$

мешавад. Аз баробарии охирин якчанд формулаҳои маълумро ҳосил кардан мумкин аст. Бо ин мақсад ду тарафи онро ба $x-1$ зарб мекунем:

$$x^n-1=(x-1)(1+x+x^2+...+x^{n-1}) \qquad (5)$$

Ба ҷои n пай дар пай қиматҳои 2 ва 3-ро мегузорем, он гоҳ ҳангоми $n=2$ будан

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

ва ҳангоми $n=3$ будан

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

-ро ҳосил мекунем, ки онҳо формулаҳои зарби мухтасаранд.

Зарурияти дар оянда истифодабарии формулаҳои зеринро ба ҳисоб гирифта, онҳоро пешниҳод менамоем:

$$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1), \quad (n=4)$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1), \quad (n=5)$$
$$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1), \quad (n=6)$$

Мисоли 5. Дар прогрессияи геометрӣ панҷ аъзо ҳаст. Суммаи он бе аъзои якум ба 19,5 ва бе аъзои охирин ба 13 баробар аст. Аъзоҳои канориро меёбем.

Ҳал. Аз рӯи додашудаҳои масъала ифодаҳои

$$b_2+b_3+b_4+b_5=19,5$$

ва

$$b_1+b_2+b_3+b_4=13$$

-ро навиштан мумкин аст. Агар ду тарафи баробарии дуюмро бо q зарб кунем, он гоҳ дар тарафи чап суммаи ба тарафи чапи баробарии якум баробарро ҳосил мекунем:

$$q\cdot(b_1+b_2+b_3+b_4)=13\cdot q; \qquad b_2+b_3+b_4+b_5=13q;$$

$$19,5=13q; \qquad q=19,5:13; \qquad q=1,5.$$

Аз тарафи дигар, аз $b_1+b_2+b_3+b_4=13$ва формулаи (4) пайдо мекунем:

$$\frac{b_1\cdot(q^4-1)}{q-1}=13; \quad \frac{b_1\cdot(1,5^4-1)}{1,5-1}=13; \quad b_1\cdot(5,0625-1)=13\cdot0,5;$$

$$b_1\cdot4,0625=6,5; \qquad b_1=6,5:4,0625; \qquad b_1=1,6.$$

Акнун аз формулаи $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$ аъзои панҷумро меёбем:

$$b_5=b_1\cdot q^4=1,6\cdot1,5^4=1,6\cdot5,0625=8,1.$$

Ҷавоб: $b_1=1,6$; $b_5=8,1$.

Мисоли 6. Суммаи ду адад ба 30 ва ҳосили зарбашон ба 144 баробар аст. Ин ададҳо аъзои аввалаи прогрессияи геометрии махраҷаш $q>1$ мебошанд. Суммаи ҳафт аъзои прогрессияро меёбем.

Ҳал. Прогрессияи геометриро бо (b_n) ишорат мекунем. Он гоҳ $b_1+b_2=30$ ва $b_1\cdot b_2=144$ мешавад.

Аз системаи $\begin{cases}b_1+b_2=30,\\ b_1\cdot b_2=144;\end{cases}$ b_1 ва q-ро меёбем:

$$\begin{cases}b_1+b_2=30,\\ b_1\cdot b_2=144;\end{cases} \begin{cases}b_2=30-b_1,\\ b_1\cdot(30-b_1)=144;\end{cases} \begin{cases}b_2=30-b_1,\\ b_1^2-30b_1+144=0;\end{cases} \begin{cases}b_1'=6,\ b_1''=24,\\ b_2'=24,\ b_2''=6.\end{cases}$$

Ҳамин тариқ, ду прогрессияҳои

$$6;\ 24;\ 96;\ 284;\ \ldots$$

$$24;\ 6;\ \frac{6}{4};\ \frac{6}{16};\ \ldots$$

ҳосил мешаванд, ки махраҷи якумаш $q=24:6=4>1$ ва дуюмаш $q=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}<1$ аст. Аз ин рӯ, прогрессияи дуюмро аз эътибор соқит намуда, барои якумаш аввал $b_7=b_1\cdot q^6=6\cdot4^6=24576$ ва баъд S_7-ро аз рӯи формулаи (3) меёбем:

$$S_7=\frac{b_7\cdot q-b_1}{q-1}=\frac{24576\cdot4-6}{4-1}=\frac{98298}{3}=32766.$$

? 1. Формулаҳои суммаи n-аъзои аввали прогрессияи геометриро номбар кунед. 2. Агар махраҷи прогрессияи геометрӣ ба 1 баробар бошад, он гоҳ суммаи n-аъзои аввалааш чанд аст?

473. Прогрессияи геометрии

а) $2{,}1;\ -4{,}2;\ \ldots$ г) $-2;\ -8;\ \ldots$ ж) $64;\ -16;\ \ldots$
б) $36;\ 54;\ \ldots$ д) $-16;\ -32;\ \ldots$ з) $-3;\ 3^2;\ \ldots$
в) $-1;\ \frac{1}{3};\ \ldots$ е) $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ldots$

дода шудааст. Суммаи чор аъзои аввалаи онро ёбед.

474. Аз рӯи додашудаҳо суммаҳои нишон додашудаи прогрессияи геометриро ёбед:

а) $b_2=8,\ q=\frac{1}{2},\ S_6$ - ?; г) $c_1=-1,\ q=2,\ S_4$ - ?;
б) $b_1=500,\ q=\frac{1}{5},\ S_7$ - ? д) $x_1=4,\ q=-\frac{3}{2},\ S_5$ - ?;
в) $c_1=-4,\ q=-3,\ S_8$ - ? е) $x_1=5{,}5,\ q=0{,}55,\ S_3$ - ?

475. Нишон диҳед, ки пайдарпаии (b_n) прогрессияи геометрӣ аст. Суммаи n-аъзои аввалини онро ёбед.

а) $b_n=9{,}2\cdot 3^n$; в) $b_n=4^{n+1}$; д) $b_n=4\cdot 7^n$;
б) $b_n=8\cdot 2^{n-1}$; г) $b_n=0{,}1\cdot 4^n$; е) $b_n=2\cdot 3^n$.

476. Суммаи n-аъзои аввалини прогрессияи геометриро ёбед:

а) $1;\ 3^2;\ 3^4;\ \ldots;$ ж) $x^2;\ 1;\ \frac{1}{x^2};\ \ldots,\ (x\neq 0,\ x\neq\pm1)$;
б) $2^2;\ 2^3;\ 2^4;\ \ldots;$ з) $5;\ 5;\ 5;\ \ldots;$
в) $-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{4};\ \ldots;$ и) $1;\ -2;\ 4;\ \ldots;$
г) $1;\ -x;\ x^2;\ \ldots;\ (x\neq-1)$; к) $1;\ 2x;\ 4x^2;\ \ldots;\ \left(x\neq\frac{1}{2}\right)$;
д) $1;\ x^2;\ x^4;\ \ldots;\ (x\neq\pm1)$; л) $1{,}2;\ -3{,}6;\ 10{,}8;\ \ldots$.
е) $1;\ x^3;\ x^6;\ \ldots;\ (x\neq-1)$;

477. Прогрессияи геометрии (b_n) дода шудааст. Агар:

а) $b_5=32{,}4,\ q=1{,}5$ бошад, S_6-ро;
б) $b_7=\frac{64}{81},\ q=\frac{2}{3}$ бошад, S_7-ро;
в) $b_3=10,\ q=\frac{1}{3}$ бошад S_4-ро;
г) $b_5=-364{,}5,\ q=-3$ бошад, S_5-ро
ёбед.

478. Суммаи n-аъзои прогрессияи геометриро ёбед, ки дар он:

а) $a_1=2,\ q=2,\ n=5$; б) $a_1=0{,}5,\ q=3,\ n=4$
бошад.

479. Махраҷ ва суммаи n-аъзои прогрессияи геометриро ёбед, агар

а) $a_1=2$, $n=7$; $a_n=1458$; б) $a_1=76\frac{4}{5}$, $n=6$; $a_n=-\frac{12}{5}$

бошад.

480. Аъзои якум ва суммаи n-аъзои прогрессияи геометриро ёбед, агар

а) $q=1\frac{1}{2}$, $n=6$; $a_n=2\frac{17}{32}$; б) $q=4$, $n=8$, $a_n=49152$

бошад.

481. Аъзои аввала ва охирини прогрессияи геометриро ёбед, агар

а) $n=9$, $q=2$, $S_n=1533$; б) $n=12$, $q=2$, $S_n=4095$

бошад.

482. Дар прогрессияи геометрии аъзоҳояш мусбати (b_n) $b_3=18$ ва $b_7=1458$ аст. Суммаи даҳ аъзои аввалаи онро ёбед.

483. Суммаи аъзоҳои прогрессияи геометрии 1; b_2; b_3; b_4; b_5; b_6; 4096-ро ёбед.

484. Чор ададеро ёбед, ки прогрессияи геометриро бо махраҷи $q>1$ ташкил диҳаду суммаи аъзоҳои канориаш ба 35 ва суммаи ду аъзоҳои боқимондааш ба 30 баробар бошад. Дар ҷавоб панҷяки суммаашонро нависед.

485. Суммаи се аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ ба 28 ва суммаи се аъзои пасояндааш (яъне b_4; b_5 ва b_6) ба 3,5 баробар аст. Аъзои дуюми прогрессияро ёбед.

486. Суммаи прогрессияи геометриеро ёбед, ки он аз ҳафт аъзо иборат буда, суммаи се аъзои аввалааш ба 26 ва се аъзои охиринаш ба 2106 баробар шавад.

487. Фарқи байни аъзоҳои дуюм ва якуми прогрессияи геометрӣ $(b_n>0)$ ба 20, фарқи байни аъзои чоруму якум бошад ба 140 баробар аст. Суммаи шаш аъзои аввалаи прогрессияро ёбед.

Машқҳо барои такрор

488. Се бригадаи коргарон дар як смена 104 детал тайёр карданд. Деталҳои бригадаи якум аз дуюмаш дида 12-то камтар аст. Деталҳои тайёркардаи бригадаи сеюм бошад $\frac{5}{8}$-ҳиссаи шумораи умумии деталҳои бригадаҳои якум ва дуюмро ташкил медиҳад. Ҳар як бригада чанд деталӣ тайёр карда аст?

489. Дар шакли бисёраъзогии стандартӣ нависед:

а) $2x\cdot(x^2-7x-3)+7$; г) $3y^2-2y\cdot(5+1,5y)+5$;

б) $4b^2\cdot(5b^2-3b+2)+2$; д) $6x^2-3x\left(2x-\frac{2}{3}\right)+1$;

в) $(y^2-1,4y+6)\cdot 1,5y-3$; е) $7b\cdot(4c-b)+4c\cdot(c-7b)$.

490. Бо ёрии формулаҳои $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ қимати:

а) 61^2; б) 999^2; в) $9,9^2$; г) 199^2; д) 702^2; е) $10,2^2$

-ро ёбед.

491. Нишон диҳед, ки

а) $\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ ба $\sqrt{7}+\sqrt{6}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ ба $\sqrt{7}+\sqrt{5}$

баробар аст.

492. Ҳамаи қиматҳои a ва b-ро, ки барояшон системаи

$$\begin{cases}(1+a)\cdot x+(a+b)\cdot y=b-a,\\(5+a)\cdot x+2(a+b)\cdot y=b-1\end{cases}$$

ҳал надорад, ёбед.

493. Нобаробарии

$$\frac{2x+2}{7}-\frac{4x-3}{2}<\frac{2+13x}{14}-1$$

-ро ҳал кунед.

494. Ифодаро ба намуди ҳосили зарб нависед:

а) $2^{n+4}-2^{n}$; б) $4^{n+1}-4^{n-1}$; в) $5^{2n}+5^{n}$.

495. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии функсияро ёбед:

а) $y=-2x^2+x$; б) $y=3x^2+6x-15$.

496. Экстремуми функсияи $y=-2x^2+4x-6$-ро ёбед.

497. Қатораи тезгард бо сабабҳои техникӣ 16 дақиқа боздошта шуд. Бо мақсади дар сари вақт ба пункти зарурӣ расидан қатора 80 км-ро бо суръати нисбат ба аввала 10 км/соат зиёдтар ҳаракат намуд. Суръати аввалаи қатораро ёбед.

28. Суммаи прогрессияи геометрии беохири камшаванда

Дар пунктҳои 25-27 мо ба таърифи прогрессияи геометрӣ, ёфтани аъзои n-ум ва суммаи n-аъзои аввалааш шинос шудем. Дар он ҳолатҳо мо ягон маротиба ба табиати афзуншавандагӣ ва камшавандагии (ин мафҳумҳо аз мавзӯъҳои ба прогрессияи арифметикӣ бахшида шуда шиносанд) мисолҳои прогрессияҳои геометрии омӯхтаамон диққат надода будем. Дар ин мавзӯъ ба як синфи прогрессияҳо - прогрессияҳои геометрии беохири камшаванда, ки қариб дар тамоми соҳаҳо татбиқи худро ёфтааст, шинос шуда кӯшиши ёфтани суммаи аъзоёни онро мекунем.

Т а ъ р и ф. **Агар махраҷи прогрессияи геометрии**

$$(b_n)\qquad b_1;\ b_2;\ b_3;\ b_4;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots$$

шарти $|q|<1$-ро қаноат намояд, онро прогрессияи геометрии беохири камшаванда меноманд.

Масалан,

$$1;\ \frac{1}{7};\ \frac{1}{7^2};\ \frac{1}{7^3};\ \ldots;\ \frac{1}{7^{n-1}};\ \ldots$$

прогрессияи геометрии беохири камшаванда мешавад, чунки

$$q=\frac{1}{7}<1 \text{ аст.}$$

Пайдарпаии $$-1;\ \frac{1}{6};\ -\frac{1}{6^2};\ \frac{1}{6^3};\ -\frac{1}{6^4};\ \ldots$$
низ прогрессияи геометрии беохири камшаванда шуда метавонад, чунки барояш шарти $|q|=\left|-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}<1$ иҷро мешавад.

Акнун гузориш ва шарҳи масъаларо аз масъалаи геометрии зерин сар мекунем. Дар расм (ниг. ба расми 90) порчаи дарозиаш ба 1 воҳид баробари

Расми 90

AB дода шудааст. Бо B_1 - миёнаҷои порчаи AB, бо B_2 - миёнаҷои порчаи B_1B, бо B_3 - миёнаҷои порчаи B_2B-ро ишорат мекунем. Амалиётро ҳамин тавр давом дода дарозии порчаҳои AB_1, B_1B_2, B_2B_3 ва ғайраро ҳосил мекунем, ки он прогрессияи геометрии беохирро бо махраҷи $q=\frac{1}{2}$ ташкил медиҳад:
$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ \ldots \qquad (1)$$
Аз формулаи (4)-и п. 27 суммаи n-аъзои аввалинашро меёбем:
$$S_n=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right]}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{-1}=1-\frac{1}{2^n}, \qquad S_n=1-\frac{1}{2^n}.$$
Маълум, ки

агар $n=5$ бошад, он гоҳ $\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$;

агар $n=15$ бошад, он гоҳ $\frac{1}{2^{15}}=\frac{1}{32768}$;

агар $n=25$ бошад, он гоҳ $\frac{1}{2^{25}}=\frac{1}{34834432}$ мешавад.

Ададҳои ҳосилшудаи $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{32768}$ ва $\frac{1}{34834432}$ аз он шаҳодат медиҳанд, ки бо зиёд шудани шумораи ҷамъшавандаҳо қимати касри $\frac{1}{2^n}$ хеле хурд шуда ба нул майл мекунад. Бинобарон, ҳангоми беохир зиёд шудани n фарқи $1-\frac{1}{2^n}$ ба адади 1 хеле наздик мешавад ва ё ба он майл мекунад, мегӯянд. Дар ин ҳолат адади 1-ро суммаи прогрессияи геометрии беохири камшавандаи (1) номида, чунин менависанд:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$$

Суммаи дарозии порчаҳои AB_1, B_1B_2, B_2B_3 ... ба дарозии порчаи AB баробар аст. Ин аст маънои геометрии масъалаи ҳал кардаамон*. Барои прогрессияи геометрии дилхоҳи

$$b_1;\quad b_1\cdot q;\quad b_1\cdot q^2;\quad b_1\cdot q^3;\quad \ldots$$

шарти $|q|<1$-ро қонеъгардонанда суммаи n-аъзои аввалаашро меёбем:

$$S_n=\frac{b_1\cdot(q^n-1)}{q-1}=\frac{b_1\cdot q^n-b_1}{q-1}=\frac{b_1-b_1\cdot q^n}{1-q}=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n,$$

$$S_n=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n.$$

Ҳангоми $|q|<1$ будан ва беохир зиёд шудани аъзоҳои прогрессия зарбкунандаи q^n ва аз ин ҳосили зарби $\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$ ҳам ба 0 наздик мешавад (инро мо бевосита ҳангоми ёфтани суммаи аъзоҳои пайдарпаии мушаххаси (1) мушоҳида карда будем). Ин бошад ба хулосаи он ки $S_n\approx\frac{b_1}{1-q}$ ** ё адади $\frac{b_1}{1-q}$ ба суммаи прогрессияи геометрии беохир камшавандаи (b_n) бо махраҷи $|q|<1$ баробар аст, меорад.

Инро дар шакли

$$b_1+b_1\cdot q+b_1\cdot q^2+\ldots=\frac{b_1}{1-q}$$

навишта, баъди тарафи чапро бо S ишорат намудан, формулаи

$$S=\frac{b_1}{1-q}\tag{2}$$

-ро ҳосил мекунем.

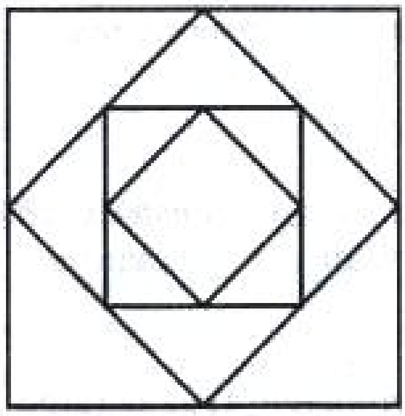
Ҳангоми дар прогрессия $|q|\geq1$ будан бо афзудани n суммаи аъзоҳояш ба ягон адад наздик намешаванд. Дар ин ҳолат мегӯянд, ки прогрессия сумма надорад.

Дар поён якчанд мисол меорем, ки бо ёрии формулаи (2) ҳал мешаванд.

---

* Агар дар шарти масъала дарозии порчаи AB-ро ба 2 воҳид баробар мегирифтем, он гоҳ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$ ҳосил мекардем.

** Бо афзудани n суммаи S_n ба $\frac{b_1}{1-q}$ майл мекунад.



Расми 91

М и с о л и 1. Квадрати тарафаш a см дода шудааст. Миёнаҷои тарафҳои он қуллаҳои квадрати дуюм, миёнаҷои квадрати дуюм қуллаҳои квадрати сеюм ва ғайра мебошанд (расми 91). Суммаи масоҳати ҳамаи квадратҳоро меёбем.

Ҳ а л. Аз масъала намоён аст, ки масоҳати ҳар як квадрати пасоянд ба нисфи масоҳати квадрати пешоянд баробар аст.

Пайдарпаии масоҳати квадратҳо прогрессияи геометриро бо $b_1=a^2$ ва $q=\frac{1}{2}<1$ ифода мекунад, ки суммаашон ба

$$S=a^2:(1-\frac{1}{2})=a^2:\frac{1}{2}=a^2\cdot 2=2a^2$$

баробар аст. Ҳамин тариқ, суммаи масоҳатҳои ҳамаи квадратҳо ба $2a^2$ (см^2) баробар буданашро ҳосил мекунем.

Пеш аз ҳалли мисоли навбатӣ қайд мекунем, ки ҳар як адади ратсионалиро ба намуди касри даврии даҳии беохир ифода кардан мумкин аст. Адади ратсионалии $\frac{m}{n}$ (m-адади бутун ва n-адади натуралӣ)-ро бо роҳи тақсимкунии сурат ба махраҷ ба намуди касри даҳии беохир меоранд. Баръакс, ҳар як касри даҳии даврии беохир адади ратсионалиро ифода мекунад. Ин ду маълумоти мухтасар ба мо аз синфи ҳаштум маълум аст. Бо ёрии суммаи прогрессияи геометрии беохири камшаванда нишон додан мумкин аст, ки касри *даврии даҳии беохирро ба намуди* $\frac{m}{n}$ *овардан мумкин аст.*

Дар синфи 8 (ниг. ба боби 2, §4, п. 11) ҳангоми касри давриро ба касри ратсионалӣ гардонидан аз қоидаи зерин истифода мекардем: *«Аз адади то даври дуюм буда, адади то даври якум бударо тарҳ карда дар сурат менависем. Дар махраҷ бошад, ҳамон миқдор 9 менависем, ки ба шумораи рақамҳои давр баробар бошад. Ба он ҳамон миқдор нул илова мекунем, ки он ба миқдори рақамҳои то давр буда баробар аст».*

Акнун ин қоидаро дар мисоли касрҳои даврии даврашон аз ду адад иборат асоснок мекунем. Бигузор $A=0,\overline{abc}\,(\overline{df})$ чунин каср аст. Азбаски $A=0,\overline{abc}+0{,}000(\overline{df})$ мебошад, пас кифоя аст, ки тарзи баргардонидани касри B=0, $(\overline{df})$-ро нишон диҳем. Мувофиқи таъриф

$$B=0,\ (\overline{df})=0,\ \ df+0{,}00df+0{,}0000df+0{,}000000df+\ldots$$

мешавад, ки он суммаи беохирро ифода мекунад.

Тафтиши бевосита шаҳодати он аст, ки суммаи мазкур прогрессияи геометрии беохир камшавандаро бо махраҷи $q=0{,}01$ ташкил медиҳад.

Аз ин ҷо, дар асоси формулаи (2) ҳосил мекунем:

$$B = 0,(\overline{df}) = \frac{0,df}{1-0,01} = \frac{0,df}{0,99} = \frac{df}{99}.$$

Н а т и ҷ а. *Касри даврии беохири даҳии дилхоҳро бо ҳамин тарз дар шакли касри оддӣ навиштан мумкин аст.*

М и с о л и 2. Касри даврии даҳии беохири 0,(81)-ро ба намуди касри оддӣ менависем.

Маълум, ки ин адад суммаи беохири ($\overline{df}=81$)

0,81+0,0081+0,000081+0,00000081+...

мебошад. Аъзоҳои сумма прогрессияи геометрии беохир камшавандаро, ки дар он $b_1=0{,}81$ ва $q=0{,}01<1$ аст, ифода мекунанд. Пас, ин сумма ба

$$S = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}, \quad \text{яъне} \quad 0,(81) = \frac{9}{11}$$

баробар мешавад.

М и с о л и 3. Суммаи прогрессияи беохири камшавандаро меёбем, агар суммаи аъзоҳои якуму чорум ба 54 ва дуюму сеюм ба 36 баробар бошад.

Ҳ а л. Дар асоси шарти масъала системаи

$$\begin{cases} b_1 + b_4 = 54, \\ b_2 + b_3 = 36 \end{cases}$$

-ро доро ҳастем, ки он бо осонӣ ба шакли

$$\begin{cases} b_1 \cdot (1+q^3) = 54, \\ b_1 \cdot q \cdot (1+q) = 36 \end{cases}$$

оварда мешавад. Муодилаи якумро ба дуюм тақсим карда ҳосил мекунем:

$$\frac{1-q+q^2}{q} = \frac{3}{2} \quad \text{ё} \quad 2q^2 - 5q + 2 = 0.$$

Азбаски шарти мисол ёфтани суммаи прогрессияи геометрии беохири камшавандаро тақозо мекунад, пас аз байни решаҳои муодилаи квадратии охирин, ки $q_1=2$ ва $q=\frac{1}{2}$ мебошанд, $q=\frac{1}{2}<1$-ро мегирем. Қимати интихобкардаи q-ро ба муодилаи дилхоҳи система гузошта $b_1=48$-ро ҳосил мекунем. Аз рӯи қиматҳои маълуми b_1 ва q суммаи матлубро меёбем:

$$S = \frac{48}{1-\frac{1}{2}} = \frac{48}{\frac{1}{2}} = 96, \quad S = 96.$$

Мисоли 4. Суммаи прогрессияи геометрии беохири

$$25;\ -5;\ 1;\ -\frac{1}{5};\ \frac{1}{25};\ -\frac{1}{125};\ \ldots$$

-ро ҳисоб мекунем.

Маълум, ки махрачи прогрессия $q=-\frac{1}{5}$ аст. Пас, прогрессия камшаванда будааст. $b_1=25$ буданашро ба назар гирифта аз рӯи формулаи (2) ҳосил мекунем:

$$S=\frac{25}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}=\frac{25}{1+\frac{1}{5}}=\frac{25}{\frac{6}{5}}=\frac{25\cdot 5}{6}=\frac{125}{6}.$$

Яъне, $25-5+1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\ldots=\frac{125}{6}$ мешавад.

?

1. Прогрессияи геометрии беохири камшаванда чист? **2.** Дар кадом ҳолат аз формулаи $S_n=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$ формулаи $S\approx\frac{b_1}{1-q}$-ро ҳосил мекунанд? **3.** Оё бо ёрии прогрессияи геометрии беохири камшаванда касри даҳии даврии беохирро ба намуди касри оддӣ овардан мумкин аст? Мисолҳо оред.

498. Иҷрои шарти $|q|<1$-ро барои прогрессияи геометрии зерин санҷида, суммаашонро ёбед:

а) $27;\ 9;\ 3;\ 1;\ \ldots;$ ж) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1};\ \frac{1}{2-\sqrt{2}};\ \frac{1}{2};\ \ldots;$

б) $-8;\ 2;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{8};\ \ldots;$ з) $\sqrt{3}(\sqrt{3}-2);\ \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}};\ \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}};\ \ldots;$

в) $4;\ \frac{4}{5};\ \frac{4}{25};\ \frac{4}{125}\ \ldots;$ и) $\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3^2};\ \frac{2}{3^3};\ -\frac{2}{3^4};\ \ldots;$

г) $-3;\ \sqrt{3};\ -1;\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \ldots;$ к) $16;\ 4;\ 1;\ \frac{1}{4};\ \ldots;$

д) $4\sqrt{2};\ 2;\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{4};\ \ldots;$ л) $-6;\ -2;\ -\frac{2}{3};\ \ldots;$

е) $15;\ 3\sqrt{5};\ 3;\ \frac{3\sqrt{5}}{5};\ \ldots;$ м) $5;\ -1;\ \frac{1}{5};\ -\frac{1}{5^2};\ \ldots.$

499. Суммаи прогрессияи геометрии беохирро ёбед:

а) $-24;\ 6;\ -\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ \ldots;$ в) $\frac{1}{a};\ 1;\ a;\ a^2;\ \ldots\ (|a|<1,\ a\neq 0);$

б) $-1;\ \frac{2}{3};\ -\frac{4}{9};\ \frac{8}{27};\ \ldots;$ г) $-\frac{1}{a};\ 1;\ -a;\ a^2;\ \ldots\ (|a|<1,\ a\neq 0).$

500. Суммаҳоро ёбед:

а) $1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\ldots;$ г) $5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots;$

б) $-\frac{1}{a^2}+a-a^4+a^7-a^{10}+\ldots(|a|<1,\ a\neq 0);$ д) $12+8+\frac{16}{3}+\frac{32}{9}+\ldots;$

в) $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\ldots;$ е) $1-\frac{1}{11}+\frac{1}{121}-\frac{1}{1331}+\ldots.$

501. Суммаи прогрессияи геометрии беохири камшавандаи аъзоҳояш мусбатро ёбед, агар аъзои якумаш ба 4 ва фарқи байни аъзои сеюму панҷумаш ба $\frac{32}{81}$ баробар бошад.

502. Суммаи аъзоҳои прогрессияи геометрии беохири камшаванда ба 56, суммаи квадратҳои аъзоҳои ҳамон прогрессия ба 448 баробар аст. Аъзои якум ва махраҷи прогрессияро ёбед.

503. Прогрессияи геометрии беохири (b_n)-ро бо махраҷи $|q|<1$ ёбед, агар аъзои дуюмаш ба 6 ва суммааш ба ҳаштяки суммаи квадратҳои аъзоҳояш баробар бошад. Дар ҷавоб (агар прогрессия мавҷуд бошад) се аъзои аввалаашро нависед.

504. Дар дохили давраи радиусаш ба R см баробар секунҷаи мунтазам чунон кашида шудааст, ки куллаҳояш дар давра мехобанд. Дар дохили секунҷаи мунтазам бошад давраи дарункашидашудаи секунҷа сохта шудааст; дар дохили давраи дарункашидашуда боз секунҷаи нави мунтазами куллаҳояш дар давра воқеъгардида кашида шудааст ва ин амал беохир давом мекунад. Суммаи дарозии давраҳо ва масоҳати доираҳоро ёбед.

505. Дар дохили квадрат доираи дарункашидашуда сохта шудааст, дар дохили доира бошад квадрати нави куллаҳояшро дарбаргиранда кашида шудааст; дар дохили квадрати дуюм боз доираи дарункашидашуда сохта шудааст ва ҳамин тавр протсесс давом мекунад. Агар дарозии тарафи квадрати якум ба b см баробар бошад, он гоҳ суммаи масоҳатҳои ҳамаи доираҳо ба чӣ баробар мешавад?

506. Махраҷи прогрессияи геометрии беохир камшавандаро, ки аъзои якумаш ба 2 ва сечанди суммааш ба 10 баробар аст, ёбед.

507. Аъзои панҷуми прогрессияи геометрии беохири камшавандаро ёбед, агар махраҷаш ба $\frac{1}{8}$ ва суммааш ба $3\frac{3}{7}$ баробар бошад.

508. Суммаи прогрессияи геометрии камшавандаи беохир ба 25 ва суммаи ду аъзои аввалааш ба 9 баробар аст. Прогрессияро ёбед.

509. Ададҳоро ба намуди касри оддӣ нависед:

а) 0, (8); д) 0,2 (3); к) 0,4 (6); о) 0,13 (12);
б) 0, (3); е) 0,82 (45); л) 0,01 (12); п) 0,21 (22);
в) 0, (26); ж) 0, (5); м) 0,1 (3); р) 0,13 (11);
г) 2, (71); з) 1, (72); н) 2, (1); с) 0,2 (52).

Машқҳо барои такрор

510. Амалҳоро иҷро кунед:

а) $\frac{2y^3+2y^2}{y^4+y^3+y^2}\cdot\frac{y^3+y^2+y}{4y^4+4y^3}$; б) $\frac{2(a^3-b^3)}{3ab(a+b)}:\frac{a^2-b^2}{a^2b+ab^2}$.

511. Исбот кунед, ки барои $a>0$ ва $b>0$ нобаробарии

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

ҷой дорад.

512. Махраҷро аз радикал озод намоед:

а) $\frac{4}{3-\sqrt{3}}$; б) $\frac{5}{3+\sqrt{3}}$; в) $\frac{6}{5-\sqrt{2}}$.

513. Ҷуфт ва тоқии функсияҳои зеринро муайян кунед:

а) $f(x)=x^3-3x$; в) $f(x)=-2(x^4-2x^2+1)$;

б) $f(x)=x^4-8x^2$; г) $f(x)=x+\frac{5}{x}$?

514. Периметри росткунҷа ба 8 см баробар аст. Масоҳати росткунҷаро чун функсияи тарафаш ифода кунед.

515. Суръати ҳаракати катер ба муқобили ҷараёни оби дарё 20,1 км/соат ва суръати об 1,5 км/соат аст. Суръати катерро дар оби ором ва самти ҷараёни дарё ҳисоб кунед?

516. Графики функсияҳои $y=2x^2-5$ ва $y=2x^2+3x-5$-ро дар як ҳамвории координатавӣ созед.

517. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $3x^2-7x+4<0$; б) $-3x^2+27\geq0$.

§9. БАЪЗЕ ХОСИЯТҲОИ ДИГАРИ ПРОГРЕССИЯҲО. ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲОИ ҲАР ДУ НАМУДИ ПРОГРЕССИЯҲОРО ДАРБАРГИРАНДА

Бигузор прогрессияи арифметикии (a_n) ва геометрии (b_n) дода шуда бошанд. Чанд хосияти нави ин прогрессияҳоро меорем.

I. Барои прогрессияи арифметикӣ.

1. Ҳар як аъзои (a_n) ба миёнаи арифметикии ду аъзои дар як хел дурӣ ҷойгирбуда, баробар аст. Яъне

$$2a_k=a_{k+m}+a_{k-m}, \qquad (1)$$

ки дар ин ҷо k ва m ададҳои натуралианд ва $k>m$ аст.

Дар ҳақиқат, мувофиқи таърифи прогрессия

$$a_{k+m}=a_1+d\cdot(k+m-1), \qquad a_{k-m}=a_1+d\cdot(k-m-1),$$

мешавад.

Ин баробариҳоро ҷамъ карда ҳосил мекунем:

$$a_{k+m}+a_{k-m}=2a_1+d\cdot(k+m-1+k-m-1)=2a_1+2d\cdot(k-1)=2a_k.$$

2. Агар $k+l=r+s$ бошад, он гоҳ $a_k+a_l=a_r+a_s$.

Дар ҳақиқат,

$$a_k+a_l=a_1+d\cdot(k-1)+a_1+d\cdot(l-1)=2a_1+d\cdot(k+l-2),$$
$$a_r+a_s=a_1+d\cdot(r-1)+a_1+d\cdot(s-1)=2a_1+d\cdot(r+s-2)$$

аст. Ҳангоми $k+l=r+s$ будан тарафҳои рости ҳар ду баробарӣ якхелаанд. Пас тарафҳои чапи онҳо низ якхела мешаванд.

Барои прогрессияҳои охирнок, масалан, дорои n-аъзо, аз шарти $1+n=k+(n-k+1)$ дурустии

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n \qquad (2)$$

бармеояд.

II. Барои прогрессияи геометрӣ.

1. Квадрати ҳар як аъзо ба ҳосили зарби ду аъзои аз он дар як хел дурӣ воқеъбуда баробар аст:

$$b_k^2=b_{k-m}\cdot b_{k+m} \qquad (3)$$

ки дар ин ҷо k, m - ададҳои натуралианд ва $k>m$ аст.

Барои ба дурустии тасдиқоти болоӣ боварӣ ҳосил кардан кофист, ки баробариҳои $b_{k+m}=b_1\cdot q^{k+m-1}$ ва $b_{k-m}=b_1\cdot q^{k-m-1}$-ро мувофиқи таърифи прогрессия навишта, ҳосили зарбашонро ёбем:

$$b_{k-m}\cdot b_{k+m}=b_1^2\cdot q^{k-m-1+k+m-1}=b_1^2\cdot q^{2(k-1)}=(b_1\cdot q^{k-1})^2=b_k^2$$

2. Агар $k+l=r+s$ бошад, он гоҳ

$$b_k\cdot b_l=b_r\cdot b_s. \qquad (4)$$

Муқоисаи тарафҳои росту чапи баробариҳои

$$b_k\cdot b_l=b_1\cdot q^{k-1}\cdot b_1\cdot q^{l-1}=b_1^2\cdot q^{k-1+l-1}=b_1^2\cdot q^{k+l-2},$$
$$b_r\cdot b_s=b_1\cdot q^{r-1}\cdot b_1\cdot q^{s-1}=b_1^2\cdot q^{r-1+s-1}=b_1^2\cdot q^{r+s-2}$$

дурустии (4)-ро нишон медиҳад.

Барои прогрессияи геометрии охирноки $b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n$ шарти (4) намуди

$$b_k\cdot b_{n-k+1}=b_1\cdot b_n \qquad (5)$$

-ро мегирад $(k+(n-k+1)=n+1)$.

Қайд мекунем, ки на ҳар гуна пайдарпаии ададӣ, ки дорои хосиятҳои 1 ва 2 аст, прогрессияи арифметикӣ ё геометрӣ шуда метавонанд. Масалан, пайдарпаии

$$1;\ 2;\ 4;\ 5;$$

прогрессияи арифметикӣ нест, ҳол он ки шартҳои (1) ва (2) барояш ҷой доранд. Пайдарпаии

$$1;\ 2;\ 3;\ 6$$

прогрессияи геометрӣ намешавад, гарчанде он шартҳои (3) ва (4)-ро қаноат намоянд.

III. Акнун масъалаҳоеро ҳал мекунем, ки дар матнашон ҳар ду намуди прогрессияҳо вомехӯранд.

Масъалаи 1. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_2=14$ ва $a_3=16$ аст. Чунин прогрессияи геометриро меёбем, ки махраҷаш ба фарқи прогрессияи арифметикӣ баробар буда, суммаи се аъзои аввалаи ҳар ду прогрессия якхела мебошад.

Ҳал. Аз рӯи шарт $d=a_3-a_2=16-14=2$, $a_1=14-d=14-2=12$ ва $a_1+a_2+a_3=12+14+16=42$. Аз ин ҷо, барои прогрессияи геометрии матлуб

$$q=2, \quad 42=b_1+b_1\cdot q+b_1\cdot q^2=b_1\cdot(1+q+q^2)=b_1\cdot(1+2+4)=7b_1.$$

Пас, $b_1=6$.

Инак, (b_n): 6; 12; 24; ... .

Масъалаи 2. Дар прогрессияи арифметикии (a_n) ва геометрии (b_n)-и мусбат аъзоҳои якум (яъне a_1 ва b_1) ба 3 баробаранд. Аъзоҳои сеюм низ бо ҳам баробаранд ($a_3=b_3$). Ин прогрессияҳоро нависед, агар аъзои дуюми прогрессияи арифметикӣ аз аъзои дуюми прогрессияи геометрӣ 6 воҳид зиёд бошад.

Ҳал. 3; $3q$; $3q^2$ аъзоҳои прогрессияи геометрӣ мебошанд. Аз рӯи шарт $a_1=3$, $a_2=3q+6$. Азбаски $a_3-a_2=a_2-a_1$ аст, пас $a_3=2a_2-a_1=6q+9$. Аъзои сеюми прогрессияи геометрӣ ба $3q^2$ баробар аст. Пас, мувофиқи шарт $6q+9=3q^2$. Аз ин ҷо $3q^2-6q-9=0$. Адади мусбати $q=3$ решаи мусбати ин муодила аст. Ҳамин тариқ прогрессияҳои

$$(a_n):\quad 3;\ 15;\ 27;\ 39;\ 51;\ \dots$$
$$(b_n):\quad 3;\ 9;\ 27;\ 81;\ 243;\ \dots$$

ҳалли масъалаанд.

?

1. Нишон диҳед, ки агар аъзоҳои пайдарпаии (a_n) формулаи $2a_k=a_{k+m}+a_{k-m}$-ро ва пайдарпаии (b_n) формулаи $b_k^2=b_{k-m}\cdot b_{k+m}$-ро қаноат намоянд, он гоҳ (a_n) - прогрессияи арифметикӣ ва (b_n) -прогрессияи геометриро ташкил медиҳад. **2.** Формулаҳои (1), (2), (3) ва (4) барои кадом намуди прогрессияҳо ҷой доранд. **3.** Дар мисолҳои мушаххас нишон диҳед, ки иҷрои хосиятҳои дуюм боиси прогрессия будани пайдарпай намешавад.

518. Дар прогрессияи арифметикӣ бо фарқи бутун 11-то аъзо ҳаст. Аъзои якум ба 24 баробар мебошад. Аъзои якум, панҷум ва ёздаҳум прогрессияи геометриро ташкил медиҳад. Ҳамаи аъзоҳои прогрессияи арифметикиро ёфта дар ҷавоб суммаашро нависед.

519.* Се адад прогрессияи геометриро ташкил медиҳад. Агар аъзои дуюмро ба 8 воҳид зиёд кунем, он гоҳ прогрессияи арифметикӣ ва агар аъзои сеюми прогрессияи арифметикиро ба 64 воҳид зиёд намоем боз прогрессияи геометрӣ ҳосил мешавад. Ин ададҳоро ёбед.

520. Суммаи се адад ба 114 баробар аст. Ин ададҳоро ҳамчун се аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ ё ҳамчун аъзои якум, чорум ва бистубанҷуми прогрессияи арифметикӣ бо фарқи ғайринулӣ дида баромадан мумкин аст. Ададҳоро ёбед.

521. Суммаи се аъзои аввалаи прогрессияи геометрии афзуншаванда ба 91 баробар аст. Агар ба ин аъзоҳо мувофиқан ададҳои 25, 27 ва 1-ро илова кунем прогрессияи арифметикиро ҳосил мекунем. Аъзои ҳафтуми прогрессияи геометриро ёбед.

522. Се адади x, y ва z прогрессияи геометрӣ ва ададҳои x; $2y$; $3z$ прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд. Махраҷи прогрессияро ёбед.

523. Се ададҳои аз нул фарқкунанда прогрессияи арифметикӣ ва квадратҳояшон бо ҳамон тартиб прогрессияи геометриро ташкил медиҳанд. Махраҷи прогрессияи геометриро ёбед.

524. Прогрессияҳои арифметикӣ ва геометриро ёбед, агар
—суммаи се аъзоҳои аввалаашон мувофиқан ба 15 ва 35 баробар бошад;
—аъзои якуми прогрессияи арифметикӣ аз аъзои якуми прогрессияи геометрӣ 2 воҳид кам ва аъзои дуюми прогрессияи арифметикӣ ба аъзои якуми прогрессияи геометрӣ баробар бошад.

525. Чор адад прогрессияи геометриро ташкил медиҳад. Агар аз онҳо мувофиқан ададҳои 2; 3; 7; ва 17-ро тарҳ кунем, он гоҳ ададҳои ҳосилшуда прогрессияи арифметикии афзуншавандаро ташкил медиҳад. Панҷ аъзои аввалаи прогрессияҳоро ёбед.

526. Нишон диҳед, ки пайдарпаии 1; 2; 6; 7-и хосиятҳои иловагии прогрессияи арифметикиро қаноаткунанда прогрессия нест.

527. Нишон диҳед, ки пайдарпаии 1; 3; 4; 12-и хосиятҳои иловагии прогрессияи геометриро қаноаткунанда, прогрессия шуда наметавонад.

Машқҳо барои такрор

528. Аз як варақ тунукаи квадратшакл қитъаи бараш 20 мм бударо буриданд. Агар масоҳати росткунҷаи ҳосилшуда ба 1000 мм^2 баробар бошад, он гоҳ ченакҳои аввалаи тунукаро ёбед.

529. Суммаи квадратҳои ду адади пай дар паи бутун аз дучанди адади хурдтараш 51 воҳид калон аст. Ададҳоро ёбед.

530. Исбот кунед, ки барои n-и дилхоҳи бутуни ғайриманфӣ ифодаи 7^n+3n-1 ба 9 тақсим мешавад.

531. Касрҳоро ихтисор кунед:

а) $\dfrac{a^2-3a+2}{a^2+5a-6}$; б) $\dfrac{a^4-2a^2+2^3}{a^6+8}$; в) $\dfrac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1}$; г) $\dfrac{x^6-1}{x^4+x^2+1}$.

532. Бо методи фосилаҳо нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $\dfrac{x+1}{2x-4}\geq 0$; б) $(x^2-1)(x-3)<0$.

533. Нули функсияро ёбед :

а) $f(x)=\dfrac{2x-8}{x^2}$; б) $f(x)=2x^2-11x+9$; в) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$.

534. Ду насос якҷоя об кашида ҳавзро дар 12 соат пур мекунанд. Насоси якум назар ба дуюм ҳавзро 10 соат зудтар пур мекунад. Насоси дуюм ҳавзро дар чанд соат пур мекунад?

МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

Мафҳуми пайдарпаии ададӣ то пайдоиш ва эҷодшавии таълимот оиди функсияҳо ба вуҷуд омадааст, чунки пайдарпаиҳои зеринро аз қадим медонистанд: пайдарпаии ададҳои натуралӣ; пайдарпаии ададҳои ҷуфт; пайдарпаии ададҳои тоқ, пайдарпаии квадрати ададҳои натуралӣ; пайдарпаии ададҳои содда ва пайдарпаии ба ададҳои натуралӣ чаппа.

Ҳамаи пайдарпаиҳои номбаршудаи боло, ғайр аз панҷумаш, додашуда ҳисобида мешаванд, чунки барои ҳар кадомаш аъзои n-ум маълум аст. Дар асри III пеш аз эраи мо Эратосфен (аз Александрия) тарзи ҳосилкунии аъзои n-уми пайдарпаии ададҳои соддаро нишон додааст, ки он «галбери Эратосфен» ном гирифта аст.

Прогрессияҳо, чун мавриди хусусии пайдарпаиҳои ададӣ, дар ёддоштҳои 2000 сол пеш аз мелод қайдшуда ва то имрӯз омада расида вомехӯранд. Масъалаҳои зиёди ба прогрессия вобаста дар эҷодиёти вавилониҳо ва мисриёни қадим ҳастанд. Ба сифати мисол масъалаеро аз папируси Ахмес меорем: «Ба Шумо гуфтем: 10 чен ҷавро ба 10 шахс чунон тақсим кунед, ки фарқи чени ҷави ҳар як шахсу ҳамсояаш ба $\frac{1}{8}$ чен баробар шавад». Дар ҳалли ин ва масъалаҳои ба он монанд юнониҳои қадим аз формулаҳое истифода мебурданд, ки бо рамзҳои ҳозира намуди $a_1=\frac{S}{n}-(n-1)\frac{d}{2}$ -ро дораду ба формулаи $S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ баробарқувва аст (пайдоиши ин формула то ҳоло маълум нест. Эҳтимол он характери эмпирикиро дошта бошад). Умуман, дар масъала сухан дар бораи прогрессияи арифметикӣ, ки суммааш ба 10 ва фарқаш ба $\frac{1}{8}$ баробар аст, мераваду ёфтани a_1; a_2; ...; a_{10} талаб карда мешавад.

Масъалаи дигари папируси Ахмес ёфтани суммаи прогрессияи геометрии $1+2+2^2+...+2^9$ мебошад. Ҳал ва ҷавоби масъала дар шакли

$$S=512+(512-1)$$

омада аст, ки он аз формулаи

$$S_n=2^n+(2^n-1)$$

(пайдоиши он то ҳоло маълум нест) истифода бурдани муаллиф шаҳодат медиҳад.

Масъалаҳои ба прогрессия вобаста дар китобҳои хитоиҳои қадим ва ҳинд, ки бештар мазмуни ҳаётӣ, ба монанди тақсимоти маводи хӯрока, мерос ва ҳоказоро доштанд, низ мушоҳида карда мешаванд.

Мушоҳидаи бевоситаи вавилониҳо ба моҳ (аз саршавӣ то пуррашавиаш) ба хулосаи зерин оварда буд: баъди 5 рӯзи ибтидои саршавӣ дараҷаи равшаншавии калони моҳ аз рӯи қонуни прогрессияи геометрӣ бо махраҷи 2 ба амал меояд.

Қиссаи ҳиндуҳо оиди кашфи шоҳмот мисоли навбатӣ шуда метавонад. Подшоҳи Ҳинд Шерам ихтироъкор Сетро, ки аз фуқарои худаш буд, ба наздаш хонда майли ба ӯ мукофот доданро мекунад. Сет бошад бо мақсади мазоҳкунии шоҳаш аз ӯ барои хонаи якуми тахта 1 дона гандум, барои хонаи дуюмаш ду маротиба зиёд (яъне 2 дона гандум), барои хонаи сеюмаш (назар ба дуюмаш) боз ду маротиба зиёд (яъне, 4 дона гандум), барои хонаи чорумаш (назар ба пештара) ду маротиба зиёдтар (яъне 8 дона гандум) ва ғайра талаб мекунад. Баъдтар маълум мешавад, ки подшоҳ ҳеҷ гоҳ ин хоҳиши «хоксорона»-и Сетро иҷро карда наметавонад*. Ҳақиқати ҳол дар он буд, ки дар талабот сухан дар бораи суммаи шасту чор аъзои прогрессияи геометрии $1; 2; 2^2; 2^3; ...; 2^{63}$ меравад (шасту чор аъзои прогрессия ба шумораи 64 хоначаи тахтаи шоҳмот вобаста аст). Ҳисоб карда шудааст, ки миқдори донаҳои талабкардаи гандум ба 18446744073709551615 баробар аст. Вазни ин миқдор гандум аз триллион тонна зиёдтар буда онро фақат аз сайёрае ғундоштан мумкин аст, ки сатҳаш аз тамоми сайёраи Замин 2000 маротиба калонтар аст (инсоният аз давраи пайдоиш то ҳоло ин миқдор гандумро ҷамъоварӣ накарда аст).

Акнун якчанд сухан дар бораи рафти тараққиёти таълимот оиди прогрессияҳо гуфта мегузарем. Маълумотҳои назариявии ба прогрессияҳо алоқадор аввалин маротиба дар ҳуҷҷатҳои ба мо расидаи Юнони қадим воҳӯрдаанд. Дар асри V пеш аз милод юнониҳо прогрессияҳо ва суммаҳои ба онҳо мувофиқи зеринро медонистанд:

$$1)\ 1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}; \quad 2)\ 2+4+6+...+2n=n\cdot(n+1);$$

$$3)\ 1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2.$$

---

* Ногуфта намонад, ки ин масъала дар корҳои Абурайҳони-Берунӣ ҳам ёфт шудаанд.

Архимед аввалин шуда прогрессияҳои арифметикию геометрии

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots \quad \text{ва} \quad 10;\ 10^2;\ 10^3;\ 10^4;\ 10^5;\ \ldots$$

-ро муқоиса карда, алоқаи байни онҳоро нишон медиҳад. Масалан, ӯ $10^3 \cdot 10^5 = 10^{3+5} = 10^8$-ро навишта нишон медиҳад, ки барои ҳосили зарби ду аъзои прогрессияи геометрӣ аъзоҳои мувофиқи прогрессияи арифметикиро ҷамъ намуда, суммаи ҳосилшударо ба сифати нишондиҳандаи адади 10 гирифтан кофист. Муаллифи римӣ Боэтсий (асри VI) аввалин шуда истилоҳи «прогрессия»-ро (чун пайдарпаии махсуси ададии беохир) ба илм дохил кардааст. Номҳои «арифметикӣ» ва «геометрӣ» бошад, аз назарияи таносубҳои бефосила, ки юнониҳои қадим меомӯхтанд, ба прогрессия илова карда шуданд. Дар ҳақиқат, юнониҳо баробариҳои $a_{k-1} - a_k = a_k - a_{k+1}$ ва $b_{k-1} : b_k = b_k : b_{k+1}$-ро мувофиқан таносубҳои арифметикӣ ва геометрии бефосила меноманд. Аз онҳо баробариҳои $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$ ва $b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$ ки мувофиқан хосиятҳои прогрессияҳои арифметикӣ ва геометриро ифода мекунанд, бармеоянд.*

Олими Юнони қадим Диофант (асри III) формулаи суммаи аъзоҳои прогрессияи арифметикиро исбот карда буд.

Дар «Ибтидо»-и Евклид теоремае омада аст, ки тадқиқоти он ба формулаи

$$S_n = \frac{l \cdot q - a}{q - 1} \qquad (1)$$

баробарқувва буда, суммаи ба мо шиноси n-аъзои прогрессияи геометриро ифода мекунад. Яке аз исботҳои Архимед, ки дар асараш «Квадратураи парабола» ҷой дода шудааст, ба ҷамбандии прогрессияи беохири геометрии

$$a + \frac{a}{4} + \frac{a}{4^2} + \frac{a}{4^3} \ldots = \frac{a}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}a \qquad (2)$$

оварда мерасонад. Архимед инчунин барои ҳалли баъзе масъалаҳои механикаю геометрия (аз он ҷумла барои ёфтани масоҳат ва ҳаҷми ҷисмҳо) формулаи суммаи квадратҳои ададҳои натуралии охирнокро дар шакли

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \qquad (3)$$

ҳосил намуд**.

---

* Прогрессияи арифметикиро бо символи ÷ ва геометриро бо символи ÷÷ ҳам ишорат мекунанд. Ин символҳо аввалин маротиба дар корҳои риёзидони англис Барроу истифода шудаанд.

** Тадқиқотҳо нишон додаанд, ки формулаи (3)-ро пеш аз Архимед ҳам истифода мебурдаанд.

Бисёр формулаҳои ба прогрессияҳои арифметикию геометрӣ вобаста ба олимони ҳинд маълум буданд. Ариабхатта (асри V) формулаи аъзои n-ум ва суммаи аъзоҳои прогрессияи арифметикиро медонист. Магавира (асри IX) дар корҳояш формулаи (3) ва баъзе суммаҳои мураккаби охирнокро истифода мебурд. Вале қоидаи ёфтани суммаи аъзоҳои прогрессияи арифметикии дилхоҳ дар «Китоби абак»-и Леонардо Пизанский* (с. 1202) дучор мешавад.

Қоидаи умумии ҷамбандии прогрессияҳои геометрии беохир камшавандаи дилхоҳро Н. Шюке дар китоби «Илм дар бораи ададҳо» (с. 1484) меорад.

Ногуфта намонад, ки риёзидонони асрҳои XV-XVII Осиёи Миёна низ мафҳуми прогрессияро медонистанд. Ин дар ҳалли масъалаи зерин баръало намоён аст: «Ҷамоае ба боғ даромаданд. Шахси аввал як анор канд, дуюм ду анор, сеюм се анор ва ҳоказо бо тафосили воҳид. Баъд маҷмӯи анорро ҷамъ карданд ва баробар тақсим намуданд. Ба ҳар кадом ҳафт анор расид. Бигӯ, он ҷамоа ва анор чанд буданд?» Агар ҳалли суханӣи ин масъаларо, ки муаллифонаш Қозилқузот Муҳаммад Наҷмиддин Алихон аст, ба намуди ишорати ҳарфии ҳозира нависем, он гоҳ дар ҳолати миқдори шахсони ҷамоаро бо x ва анорҳоро бо y ишорат кардан, дар охир ифодаи зерин ҳосил мешавад:

$$\left(\frac{1+x}{2}\cdot x\right):x=7.$$

Аз он $14x=x^2+x$ ва ё $x^2=13x$ пайдо мешавад. Пас $x=13$ (миқдори шахсон) ва $y=\frac{1}{2}(13+1)\cdot 13=7\cdot 13=91$ (миқдори анорҳо) аст.

Дар ҳалли ин масъала Наҷмиддин чунин ҳисоббаробариҳоро нисбати прогрессияҳои арифметикӣ истифода мебарад:

1) $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ ва аз он $\frac{S}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}$;

2) гузоштани $a_1=1$, $a_n=x$ ва $\frac{S}{n}=7$ ва ҳосил кардани муодилаи $\frac{1+x}{2}=7$-ро, ки $x=13$ решаи он аст;

3) барои ёфтани ҷамъи анорҳо формулаи $S=\frac{n(n+1)}{2}$-ро.

Ниҳоят қайд мекунем, ки формулаи ҷамъбандии прогрессияи геометрии беохири камшаванда ба П. Ферма (1601-1665) ва чанде аз риёзидонони асри XVII маълум буд.

* Л. Пизанский бештар бо тахаллуси «Фибоначчӣ» (Fibonacci - калимаи кӯтохшудаи «Filus Bonacci», яъне писари Боначчӣ ба аҳли илм маълуму маъруф аст.

Машқҳои иловагӣ ба боби III

Ба параграфи 7

535. Шаш аъзои аввалаи пайдарпаиро нависед, агар аъзои умумиаш дар намуди зерин дода шуда бошад.

а) $a_n=n+7$; д) $a_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{n-3}$; и) $a_n=\frac{1}{n^3}$;

б) $a_n=2^n+1$; е) $a_n=-\left(-\frac{1}{n}\right)^n$; к) $a_n=(n-2)^2$;

в) $a_n=\frac{1}{2^n}-1$; ж) $a_n=\frac{n^2\cdot(n+1)}{2}$; л) $a_n=(-1)^n\cdot 4^n$;

г) $a_n=\frac{5}{n}$; з) $a_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)}$; м) $a_n=-n^3+1$.

536. Аъзои умумии пайдарпаии ададӣ бо формулаи $a_n=2n^3+3$ ифода ёфта аст. Оё ададҳои −7; 5; 19; 21; 57; 131; 178; 217; 305; 297; 401 аъзои пайдарпай шуда метавонанд? Агар тавонанд, он гоҳ рақами тартибиашро муайян кунед.

537. Масъалаи 536-ро барои $a_n=2n^2-3$ ва ададҳои 15; 23; 180; 197; 335; 447; 609; 781 ҳал кунед.

538. Оё ададҳои 1,3 ва −3,3 аъзои прогрессияи арифметикии

20,7; 18,3; ...

мебошанд?

539. Формулаи аъзои n-уми пайдарпаиро нависед. агар:

а) 1; 4,5; 8; 11,5; ... б) 0; 1; 3; 7; 15; 31; ...

бошад.

540. Аз пайдарпаиҳои зерин прогрессияҳои арифметикӣ ташкилдиҳандаашро ҷудо карда, фарқашро ёбед:

а) 47; 44; 41; ... з) 2; 6; 10; 14; ...

б) 7,5; 6; 4,5; ... и) 4; 11; 18; 25;

в) −10; −7; −4; ... к) 3; 6; 12; 24; ...

г) 9,6; 4,6; −0,4; ... л) 10; 8; 6; 4; ...

д) −1; −1,1; −1,2; ... м) 11; 17; 27; 31; ...

е) 1,5; 1,7; 1,8; 1,9; ... н) 4,1; 9; 10,5; ...

ж) 3; 7; 18; 19; ... о) 3,3; 6,6; 9,9; ...

541. Аъзои якуми прогрессияи арифметикиро ёбед, агар $a_{13}=113$ ва $d=9$ бошад.

541. Аз рӯи прогрессияҳои арифметикии додашуда a_n-ро ёбед;

а) 4; 8; ... $n=8$; в) a; 4a; ... $n=81$;

б) 7; 11; ... $n=31$; г) 0,009; 0,012; ... $n=20$.

543. Аъзои якум ва фарқи прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:

а) $a_{13}=54$, $a_{19}=84$; г) $b_{10}=15$, $b_{13}=-21$;

б) $a_7=41$, $a_{11}=53$; д) $c_8=29$, $c_{15}=57$;

в) $a_1=9$, $a_{14}=-3$; е) $x_2=-8$, $x_5=-29$

бошад.

544. Аъзои охирини прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:
а) $a_1=7$, $d=5$, $n=31$; б) $a_1=0,8$, $d=-0,4$, $n=301$;
в) $a_1=4,8$, $d=-1,2$, $n=91$
бошад.

545. Фарқи прогрессияи арифметикии (a_n)-ро ёбед, агар:
а) $a_1=80$, $a_n=-4$, $n=21$ ва б) $a_1=1$, $a_{19}=42$ бошад.

546. Шумораи аъзоҳои прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:
а) $a_n=200$, $d=5$ ва $a_1=10$ бошад.

547. Суммаи n-аъзои прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:
а) $a_1=-6$, $a_n=106$, $n=18$; б) $a_1=-3$, $a_n=180$, $n=12$ бошад.

548. Аъзои якум ва суммаи n-аъзои аввалаи прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:
а) $d=3$, $a_n=200$, $n=20$; б) $d=-0,25$, $a_n=32$, $n=50$
бошад.

549. Муодиларо ҳал кунед:
а) $1+5+9+...+x=861$; б) $1+7+13+...+x=280$.

550. Прогрессияи арифметикии (a_n)-ро ёбед, агар:
а) $\begin{cases} a_2-a_3=10-a_5, \\ a_1+a_6=17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_1+a_4=-5, \\ a_2+a_5=-11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} a_1+a_5=24, \\ a_2\cdot a_3=60; \end{cases}$
бошад.

551. Суммаи прогрессияи арифметикӣ, ки аз 30 аъзо иборат аст, ба 3645 ва аъзои якумаш ба 20 баробар аст. Аъзои ҳафтумашро ёбед.

552. Суммаи се аъзои аввалаи прогрессияи арифметикӣ ба 66 ва ҳосили зарби аъзои дуюм бар сеюмаш ба 528 баробар аст. Суммаи 40 аъзои аввалаи прогрессияро ёбед.

553. Маълум, ки дар прогрессияи арифметикии (a_n) $a_4=9$ ва $a_9=-6$ аст. Чанд аъзои онро гирифтан зарур аст, то ки сумаашон 54 шавад?

554. Суммаи аъзои якуму панҷуми прогрессияи арифметикии афзуншаванда ба 14 ва ҳосили зарби аъзои дуюм бо чорумаш ба 45 баробар аст. Суммаи чанд аъзои ин прогрессия ба 24 баробар аст?

555. Пайдарпаии (a_n) дода шудааст. Агар
а) $a_n=2n-7$; б) $a_n=8n$; в) $a_n=-n+5$
бошад, формулаи суммаи n-аъзои аввалаи пайдарпаиро нависед.

556. Прогрессияи арифметикӣ дода шудааст. Агар:
а) $S_{15}=225$, $S_{40}=1680$; б) $S_{13}=-52$, $S_{21}=-168$
бошад, S_{45}-уми онро ёбед.

557. Дар байни ададҳои 17 ва 32 панҷ ададро чунон нависед, ки онҳо дар якҷоягӣ прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд. Суммаашонро ёбед.

558. Дар прогрессияи арифметикӣ, ки аз чор аъзо иборат аст, суммаи се аъзои аввалааш ба −21 ва суммаи се аъзои охиринаш ба −6 баробар аст. Суммаи ин прогрессияро ёбед.

559. Пайдарпаии (a_n) дода шудааст. Маълум, ки суммаи n-аъзои аввалаи он бо формулаи $S_n = \frac{1}{2}(3n^2 - 19n)$ ҳисоб мешавад. Магар ин пайдарпай прогрессияи арифметикӣ аст?

560. Чанд аъзои прогрессияи арифметикии 5; 9; 13; 17; ...-ро гирифтан зарур аст, то сумаашон ба 11 475 баробар шавад?

Ба параграфи 8

561. Нишон диҳед, ки пайдарпаии ададҳои ҳақиқии аъзоҳояш якхела ҳам прогрессияи арифметикӣ ва ҳам прогрессияи геометриро ташкил медиҳад.

562. Кадоме аз пайдарпаиҳои зерин прогрессияи геометрӣ мешаванд:

а) 4; 12; 18; 28; ...
б) −3 ; 2; 0; 5; 17,1; ...
в) 1,5; 3; 6; 12; 24; ...
г) 6; 3; 1,5; 0,75; ...?

563. Аъзои якуми прогрессияи геометриро ёбед, агар :

а) $b_6=486$, $q=3$;
б) $b_7=192$, $q=2$;
в) $b_6=-\frac{4}{27}$, $q=-\frac{1}{3}$;
г) $b_8=\frac{2187}{128}$, $q=\frac{3}{2}$;
д) $b_9=768$, $q=2$;
е) $b_5=170{,}1$, $q=3$;
ж) $b_6=\frac{243}{64}$, $q=1{,}5$
з) $b_5=512$, $q=2$

бошад.

564. Махраҷи прогрессияи геометриро ёбед, агар:

а) $b_1=1{,}5$ ва $b_4=96$;
б) $b_1=1$, $b_6=32$;
в) $b_1+b_4=14$, $b_2+b_5=42$

бошад.

565. Аъзои якум ва махраҷи прогрессияи (b_n) ёфта шавад, агар:

а) $\begin{cases} b_4 - b_2 = 18, \\ b_2 - b_3 = 36; \end{cases}$
б) $\begin{cases} b_1 - b_3 + 25b_5 = -150, \\ b_1 + b_2 = -180; \end{cases}$
в) $\begin{cases} b_1 + b_3 = 15, \\ b_4 - b_2 = 18; \end{cases}$
г) $\begin{cases} b_2 + b_4 = 56, \\ b_2 + b_3 = 24; \end{cases}$
д) $\begin{cases} b_1 + b_5 = 17, \\ b_4 + b_8 = 136. \end{cases}$

566. Ададеро ёбед, ки дар байни ададҳои 2,1 ва 18,9 воқеъ бошаду дар якҷоягӣ бо онҳо прогрессияи геометриро ташкил диҳад.

567. Ададеро ёбед, ки дар байни ададҳои 3 ва 243 воқеъ бошаду дар якҷоягӣ бо онҳо прогрессияи геометриро ташкил диҳад.

568. Дар байни ададҳои 1 ва 16 се ададро ҳамин хел гузоред, ки дар якҷоягӣ бо ададҳои додашуда прогрессияи геометриро ташкил диҳад.

569. Прогрессияи геометрии (b_n)-ро ёбед, агар:

а) $\begin{cases} b_2 - b_1 = 20, \\ b_4 - b_1 = 140; \end{cases}$ б) $\begin{cases} b_3 + b_1 = -561, \\ b_6 - b_4 = 792; \end{cases}$ в) $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 21, \\ b_4 + b_5 + b_6 = 168 \end{cases}$

бошад.

570. Аъзои якуми прогрессияи геометрии камшавандаро ёбед, агар $S_n = 4$ ва $q = \frac{1}{2}$ бошад.

571. Суммаи аъзоҳои прогрессияи геометрии камшаванда ба 9 ва суммаи квадрати аъзоёни он ба 40,5 баробар аст. Аъзои якум ва махраҷи прогрессияро ёбед.

572. Суммаи беохирро ҳисоб кунед:

а) $2+1+\frac{1}{2}+...;$ б) $32+8+2+....$

573. Барои прогрессияҳои

а) 3; 6; 12; 24; ...; б) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ...; $\frac{1}{2^{n-1}}$.

S_{10} ва S_n ёфта шавад.

574. Дар прогрессияи геометрии беохир камшаванда $b_2=21$ ва $S=84$ аст. b_4 ёфта шавад.

575. Дар прогрессияи геометрии аъзоҳояш мусбат $b_1=2$ ва $b_2+b_3=1,5$ аст. S_4 ёфта шавад.

576. Суммаи шаш аъзои аввалаи прогрессияи геометриро ёбед, агар $b_1=4$ ва $q=\frac{1}{2}$ бошад.

577. Суммаи даҳ аъзои аввалаи прогрессияи геометрии 2; 8; 32; 128; ...-ро ёбед.

578. Суммаи шаш аъзои аввалаи прогрессияи геометриро ёбед, агар аъзои шашумаш ба 2048 ва махраҷаш ба 4 баробар бошад.

579. Касрҳои даврии беохири зеринро дар шакли касри оддӣ нависед:

а) 0,58 (3); в) 1,3 (32); д) 0, (7);

б) 3,2 (54); г) 12,08 (3); е) 0,2 (31).

580. Дар дохили секунҷаи баробартараф бо тарафи a секунҷаи нав кашида шудааст, ки қуллаҳояш дар миёнаҷоҳои тарафҳои секунҷаи аввала ҷой доранд. Бо ҳамин тарз дар дохили секунҷаи дуюм секунҷаи баробартарафи дигар ҷойгир аст ва ҳоказо. Исбот кунед, ки пайдарпаии масоҳатҳои секунҷаҳо прогрессияи геометриро ташкил медиҳад. Суммаи онро ёбед.

581. Чор адади мусбат прогрессияи геометриро ташкил медиҳанд. Ҳосили зарби ададҳои якум ва чорум ба решаи калони муодилаи $x^2-10000=0$ ва суммаи квадратҳои ададҳои дуюму сеюм ба 250 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

582. Чор адади прогрессияи геометрӣ ташкилкунандаро ёбед, ки дар он суммаи аъзоҳои канорӣ ба 27 ва ҳосили зарби аъзоҳои мобайнӣ ба 72 баробар бошанд.

*583. Прогрессияи геометриеро бо махраҷи манфӣ ёбед, ки аъзои сеюмаш ба −1, суммаи се аъзои аввалааш ба −73 ва b_1, b_2, b_4, b_5 вобастагии $b_4+b_5=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}$-ро қаноат намояд.

584. Аъзои сеюми прогрессияи геометрии беохирро ёбед, агар аъзои дуюмаш ба 72 ва суммааш ба 378 баробар бошад.

Ба параграфи 9

585. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1=5$ ва $a_2=7$ аст. Чунин прогрессияи геометриеро ёбед, ки махраҷаш аз фарқи прогрессияи арифметикӣ панҷ воҳид зиёд буда, суммаи чор аъзои аввалааш ба 400 баробар бошад.

586. Дар прогрессияи арифметикии мусбати (a_n) ва геометрии мусбати (b_n) аъзоҳои дуюм ба 4 ва аъзоҳои якум низ ба ҳам баробаранд. Прогрессияҳоро нависед, агар аъзои сеюми прогрессияи арифметикӣ аз аъзои сеюми прогрессияи геометрӣ 9 воҳид кам бошад.

*587. Дар прогрессияи геометрӣ аъзои якум, сеюм ва панҷумаш мувофиқан ба аъзои якум, чорум ва шонздаҳуми ягон прогрессияи арифметикӣ баробар аст. Аъзои чоруми прогрессияи арифметикиро ёбед, агар аъзои якуми он ба 5 баробар бошад.

588. Се адад, ки суммаашон ба 28 баробар аст, прогрессияи геометриро ташкил медиҳанд. Агар ба адади якум 3, ба дуюм 1 илова карда аз сеюмаш 5-ро кам кунем, он гоҳ ададҳои ҳосилшуда прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд. Ин ададҳоро ёбед.

589. Чор ададеро ёбед, ки сетои аввалааш прогрессияи геометрӣ ва сетои охиринаш прогрессияи арифметикиро ташкил диҳад. Маълум аст, ки суммаи аъзоҳои канориаш ба 14 ва суммаи аъзоҳои мобайниаш ба 12 баробаранд.

590. Масъалаи 589-ро ҳангоми суммаи аъзоҳои канорӣ ба 21 ва мобайнӣ ба 18 баробар будан, ҳал намоед.

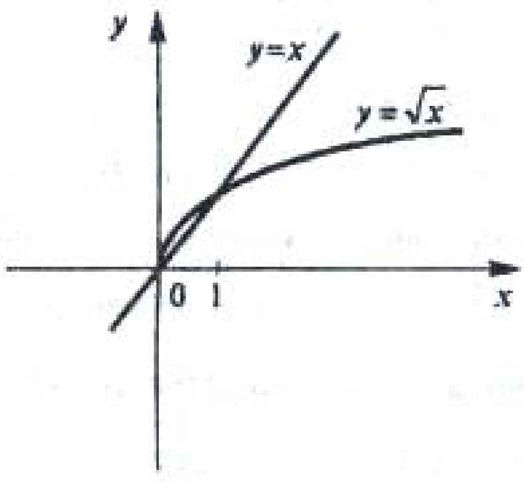
591. Суммаи се аъзои аввалаи прогрессияи афзуншавандаи арифметикӣ ба 21 баробар аст. Агар аз аъзоҳои он мувофиқаи ададҳои 2,3 ва 2-ро кам кунем, он гоҳ се аъзои аввалаи прогрессияи геометриро ҳосил мекунем. Прогрессияҳоро ёбед.

591. Чор адад прогрессияи камшавандаи геометриро ташкил медиҳад. Агар аз ду адади аввала мувофиқан ададҳои 13 ва 4-ро кам карда, ба ададҳои сеюму чорумаш мувофиқаи 9 ва 30-ро илова кунем, он гоҳ ададҳои нави ҳосилшуда прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад. Прогрессияҳоро ёбед.

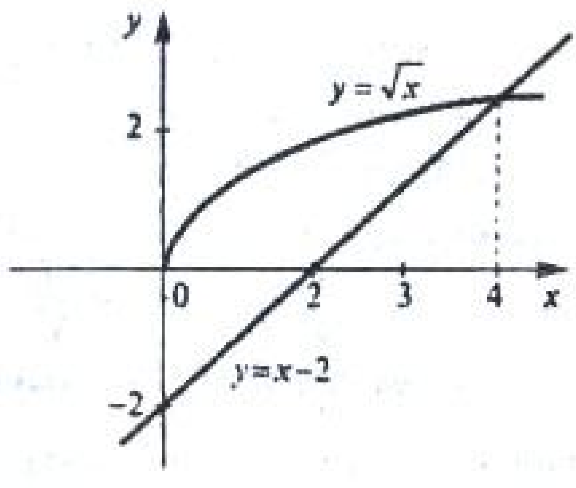
ҶАВОБҲО

356. а) $a_3=6$; $a_6=12$; $a_7=14$; б) $a_2=72$; $a_5=9$; $a_6=\frac{9}{2}$; $a_7=\frac{9}{4}$. **357**. а) 3; 9; б) 27; 81; в) 243; 729; 2187; г) 19683. **358**. а) 4; 8; 12; 16; 20; 24; б) $a_9=36$; $a_{101}=404$; в) $a_{2k}=8k$. **359**. а) 2; −1; 2; −1; 2; б) $c_7=c_{21}=c_{103}=c_{2k-1}=2$; $c_{12}=c_{204}=c_{2k}=-1$. **360**. а) 2; 8; 18; 32; 50; 72; 98; 128; б) $x_{18}=648$; $x_{23}=1058$; $x_{41}=3362$; $x_{2n}=8n^2$. **361**. а) $a_n=n$; б) $a_n=\frac{1}{2^n}$; в) $a_n=\frac{n+1}{n}$; г) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. **362**. а) $a_n=\frac{2n}{2n+1}$; б) $a_n=\frac{n}{n+1}$. **363**. а) 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; б) 0; −3; −8; в) 4; 4; 4; 4; г) −12; 12; −12; 12; −12; 12; −12; 12; −12; 12; д) 3; 8; 15; 24; е) 0; −1; 0; 3; 8. **364**. а) 2; 8; 18; 32; 50; 72; 98; 128; б) 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; в) $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{11}{7}$; $\frac{13}{8}$; г) −3; −1; 1; 3; 5; 7; 9; д) 1; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{12}{7}$; $\frac{7}{4}$; е) $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{2}$; 3; 6; 12; 24; 48; ж) 4; 13; 28; 49; 76; 109; 148; з) −3; 3; −3; 3; −3; 3; −3; и) 8; 32; 128; 512; 2048; 8192. **365**. $b_4=72$; $b_{13}=2223$; $b_{61}=227103$. **366**. а) $c_2=20$; $c_3=28$; $c_4=36$; $c_5=44$; $c_6=52$; б) $c_2=100$; $c_3=25$; $c_4=\frac{25}{4}$; $c_5=\frac{25}{16}$; $c_6=\frac{25}{64}$. **367**. а) 19; 20; 21; 22; 23; 24; б) 1000; 10; 10^{-1}; 10^{-3}; 10^{-5}; 10^{-7}; в) 160; −80; 40; −20; 10; −5; г) 3; $\frac{2}{3}$; 3; $\frac{2}{3}$; 3; $\frac{2}{3}$; д) 3; 9; 21; 45; 93; 189; з) 2; 7; 342; 40001687. **368**. а) 15; 20; 25; 30; 35; 40; б) 25; 122; 697; 3482; 17407; 87032; в) 4; 5; 7; 11; 19; 35; г) 6; $\frac{1}{3}$; 6; $\frac{1}{3}$; 6; $\frac{1}{3}$. **369**. а) 3; 27; 19683. **370**. 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; …; $\frac{1}{2^{n-1}}$. **371**. −7; 7; −7; … . **372**. а) $2+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}-1$; в) $(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{2}$; г) $\sqrt{5}-2$. **373**. а) 64; б) −96; в) 64; г) 343; д) 81; е) 361. **374**. а) 5; б) 6; в) 30. **375**. а) $x_1=-9$; $x_2=1$; б) $x=\frac{1}{2}$. **376**. 25 км/соат. **377**. а) (−2; 9); б) (1; 3). **378**. а) −3; б) вуҷуд надорад; в) −7; г) $-\frac{193}{7}$; д) −13,5. **379**. 18 ва 6. **380**. а) Не; б) ҳа; в) ҳа; г) не. **381**. а) 2; 3; 4; 5; …; $(n+1)$; …; б) $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$; 2; $\frac{5}{2}$; …; в) −7; −4; −1; 2; 5; …; г) 5; 7; 9; 11; 13; …; д) 2,1; 2,3; 2,5; 2,7; …; е) −1; −1; −1; −1; …; ж) 0,51; 0,6; 0,69; 0,78; …; з) 2,1; 2; 1,9; 1,8; …; и) 3; 3,5; 4; 4,5; 5; …; к) 1; 10; 19; 28; 37; … . **382**. а) 2; б) 1; в) −1; г) 4; д) 10; е) −9; ж) 7; з) 0; и) 2; к) 6. **383**. 3 соат. **384**. а) $x-1$ мешавад, агар $x>0$ ва $x\neq 1$ бошад; б) $x+1$ мешавад, агар $x\neq 0$ ва $x\neq 1$ бошад. **385**. а) 0; −1; б) $\frac{1}{4}(\sqrt{33}-1)$. **387**. $\sqrt[4]{\frac{a^2}{3}}$ ва $\sqrt[4]{3a^2}$. **388**. C; D; E; F. **389**. а) $x\neq 4$; б) $\forall x\in R$. **390**. а) $a_n=\frac{3n}{n+1}$; б) $a_n=(-1)^n 6$. **391**. а) a_1+16d; б) a_1+125d; в) a_1+280d; г) $a_1+(k+1)d$; д) $a_1+(k+14)d$; е) a_1+2kd. **392**. а) $b_5=40$; б) $b_{21}=-14{,}2$; в) $b_{111}=74$; г) $b_{216}=-21$; д) $b_{31}=59$; е) $c_{18}=10{,}4$; ж) $c_{23}=55{,}6$; з) $c_{57}=-177$; и) $c_{19}=31$; к) $c_7=65$.

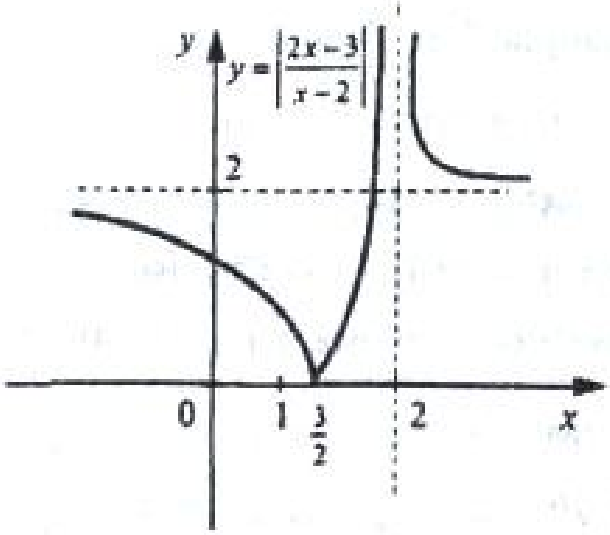
393. а) $a_{10}=-\frac{70}{3}$; $a_{21}=\frac{158}{3}$; $a_n=\frac{2}{3}-\frac{8}{3}(n-1)$; б) $a_{10}=-6{,}7$; $a_{21}=-17{,}7$; $a_n=3{,}3-n$; в) $a_{10}=210$; $a_{21}=485$; $a_n=25n-40$. **394**. а) $a_8=5{,}5$; $a_{23}=35{,}5$; $a_n=2n-10{,}5$; б) $a_8=-11$; $a_{23}=-56$; $a_n=13-3n$; в) $a_8=-160$; $a_{23}=-535$; $a_n=-25n+40$. **395**. 360 км/соат. **396**. 2,6 км/соат. **397**. 124,8 км/соат. **398**. $A_{15}B_{15}=7{,}5$ см; $A_{100}B_{100}=50$ см; $A_{131}B_{131}=65{,}5$ см. *Нишондод.* Аз рӯи хосияти хати миёнаи секунҷа ва трапетсия истифода бурда прогрессияи арифметикии аъзои якум ва фарқаш ба 0,5 см баробарро ҳосил кардан мумкин аст. **399**. а) 12; б) 100; в) 141; г) 46. **400**. а) 3; б) −3,5; в) −5; г) 1,5. **401**. 13,5; 12; 10,5; 9; 7,5; 6. **402**. −1; −4; −7; −10; −13; −16; −19; −22; −25. **403**. а) $c_1=21$, $d=1{,}5$; б) $c_1=38$, $d=-2$; в) $c_1=-100$, $d=6{,}2$; г) $c_1=5$, $d=5$; д) $c_1=4$, $d=2$; е) $c_1=-3$, $d=-15$. **404**. а) $a_{11}=73$; б) $a_7=-16$. **405**. а) Ҳа; б) не. **406**. Сездаҳ аъзои аввали прогрессия ададҳои манфӣ мебошанд. $a_{14}=0$, $a_{15}=1{,}6>0$; … . **407**. а) $a_n=7n-4$; б) $a_n=3n+5$. **408**. а) Ҳа; $a_1=11$, $d=8$; б) не; в) ҳа; $a_1=15$, $d=1$; г) ҳа; $a_1=35$, $d=31$; д) ҳа; $a_1=-1$, $d=-2{,}5$; е) ҳа; $a_1=-9$, $d=-9$; ж) ҳа; $a_1=-7$, $d=-14$; з) не; и) ҳа; $a_1=2$; $d=5$; к) ҳа; $a_1=15$, $d=11$; л) не; м) ҳа; $a_1=8$, $d=0$. **409**. 25. *Нишондод.* Бо x рақами якуми ададро ишорат мекунем, он гоҳ $7-x$ рақами дуюми адад мешавад $(x\le 7)$. Мувофиқи шарт $\overline{(x+2)(7-x)}=2\cdot\overline{x(7-x)}-3$ ё $10(x+2)+(7-x)=2[10x+(7-x)]-3$ мешавад, ки аз он x=2-ро ёфтан мумкин аст. **410**. а) $\frac{14}{51}$; б) $\left(1-\frac{2}{m}\right)^2$. **411**. а) $-\infty<x<8$; б) $-\infty<x<10{,}5$; в) $-1\le x\le 1$; г) $x\ge 7$. **412**. а) $x_1=0$, $x_2=1$ (расми 92); б) x=4 (расми 93). **413**. а) $\frac{a-4}{x}$; б) 3x; в) $-\frac{3}{7}$. **414**. 1. **415**. а) Давраи радиусаш ба 6 ва марказаш дар нуқтаи $(1;-3)$ ҷойгирифта: б) хати рости тири Ox-ро дар нуқтаи (3; 0) ва Oy-ро дар нуқтаи (0; 2) буранда. **416**. 0; 7; 26; 255; … . **417**. $S_{15}=-210$. **418**. а) $S_{50}=5700$; $S_{100}=21400$; $S_n=2n\cdot(n+7)$; б) $S_{50}=3200$; $S_{100}=11400$; $S_n=n\cdot(n+14)$; в) $S_{50}=875$; $S_{100}=4250$; $S_n=0{,}5n\cdot(n-15)$;



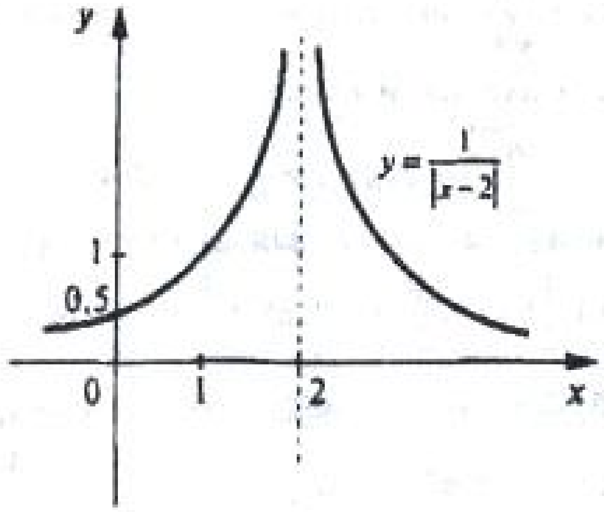
Расми 92



Расми 93



Расми 94



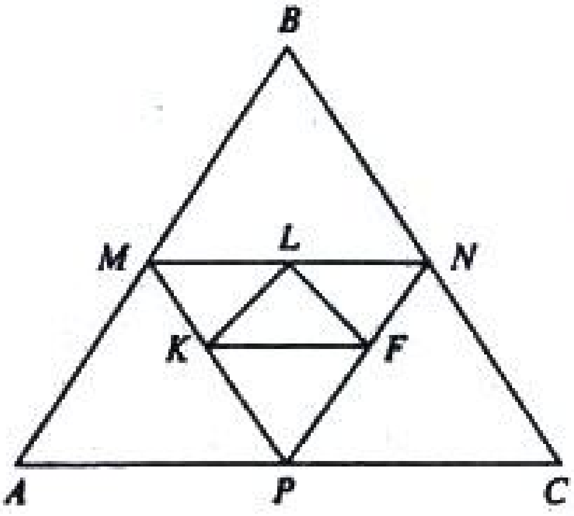
Расми 95

г) $S_{50}=-3575$; $S_{100}=-14650$; $S_n=0,5n\cdot(7-3n)$. **419**. а) $(n+1)(n+2)$; б) $(n+1)^2$. **420**. а) 31375; б) 13130; в) 106533; г) 5580; д) 2484; е) 1210; ж) 6545. **421**. *Нишондод*. Мувофиқи шарт $S_n=3n^2$ аст, ки аз он $a_1=S_1=3$ ва $a_1+a_2=S_2=12$ мебарояд. Аз ин баробариҳо $a_1=3$ ва $d=6$-ро ҳосил кардан мумкин аст. Ҷавоб: 3; 9; 15; 21; 27; ... . **422**. а) 1192; б) 275; в) 55; г) 199,5. **423**. 651,2 м. **424**. *Нишондод*. Аз натиҷаи масъалаи 7-и дар саҳ. 140 ҳалгашта ($v_0=0, a=g=9,8$ м/сон^2) истифода баред. Ҷавоб: а) 98 м; б) 490 м. **425**. 10 шохмотбоз. **426**. а) 23 қатор; б) 3240 сакко. **427**. Ҳа; $S_n=n\cdot\left[a^2+ax\cdot(3-n)+x^2\right]$. **428**. а) $1\le x<4$; б) $x\ne-2$; в) $x=1$; г) $-4<x<4$, $4<x\le5$; д) $\forall x\in R$; е) $x\le3, x>4$. **429**. 54. **430**. $x^2-px+s=0$. **431**. в) 19200. **432**. а) Расми 94; б) расми 95. **433**. а), в) – афзуншаванда; б), г) – камшаванда. **434**. *Нишондод*. 5-ро аз қавс бароварда ба даруни қавс формулаҳои зарби мухтасарро татбиқ намоед. **435**. а) 2; 4; 8; 16; 32; 64; б) −18; −9; $-\frac{9}{2}$; $-\frac{9}{4}$; $-\frac{9}{16}$; в) −24; 60; −150; 375; −937,5; 2343; 75; г) $\frac{2}{5}$; $\frac{6\sqrt2}{5}$; $\frac{36}{5}$; $\frac{108\sqrt2}{5}$; $\frac{648}{5}$; $\frac{1944\sqrt2}{5}$; д) 1; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{8}{27}$; $\frac{16}{81}$; $\frac{32}{243}$; е) −4; −36; −324; −2916; −26144; −235296; ж) −5; 10; −20; 40; −80; 160; з) $-\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{12}$; $-\frac{1}{36}$; $-\frac{1}{108}$; $-\frac{1}{324}$. **436**. б) $-\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10^2}$; $-\frac{1}{10^3}$; ...; г) 11; −33; 99; −297; ...; е) 13; −26; 52; −104; ...; з) 7; 35; 175; 875; ...; и) 4; 0,8; 0,16; 0,032; ...; к) 8; −32; 128; ... . **437**. а) −4; −12; −36; −108; ...; в) 1; 3; 9; 27; 81; ...; д) 20; 60; 180; ...; ж) 0,02; 0,06; 0,18; 0,54; ...; и) 19; 57; 171; 513; ...; м) −10; −30; −90; ... . **438**. а) −52; б) 100; в) 3; г) 423. **439**. а) 3844; б) 7; в) 32; г) 13. **441**. а) б) в) д) з) – охирнок; г) е) ж) – беохир **442**. а) 6 ва $-\frac{3}{4}$; б) 1 ва 2401; в) $\frac{1}{100}$ ва 100; г) −1 ва 243. **443**. в) b_4 ва b_{10}; б) b_4; в) не. **444**. 18 воҳ. кв. **445**. $d^2=\frac{1400}{11}$. Муаллиф ба ҷои адади π адади $\frac{22}{7}$ (яъне қимати Архимедро) гирифта аст

$d=\frac{20}{\sqrt{\pi}}$. **446.** *Нишондод.* Бигузор онҳо намуди $\frac{a}{b}$ ва $\frac{b}{a}$ -ро дошта бошанд. Он гоҳ дар асоси нобаробарии $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ҳосил кардан мумкин аст: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq$ $\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2\cdot\sqrt{1}=2\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2(a>0,b>0)$. **447.** а) $x^2-5x+6=0$; б) $x^2-4x+1=0$; в) $4x^2-4x+1=0$. **448.** а) 1,632 т; б) 4,5 т; в) ≈155,5 га; г) 64,35. **450.** а) $-\frac{5}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{2}$; г) ±2; д) $\pm\frac{3}{2}$; е) график тири Ox-ро намебурад. **451.** а) $(x-4)^2-28$; б) $2(x-1)^2-11$. **452.** $\frac{3x-2}{x-1}$. **453.** а) $c_{16}=c_1\cdot q^{15}$; б) $c_{30}=c_1\cdot q^{29}$; в) $c_{126}=c_1\cdot q^{125}$; г) $c_k=c_1\cdot q^{k-1}$; д) $c_{k+8}=c_1\cdot q^{k+7}$; е) $c_{2k}=c_1\cdot q^{2k-1}$; ж) $3c_1\cdot q^{40}$; з) $3c_1\cdot q^{80}$; и) $c_1^2\cdot q^{20}$; к) $c_1^2\cdot q^{k+5}$; л) $c_1+\cdot q^7$; м) $c_1\cdot q^6(1+q^{14})$. **454.** а) $\frac{5}{4}$; б) $-\frac{10}{9}$; в) $32\sqrt{2}$; г) 1,6; д) 4352; е) 97656250; ж) −1000; з) $\frac{81}{16}$; и) $\frac{8}{27}$; к) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$. **455.** а) b_7=1458, $b_n=(-2)\cdot(-3)^{n-1}$; г) b_7=−12, $b_n=-12\cdot(-1)^{n-1}$; е) $b_7=\frac{1}{48828125}$, $b_n=\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-3}$; з) $b_7=729a^7$, $a_n=3^{n-1}\cdot a^n$. **456.** а) $\frac{1}{81}$; б) $\frac{56}{125}$; в) $\frac{2}{729}$; г) $-\frac{1}{128}$; д) $\frac{2}{729}$; з) 1. **457.** а) 3 ё −3; б) 0,6 ё −0,6; в) −2; г) 4. **458.** а) $\frac{1}{25}$; б) −162; в) −0,001; ё 0,001; г) 78732; д) 0,00001536. **459.** 18; 54; 162; 486. **460.** 4; 16; 64. **461.** $x_2=\frac{1}{4}$; $x_3=\frac{1}{8}$; $x_4=\frac{1}{16}$; $x_5=\frac{1}{32}$. **462.** а) 3; ±2; б) 3; 2 ё 24; $\frac{1}{2}$. **463.** ≈2025 сомониву 92 дирам. **464.** а) 9 ва −11; б) ±5 в) 1 ва 16. **466.** а) a^3+b^3; б) $\frac{c}{2n}$; в) $\frac{1}{m-n}$. **467.** 200 рӯз. **468.** Намунаи матн. Дарозии росткунҷа аз бараш дида 16 м дарозтар буда масоҳати ба 7680 м² баробарро дорад. Бари росткунҷаро ёбед. **469.** (0; 8). **470.** а). г) − ба боло; б). в) − ба поён. **471.** *Нишондод.* Маълум, ки ҳангоми $a\neq 0$ будан $a^2-a+1=0$ -ро ба намуди $a+\frac{1}{a}=1$ овардан мумкин аст. Азбаски $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)=0$ мешавад, пас $a^3=-1$. Аз ин ҷо, $a^{2000}+\frac{1}{a^{2000}}=(a^3)^{666}\cdot a^2+\frac{1}{(a^3)^{666}\cdot a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=-1$. Ҷавоб: −1. **473.** а) −10,5; б) 292,5; в) $-\frac{20}{27}$; г) −170; д) −240; е) $\frac{15}{8}$; з) 60. **474.** а) $\frac{63}{2}$; б) 624,992; в) 6560; г) −15; д) 13,75; е) 10,18875. **475.** а) $13{,}8\cdot(3^n-1)$; б) $8\cdot(2^n-1)$; г) $\frac{2}{15}\cdot(4^n-1)$; е) $3\cdot(3^n-1)$. **476.** а) $(3^{2n}-1):8$; в) $S_n=\frac{1}{3}\left[(-1)^n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}-2\right]$; д) $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$; ж) $\frac{x^4\cdot(x^{-2n}-1)}{1-x^2}$; и) $-\frac{1}{3}\left[(-2)^n-1\right]$; д) $-0{,}3\left[(-3)^n-1\right]$. **477.** а) 133; б) $25\frac{34}{81}$;

в) $\frac{400}{3}$; г) $-274{,}5$. **478**. а) 62; б) 20. **479**. а) $q=3$; $S_7=2186$; б) $q=-\frac{1}{2}$; $S_6=50{,}4$. **480**. а) $a_1=\frac{1}{3}$; $S_6=6\frac{89}{96}$; б) $a_1=3$; $S_8=65535$. **481**. а) $a_1=3$; $a_9=768$; б) $a_1=1$; $a_{12}=2048$. **482**. $S_{10}=59048$. **483**. $S_7=5461$. **484**. 13. **485**. $b_2=8$. **486**. 2186. **487**. $S_6=1260$. **488**. 26 детал; 38 детал ва 40 детал. **489**. а) $2x^3-14x^2-6x+7$; б) $20b^4-12b^3+8b^2+2$; в) $1{,}5y^3-3{,}6y^2+9y-3$; г) $-10y+5$; д) $2x+1$; е) $-7b^2+4c^2$. **490**. а) 3721; б) 998001; в) 98,01; г) 39601; д) 492804; е) 104,4. **492**. Ҳангоми $a=3$, $b\neq 5$ будан система ҳамҷоя нест, вале ҳангоми $a=3$ ва $b=5$ будан дорои ҳалли бешумор мешавад. **493**. $x\in(1;+\infty)$. **494**. а) $15\cdot 2^n$; б) $15\cdot 4^{n-1}$; в) $5^n(5^n+1)$. **495**. а) $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$ - афзуншаванда. $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$ - камшаванда; б) $(-\infty;-1)$ - камшаванда. $(-1;+\infty)$ - афзуншаванда. **496**. $x_{max}=1$, $y_{max}=-4$. **497**. 50 км/соат. **498**. а) $\frac{81}{2}$; б) $-6{,}4$; в) 5; г) $-\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$; д) $\frac{16}{2\sqrt{2}-1}$; е) $\frac{15\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$; ж) $4+3\sqrt{2}$; з) $\frac{3(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}-1}$; и) $\frac{1}{2}$; к) $\frac{64}{3}$; л) -9. **499**. а) $\frac{96}{5}$; б) $-\frac{3}{5}$; в) $\frac{1}{a(1-a)}$; г) $-\frac{1}{a(a+1)}$. **500**. а) $\frac{9}{5}$; б) $-\frac{1}{a^2\cdot(1+a^2)}$; в) $\frac{4}{7}$; г) $\frac{25}{4}$; д) 36; е) $\frac{11}{12}$. **501**. $S=6$ ё $S=12\cdot(3+2\sqrt{2})$. **502**. $b_1=14$, $q=\frac{3}{4}$. **504**. $4R\pi$ см ва $\frac{4\pi R^2}{3}$ см². *Нишондод*. Вобастагии байни радиуси давраи дарункашидашуда ва берункашидашударо бо тарафи секунҷаи мунтазам $(a=\sqrt{3}R,\ a=2\sqrt{3}r,\ R=2r)$ ба ҳисоб гирифта барои дарозии давраҳо ва масоҳати доираҳо прогрессияҳои беохири геометрии $2\pi R$; $\frac{2\pi R}{2}$; $\frac{2\pi R}{4}$; ... $\left(q=\frac{1}{2}\right)$ ва πR^2; $\frac{\pi R^2}{4}$; $\frac{\pi R^2}{16}$; ... $\left(q=\frac{1}{4}\right)$-ро ҳосил кардан мумкин аст. Суммаҳои ин прогрессияҳо суммаҳои матлубро ифода мекунанд. **505**. $\frac{\pi b^2}{2}$ см². *Нишондод*. Азбаски вобастагии радиуси давраи дарункашидашуда бо тарафи квадрат $r=\frac{a}{2}$ аст, пас барои масоҳатҳои ҳаман доираҳо прогрессияи геометрии $\frac{\pi b^2}{4}$; $\frac{\pi b^2}{8}$; $\frac{\pi b^2}{16}$; ... $\left(q=\frac{1}{2}\right)$ -ро ҳосил мекунем, ки ёфтани суммааш талаботи масъаларо конеъ мегардонад. **506**. $q=\frac{2}{5}$. **507**. $b_5=3\cdot 8^4=\frac{3}{4096}$. **508**. 5; 4; $\frac{16}{5}$; $\frac{64}{25}$; ... ва 45; -36; $\frac{144}{5}$; .... **509**. а) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{26}{99}$; г) $2\frac{71}{99}$; д) $\frac{7}{30}$; е) $\frac{907}{1100}$; ж) $\frac{5}{9}$; з) $1\frac{8}{11}$; к) $\frac{7}{15}$; л) $\frac{37}{3300}$; о) $\frac{433}{3300}$; р) $\frac{59}{450}$. **510**. а) $\frac{1}{2y^2}$; б) $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. **511**. *Нишондод*. Фарқи $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$-ро ба намуди $\left(\frac{a-b}{ab}\right)^2\cdot(a+b)$ оварда боварӣ ҳосил кардан мумкин аст, ки он ғайриманфист. **512**. а) $\frac{2}{3}(3+\sqrt{3})$; б) $\frac{5}{6}(3-\sqrt{3})$; в) $\frac{6}{23}(5+\sqrt{2})$. **513**. а) тоқ; б) ҷуфт; в) ҷуфт; г) тоқ. **514**. $S(x)=4x-x^2$. **515**. 21,6 км/соат; 23,1 км/соат. **517**. а) $\forall x\in\left[1;\frac{4}{3}\right]$; б) $\forall x\in[-3;\ 3]$. **518**. 429. **519***. $a=4$; $b=12$; $c=36$ ё $a=\frac{4}{9}$; $b=-\frac{20}{9}$; $c=\frac{100}{9}$. *Нишондод*. Бигузор ададҳои матлуб a, aq ва aq^2 бошанд. Он гоҳ мувофиқи шарти масъала ба системаи дуномаълумадори муодилаҳои $2(aq+8)=a+aq^2$, $(aq+8)^2=a\cdot(aq^2+64)$ меоем. **520**. 2; 14; 98. **521**. 7; 21; 63; $b_7=5103$. **522**. $q=\frac{1}{3}$. **523**. *Нишондод*. Бигузор ÷a, b, c ва ÷÷a^2, b^2, c^2 бошанд. Бо дигар ибора $2b=a+c$ ва $b^4=a^2\cdot c^2$. Агар муодилаи якумро ба квадрат бардошта, муодилаи дуюмро дар шакли $b^2=|a\cdot c|$ нависем, он гоҳ муқоисаи тарафҳои чапи муодилаҳои ҳосилгашта ба $a^2+2ac+c^2=4|a\cdot c|$ меорад. Агар a ва c аломатҳои якхела дошта бошанд, он гоҳ $a=c$ ва аз ин ҷо прогрессияи геометрӣ дорои маҳраҷи ба 1 баробар мешавад. Агар a ва c аломатҳои гуногун дошта бошанд, он гоҳ $a^2+6ac+c^2=0$ ва ё $\left(\frac{c}{a}\right)^2+6\cdot\left(\frac{c}{a}\right)+1=0\,(a\neq 0)$ -ро ҳосил мекунем. Онро ҳал карда $\frac{c}{a}=-3\pm\sqrt{8}$ -ро меёбем. Азбаски $\frac{c^2}{a^2}=q^2$ аст, пас $q^2=\left(-3\pm\sqrt{8}\right)^2$ мешавад. Ададҳои a^2, b^2, c^2 мусбатанд, пас q низ калон аз 0 мешавад. Аз ин ҷо $q_{2,3}=-3\pm\sqrt{8}$ ҳосил мегардад. Ҷавоб: $q_1=1$; $q_{2,3}=-3\pm\sqrt{8}$. **524**. ÷3; 5; 7; ...; ÷÷5; 10; 20; ... . **525**. ÷÷3; 6; 12; 24; ...; ÷1; 3; 5; 7; ... . **528**. 50 мм. **529**. 5 ва 6 ё −5 ва −4. **531**. а) $\frac{a-2}{a-6}$; б) $\frac{1}{a^2+2}$; в) $\frac{x^4+1}{x+1}$; г) x^2-1. **532**. а) $\forall x\in(-\infty;-1]\cup(2;+\infty)$; б) $\forall x\in(-\infty;-1]\cup(1;3)$. **533**. а) 4; б) 1; $\frac{9}{2}$; в) вуҷуд надорад. ***534**. *Нишондод*. Бигузор насоси якум ҳавзро бо об дар x соат пур кунад. Пас вай дар 1 соат $\frac{1}{x}$ - ҳиссаи ҳавзро пур мекунад. Насоси дуюм бошад $\frac{1}{x+10}$ - ҳиссаи ҳавзро пур мекунад. Азбаски мувофиқи шарт ҳар ду насос дар як соат $\frac{1}{12}$ - ҳиссаи ҳавзро пур мекунанд, пас $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12}$ мешавад. Ҷавоб: 30 соат. **535**. а) 8; 9; 10; 11; 12; 13; ...; б) 3; 5; 9; 17; 33; 65; в) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{7}{8}$; $-\frac{15}{16}$; $-\frac{31}{32}$; $-\frac{63}{64}$; г) 5; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{4}$; 1; $\frac{5}{6}$; д) 1; 2; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{216}$; е) 1; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{27}$; $-\frac{1}{256}$; $\frac{1}{3125}$; $-\frac{1}{46656}$; ж) 1; 6; 18; 40; 75;

126; з) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; и) 1; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{216}$; к) 1; 0; 1; 4; 9; 16; л) −4; 16; −64; 256; −1024; 4096; м) 0; −7; −26; −63; −124; −215. **536**. $a_1 = 5$, $a_2 = 19$, $a_3 = 57$; $a_4 = 131$. Ададхои −7; 178; 217; 305; 397; 401 ба пайдарпаии (a_n) тааллуқ надоранд. **537**. $a_5 = 15$; $a_{10} = 197$; $a_{13} = 335$; $a_{15} = 447$. **538**. Адади −1,3 аъзои пайдарпаи шуда наметавонад, вале −3,3 аъзои ёздаҳуми прогрессия аст: $a_{11} = -3{,}3$. **539**. а) $a_n = 3{,}5n - 2{,}5$; б) $a_n = 2^{n-1} - 1$. **540**. а) Ҳа; d=−3; б) ҳа; d=−1,5; в) ҳа; d=3; г) ҳа; d=−5; д) ҳа; d=−0,1; е) ҳа; d=0,2; ж) не; з) ҳа; d=4; и) ҳа; d=7; к) не; л) ҳа; d=−2; м) не; н) не; о) ҳа; d=3,3. **541**. $a_1 = 5$. **542**. а) $a_8 = 32$; б) $a_{31} = 127$; в) $a_{81} = 241a$; г) $a_{20} = 0{,}066$. **543**. а) $a_1 = -6$; d=5; б) $a_1 = 23$; d=3; в) $a_1 = 10$; d=−1; г) $b_1 = 123$; d=−12; д) $c_1 = 1$; d=4; е) $x_1 = -1$; d=−7. **544**. а) $a_{31} = 157$; б) $a_{301} = -119{,}2$. **545**. а) $d = -4{,}2$; б) $d = 2\frac{5}{18}$. **546**. n=39. **547**. а) $S_{18} = 900$; б) $S_{12} = 1062$. **548**. а) $a_1 = 143$, $S_{20} = 3430$; б) $a_1 = 44{,}25$, $S_{50} = 1906{,}25$. **549**. а) x=81. *Нишондод*. Тарафи чапи муодила суммаи прогрессияи арифметикиро бо нишондодҳои $a_1 = 1$, $a_n = x$ ва d=4 ифода мекунад. Барои ёфтани n муодилаи $x = 1 + (n-1) \cdot 4$-ро ҳосил мекунем. Аз он $n = \frac{x+3}{4}$ мебарояд. Муодила ба муодилаи баробаркуввай $\frac{1+x}{2} \cdot \frac{x+3}{4} = 861$ иваз меёбад, ки аз он муодилаи ислоҳшудаи $x^2 + 4x - 6885 = 0$ пайдо мегардад; б) x=55. **550**. а) 1; 4; 7; 10; 13; ...; б) 2; −1; −4; −7; −10; ...; в) −2; 5; 12; 19; .... **551**. 62. **552**. 2360. **553**. n=4. **554**. n=4. **555**. а) $S_n = (n-6) \cdot n$; б) $S_n = 4n \cdot (n+1)$; в) $S_n = \frac{n}{2} \cdot (9-n)$. **556**. а) $S_{45} = 2133$; б) $S_{45} = -900$. **557**. +17; 19,5; 22; 24,5; 27; 29,5; 32; $S_7 = 171{,}5$. **558**. −12; −7; −2; 3; $S_4 = -18$. **559**. Ҳа; $a_n = 3n - 1$; d=3. 560. n=75. **562**. а) Не; б) не; в) ҳа; г) ҳа. **563**. а) b_1=2; б) b_1=3; в) b_1=36; г) b_1=-1; д) b_1=3; е) b_1=2,1; ж) b_1=0,5; з) b_1=32. **564**. а) q=4; б) q=2; в) q=3. **565**. а) $b_1 = -\frac{48}{5}$, $q = -\frac{3}{2}$; б) b_1=−150, q=5; в) $b_1 = \frac{375}{61}$, $q = \frac{6}{5}$; г) $b_1 = 2$, $q = 3$ ё $b_1 = 54$, $q = \frac{1}{3}$; д) b_1=1, q=2. **566**. ±6,3. **567**. b_2=27 ё b_2=−27. **568**. b_2=2, b_3=4, b_4=8. **569**. а) 20; 40; 80; ...; б) −33; 66; −132; 264; ...; в) 3; 6; 12; 24; ... . **570**. b_1=2. **572**. а) 4. **573**. $S_{10} = 3069$, $S_n = 3(2^n - 1)$; б) $S_{10} = \frac{1023}{512}$, $S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. **574**. $b_4 = \frac{21}{4}$. **575**. $S_4 = \frac{15}{4}$. **576**. $S_n = \frac{63}{8}$. **577**. $S_{10} = 699050$. **578**. $S_6 = 2730$. **579**. А) $\frac{7}{12}$. *Нишондод*. Касри додашударо дар шакли 0,58(3)=$\frac{58}{100} + \left(\frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots\right)$менависем. Ифодаи



Расми 96

дар дохили кавс буда прогрессияи геометрии беохири камнашавандаро бо $b_1 = 0{,}003$ ва $q = 0{,}0003 : 0{,}003 = 0{,}1$ ифода мекунад. Аз ин чо $0{,}58(3) = \frac{58}{100} + \frac{0{,}003}{1-0{,}1} = \frac{58}{100} + \frac{0{,}003}{0{,}9} = \frac{58}{100} + \frac{0{,}03}{9} = \frac{58}{100} + \frac{1}{300} = \frac{175}{300} = \frac{7}{12}$ мешавад; б) $3\frac{14}{55}$; в) $1\frac{329}{990}$; г) $12\frac{1}{12}$; д) $\frac{7}{9}$; е) $\frac{229}{990}$. **580.** *Нишондод.* Ба расми 96 диққат намуда, меёбем: $S_1 = S\Delta_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_2 = S\Delta_{MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$; $S_3 = S\Delta_{KLF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$; ..., $S_n = \frac{a^2\sqrt{3}}{4^n}$; $S_{n+1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}$; $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1}{4} = const$. Пас пайдарпаии (S_n) прогрессияи геометрӣ бо махрачи $q = \frac{1}{4} < 1$ мешавад. Аз ин чо $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$-ро ҳосил мекунем. **581.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; $5\sqrt{2}$; $10\sqrt{2}$; $20\sqrt{2}$. **582.** 3; 6; 12; 24. **583*.** $\div\div -81$; 9; -1; $\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{81}$; ... . **584.** $b_3 = 18$. **585.** $\div\div 1$; 7; 49; ... . **586.** $\div 1$; 4; 7; 10; 13; ...; $\div\div 1$; 4; 16; 64; ... . **587*.** 20. **588.** 4; 8; 16. **589.** 2; 4; 8; 12 ё 12,5; 7,5; 4,5; 1,5. **590.** $\frac{75}{4}$; $\frac{45}{4}$; $\frac{27}{4}$; $\frac{9}{4}$; ё 3; 6; 12; 18. **591.** $\div 4$; 7; 10; $\div\div 2$; 4; 8. **592.** $\div\div -4$; -8; -16; -32 ва $\div -17$; -12; -7; -2.

БОБИ IV

ИФОДАҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ ВА ТАБДИЛДИҲИИ ОНҲО

ДАРАҶАИ НИШОНДИҲАНДААШ РАТСИОНАЛӢ

§10. ФУНКСИЯИ ТРИГОНОМЕТРИИ КУНҶИ ДИЛХОҲ

29. Кунҷҳо, камонҳо ва ченкунии онҳо

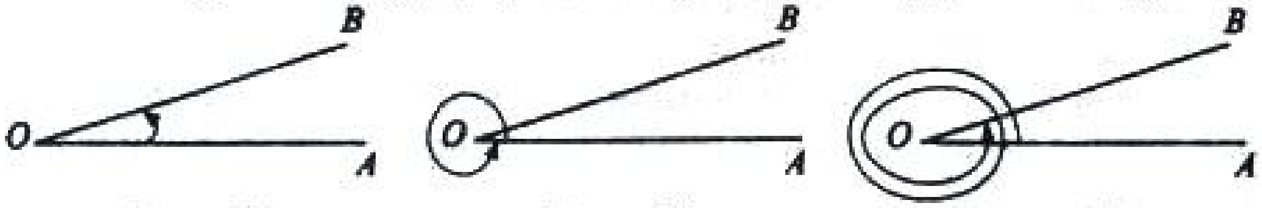
Фигурае, ки дар натиҷаи аз як нуқта баромадани ду нур ташкил ёфтааст, **кунҷ** номида мешавад.

Ҳар гуна кунҷ ҳангоми дар-атрофи ягон нуқтаи ҳамворӣ, ки нуқтаи аввала ном дорад, гардиш додани нур ҳосил шуда метавонад. Масалан, ҳангоми нурро дар атрофии нуқтаи O аз вазъияти аввалаи OA то вазъияти охирини OB гардиш додан. кунҷи AOB ҳосил мешавад (расми 97).

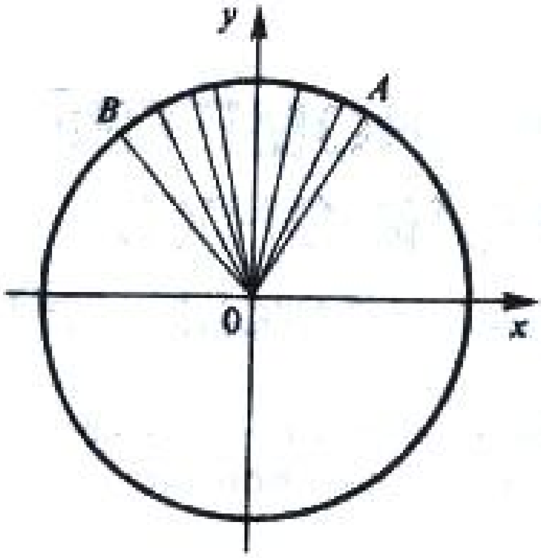
Кунҷ ҳамчун қисми ҳамворӣ ҳисоб карда мешавад, ки вайро нур дар атрофи нуқтаи аввалааш дар ҳамворӣ давр зада, тай кардааст.

Дар вақти гардиш додани нур кунҷе ҳосил шуданаш мумкин аст, ки вай аз кунҷи кушод калон аст (расми 98). Гардиши нур аз якчанд давраҳои пурра ва кунҷи қисми давраро ташкилдиҳанда иборат шуда метавонад (расми 99).

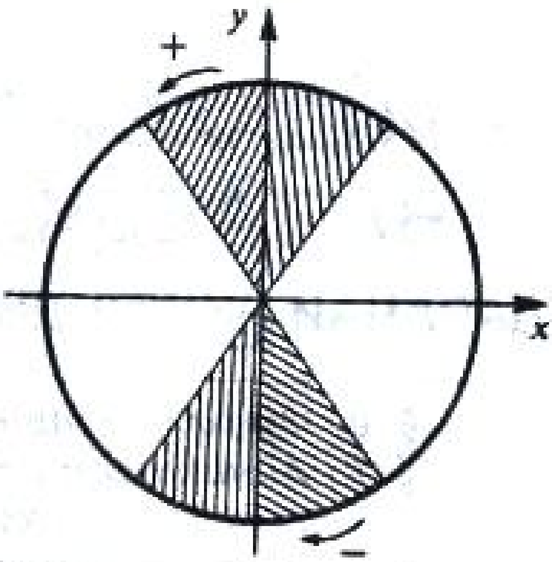
Яке аз ду самти имконпазири гардишро дар ҳамворӣ мусбат ва дигари онро манфӣ ҳисоб мекунем. Кунҷи дар натиҷаи ба муқобили самти ҳаракати ақрабаки соат даврзании нур ба вуҷуд омада, кунҷи мусбат ва кунҷи дар натиҷаи самти ҳаракати ақрабаки соат давр задании нур ҳосилшуда, кунҷи манфӣ ҳисоб карда мешавад.



Расми 97 Расми 98 Расми 99



Расми 100



Расми 101

Самтро ҳамчун самти мусбати даврзанӣ қабул мекунем, ки вай ба самти ҳаракати ақрабаки соати дар ҳаворӣ гузошташуда муқобил буда, сиферблаташ ба мушоҳидакунанда нигаронида шуда бошад.

Вазъияти аввалаи нури даврзананда тарафи аввалини кунҷи мувофиқи гардиш ва вазъияти охирини нур тарафи охирини кунҷ номида мешавад.

Ба ҳар гуна кунҷе, ки бо ду радиуси давра ташкил ёфтааст, камони бо нӯгҳои ин радиусҳо маҳдудшудаи давра мувофиқ меояд (расми 100).

Агар радиуси OA дар атрофии маркази O давр занад, он гоҳ нӯги радиуси OA дар рӯи давра давр мезанад. Мегӯянд, ки нуқта дар рӯи давра ба самти мусбат (самти манфӣ) ҳаракат мекунад, ба шарте, ки радиуси нуқтаро ба марказ пайвасткунанда ба самти мусбат (манфӣ) ҳаракат кунад.

Камоне, ки дар натиҷаи аз рӯи давра ба самти мусбат ҳаракат кардани нуқта ба вуҷуд омадааст, камони мусбат ва камоне, ки дар натиҷаи аз рӯи давра ба самти манфӣ ҳаракат кардани нуқта ташкил мёбад, камони манфӣ ҳисоб карда мешавад (расми 101).

Камонҳое ҳастанд, ки адади дилхоҳи давраҳои пурраи мусбат ва манфиро дарбар мегиранд. Ба ин гуна камон ресмони ба ғалтак печонидашуда мисол шуда метавонад: вай метавонад адади дилхоҳи печҳои ба ин ё он тараф печонидашударо дар бар гирад.

Барои чен кардани кунҷҳо ягон кунҷи муайянро ҳамчун воҳиди ченак қабул карда, ба ёрии вай дигар кунҷҳоро чен мекунанд.

Кунҷи дилхоҳро ҳамчун воҳиди ченак қабул кардан мумкин аст. Дар амалия бисёр вақт кунҷҳоро ба градусҳо чен мекунанд. Воҳиди ченак-градус 1° буда, ба $\frac{1}{360}$ ҳиссаи гардиши пурра баробар аст.

Барои чен кардани кунҷҳои ченакашон градуси нопурра дақиқаҳо ва сонияҳо истифода карда мешаванд. Як дақиқа ба $\frac{1}{60}$ ҳиссаи градус ва як сония ба $\frac{1}{60}$ ҳиссаи дақиқа баробар аст. Градус ба таври зерин ишорат карда мешаванд:

$$1' = \frac{1}{60^0}; \qquad 1'' = \frac{1}{60'};$$

Бузургии кунҷи мусбат бо адади мусбат ва кунҷи манфӣ бо адади манфӣ ифода карда мешавад.

Дар вақти чен кардани камонҳои давраи додашуда ҳамчун воҳид камонеро қабул менамоянд, ки ба он кунҷи марказии ба воҳиди ченак қабулкардашуда такя мекунад. Дар ин маврид бузургии кунҷи марказӣ ба бузургии камоне, ки ба вай ин кунҷ такя мекунад, дар воҳидҳои кунҷӣ ва камонӣ (мувофиқан) бо як хел адад ифода карда мешавад.

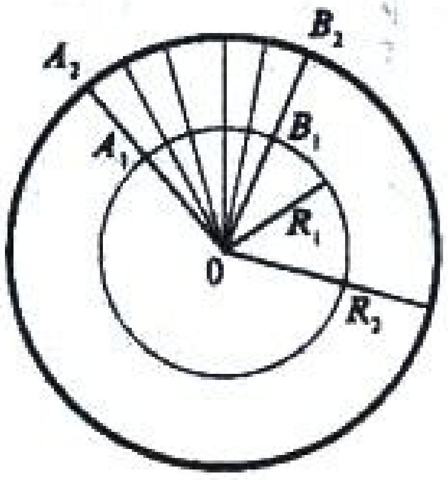
Агар як кунҷи марказӣ бо камонҳои ду давра такя кунад, он гоҳ дарозии камонҳои ин ду давра ҳамчун дарозии радиусҳои онҳо нисбат доранд (расми 102).

Инак, дар вақти ягона будани кунҷи марказӣ нисбати дарозии камони давра ба радиуси он ба бузургии радиус вобаста нест.

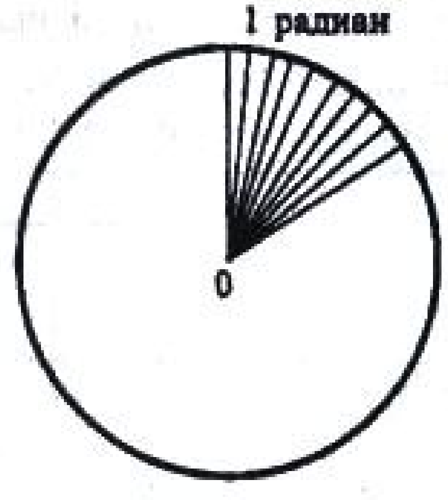
Т а ъ р и ф. **Нисбати дарозии камони давра, ки барои он кунҷи додашуда кунҷи марказӣ аст, ба дарозии радиуси ҳамин давра ченаки радиании кунҷ номида мешавад.**

Дар вақти ченкунии радиании кунҷҳо ҳамчун воҳиди ченаки кунҷи марказии мусбат қабул карда мешавад, ки вай ба камони дарозиаш ба радиус баробар такя мекунад. Ин кунҷ *радиан* номида мешавад (расми 103).

Барои ченкунии радиани камонҳои давра радиани камонӣ ҳамчун воҳид қабул карда шудааст; ин камонест, ки аз ҷиҳати дарозӣ ба радиус баробар мебошад.



Расми 102



Расми 103

Ченаки радиании гардиши пурра ба нисбати дарозии давра бар радиус баробар аст. $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi = 6,283185...$

Хотиррасон мекунем, ки қимати радиани $\pi \approx 3,14$ мебошад. Ченаки радиании $1°$ ба $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0,1017453...$ баробар аст.

Агар кунҷ $A°$ бошад, он гоҳ андозаи радиании вай α ва $\alpha = \frac{A°\pi}{180°} = \frac{A\pi}{180}$ баробар аст.

$$1' = \frac{1}{60}(\text{градус}) = \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180}(\text{радиан}) = 0,00029088\,(\text{радиан}).$$

Аз баробарии $\alpha = \frac{A°\pi}{180°}$ маълум аст, ки кунҷи ба α радиан баробар чунин мешавад: $A° = \alpha \frac{180°}{\pi}$.

Аз он ҷумла 1 радиан$= \frac{180°}{\pi} \approx 57,295(\text{градус}) \approx 3438' \approx 206265'' \approx$ $\approx 57°17'45''$ Барои ифода намудани андозаи радиании кунҷҳо ва камонҳо бузургии кунҷ (ё камон) ба радианҳо ифода карда мешавад. Ба ҷои калимаҳои «кунҷи ба адади α чен кардашаванда» мухтасар «кунҷи α» мегӯянд. Масалан, кунҷи бузургиаш ба 0,5 радиан нагуфта «кунҷи 0,5» мегӯянд.

Мисоли 1. Андозаи радиании A=150°-ро меёбем.

Ҳал. $150° = 150 \cdot \frac{\pi}{180}$ радиан$= \frac{5\pi}{6}$ радиан.

Мисоли 2. Андозаи градусии α=4,5 радианро меёбем.

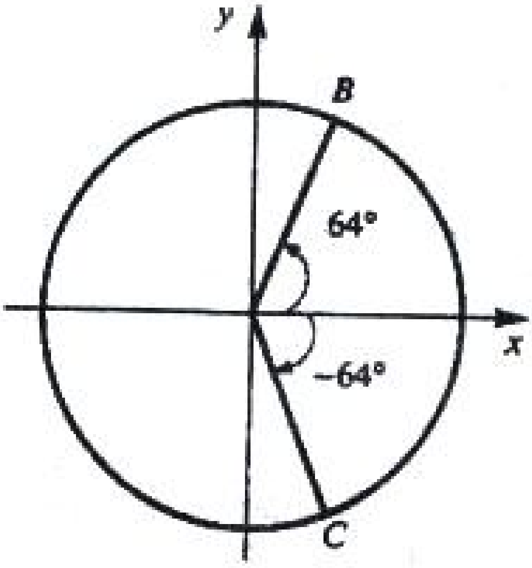
Ҳал. 4,5 радиан$= 4,5 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 258°$.

Мисоли 3. Дарозии камони даврае, ки радиусаш ба 16 см баробар буда, камонаш $\frac{\pi}{4}$ радианро ташкил медиҳад, меёбем.

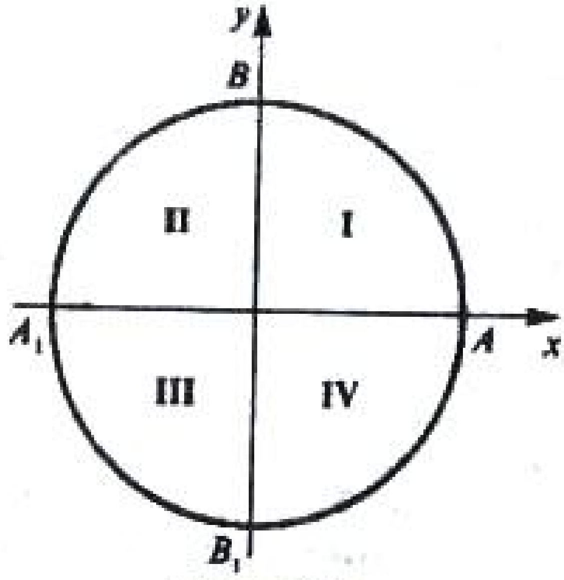
Ҳал. Дарозии камоне, ки дорои k-радиан аст бо формулаи $C = k \cdot R$ ҳисоб карда мешавад, бинобар $C = 16 \cdot \frac{\pi}{4} = 4$ см.

Андозаи радиании баъзе кунҷҳое, ки бисёр вомехӯранд. Дар ҷадвали зерин нишон медиҳем:

Градус	30°	45°	60°	90°
Радиан	$\frac{\pi}{6} \approx 0,5236$	$\frac{\pi}{4} \approx 0,7854$	$\frac{\pi}{3} \approx 0,0472$	$\frac{\pi}{2} \approx 1,5708$
Градус	180°	270°	360°	
Радиан	$\pi \approx 3,1416$	$\frac{3\pi}{2} \approx 4,7124$	$2\pi \approx 6,2832$	



Расми 104



Расми 105

Дар ҳамворӣ самти мусбати даврзаниро муайян карда, дар вай тирҳои координатаҳоро интихоб мекунем. Дар тири Ox аз рости ибтидои координатаҳо нуқтаи A-ро нишона мекунем ва аз он давраи марказаш дар нуқтаи 0-ро мегузаронем (расми 104). Радиуси OA-ро радиуси ибтидоӣ меномем.

Радиуси ибтидоиро дар атрофии нуқтаи O ба муқобили ҳаракати ақрабаки соат ба 64° гардиш медиҳем. Ин радиус ба радиуси OB бадал мешавад. Кунҷи гардиш ба 64° баробар аст. Агар радиуси ибтидоиро дар атрофии O бо самти ақрабаки соат ба 64° гардиш диҳем, он гоҳ он ба радиуси OC бадал мешавад. Дар ин ҳолат кунҷи гардиш ба −64° баробар аст. Ин кунҷҳо дар расм бо тирчаҳо нишон дода шудааст.

Аз курси геометрия маълум аст, ки кунҷ ба ҳисоби градусҳо бо ададҳои аз 0 то 180° ифода карда мешавад. Кунҷи гардиш ба ҳисоби градусҳо бо ададҳо $-\infty$ то $+\infty$ ифода карда мешавад. Масалан. Агар радиуси ибтидоиро ба муқобили самти ҳаракати ақрабаки соат ба 180° ва боз ба 50° гардиш диҳем, он гоҳ кунҷи гардиш ба 230° баробар мешавад. Агар радиуси ибтидоӣ ба муқобили ҳаракати ақрабаки соат як гардиши пурра кунад. Он гоҳ кунҷи гардиш ба 360° баробар мешавад, агар ин радиус ба ҳамон самт якуним гардиш кунад, он гоҳ кунҷи гардиш ба 540° баробар мешавад ва ҳоказо.

Агар тарафи охирини кунҷ дар дохили ягон чоряки ҳамворӣ бошад, он гоҳ мегӯянд, ки кунҷи додашуда дар ҳамин чоряк тамом мешавад.

Чорякҳои I ва II якҷоя нимдоираи болоӣ, чорякҳои III ва IV нимдоираи поёниро ташкил мекунанд. Чорякҳои I ва IV нимдоираи рост, чорякҳои II ва III нимдоираи чапро ташкил медиҳанд (расми 105). Агар $0° < \alpha < 90°$ бошад, он гоҳ α кунҷи чоряки I аст; агар $90° < \alpha < 180°$ бошад, он гоҳ α кунҷи чоряки II аст; агар $180° < \alpha < 270°$ бошад, он гоҳ α кунҷи чоряки III аст. Ҳангоми ба кунҷ ҷамъ шудани адади бутуни гардишҳо кунҷи ҳамон чорякҳо ҳосил мешавад. Масалан, кунҷи 430° кунҷи чоряки I мебошад, чунки 430°=360°+70° ва $0° < 70° < 90°$ аст, кунҷи 920° кунҷи чоряки III аст, чунки 920°=360° · 2+200° ва 180°<200°<270° мебошад.

Кунҷҳои 0°, $\pm 90°$; $\pm 180°$; $\pm 270°$; $\pm 360°$, ... ба ҳеҷ як чоряк тааллуқ надоранд.

? 1. Андозаи ченакҳои кунҷро номбар кунед. **2**. Бузургии кунҷ ба k градус баробар аст. Бузургии ин кунҷро бо радиан ифода кунед. **3**. Бузургии кунҷ ба k радиан баробар аст. Бузургии ин кунҷро бо градус ифода кунед. **4**. Кунҷҳои 1800°, 3600°-ро бо радианҳо ифода намоед.

Машқҳо барои такрор

593. Қимати ифодаи $\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}} \cdot \frac{xy^2}{x+y}$ -ро ҳангоми x=0,12 ва y=0,5 будан ёбед.

594. Муодиларо ҳал намоед:

а) $\frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^3+1}$; б) $\frac{3x-30}{x^3-8} - \frac{10}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x-2} = 0$.

595. Суммаи прогрессияи беохири 2; $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9}$; $-\frac{2}{27}$ ...-ро ёбед.

30. Таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи дилхоҳ

Ба мо маълум аст, ки агар дар секунҷаи росткунҷаи ABC-и дода шуда α кунҷи тези ба гипотенуза часпида бошад (расми 106), он гоҳ

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}; \quad \cos\alpha = \frac{a}{c}; \quad tg\alpha = \frac{b}{a}; \quad ctg\alpha = \frac{a}{b}.$$

Акнун таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенсро ҳангоми дилхоҳ будани кунҷи α меорем.

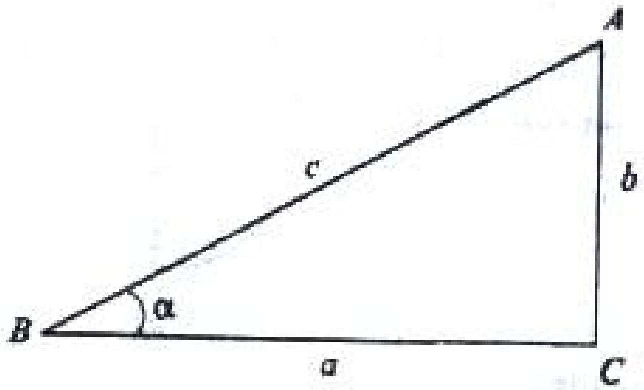
Бигузор ҳангоми дар атрофии нуқтаи O ба кунҷи α гардиш додани радиуси ибтидоии OA он ба радиуси OB бадал шавад (расми 107).

Нисбати ординатаи нуқтаи B ба дарозии радиус синуси кунҷи α номида мешавад:

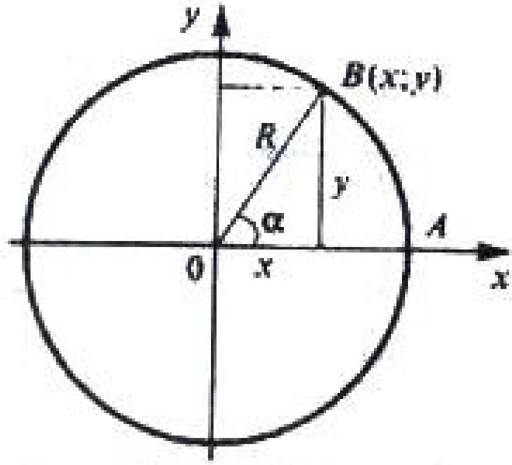
$$\sin\alpha = \frac{y}{R}$$

Нисбати абсиссаи нуқтаи B ва дарозии радиус косинуси кунҷи α номида мешавад:

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}$$



Расми 106



Расми 107

Нисбати ординатаи нуктаи *B* ба абсиссаи он тангенси кунчи α номида мешавад:

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

Нисбати абсиссаи нуктаи *B* ба ординатаи он котангенси кунчи α номида мешавад:

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

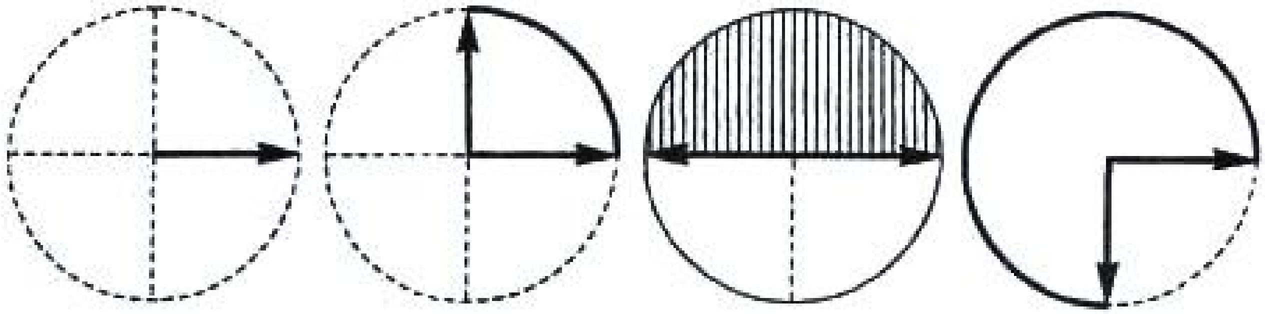
Функсияҳои синус, косинус, тангенс ва котангенсро *функсияҳои тригонометрӣ* меноманд; кунҷи α аргументи онҳо ном дорад. Ифодаҳои $sin\alpha$ ва $cos\alpha$ барои қиматҳои дилхоҳи α муайян мебошад, чунки барои кунҷи дилхоҳи гардиш қиматҳои мувофиқи касрҳои $\frac{y}{R}$ ва $\frac{x}{R}$-ро ёфтан мумкин аст. Ифодаи $tg\alpha = \frac{y}{x}$ ҳамон вақт тартиб дода мешавад, ки агар $x \neq 0$ бошад.

Агар $x=0$ бошад, пас ин нисбатро тартиб додан имконнопазир аст (ба нул тақсим кардан маъно надорад); дар ин маврид тарафи охирини кунҷ ба дарозии тири ордината равон мешавад ва $d = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ё бо ифодаи градусӣ $\alpha = 90° + 180°k$ (k - адади дилхоҳи бутун аст).

Барои кунҷҳои $k\pi$ (ё бо градусҳои $180° \cdot k$) тарафи охирин ба дарозии тири абсисса равон мешавад: нисбати $\frac{x}{y}$ маънои худро гум мекунад, чунки $y=0$ мешавад; барои ин кунҷҳо котангенс вуҷуд надорад.

Қиматҳои функсияҳои тригонометрии баъзе кунҷҳоро дида мебароем. Агар кунҷи α=0 бошад (расми 108, а) он гоҳ $x=1$, $y=0$ мешавад. Бинобар ин $cos0=1$, $sin0=0$, $tg\,0 = \frac{y}{x} = 0$, $ctg0$ вуҷуд надорад.

Агар кунҷи $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (ё бо градусҳои α=90°) мебошад, он гоҳ $x=0$, $y=1$ мешавад (расми 108, *б*). Бинобар ин $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$; $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$; $tg\frac{\pi}{2} = tg90°$ вуҷуд надорад: $ctg\frac{\pi}{2} = ctg90° = 0$.



а) *б)* *в)* *г)*

Расми 108

Агар $\alpha=\pi$ (расми 108, в) бошад, он гоҳ $x=-1$; $y=0$ мешавад, бинобар ин $\cos\pi=\cos180°=-1$; $\sin\pi=\sin180°=0$, $tg\pi=tg180°=0$; $ctg\pi=ctg180°$ вуҷуд надорад.

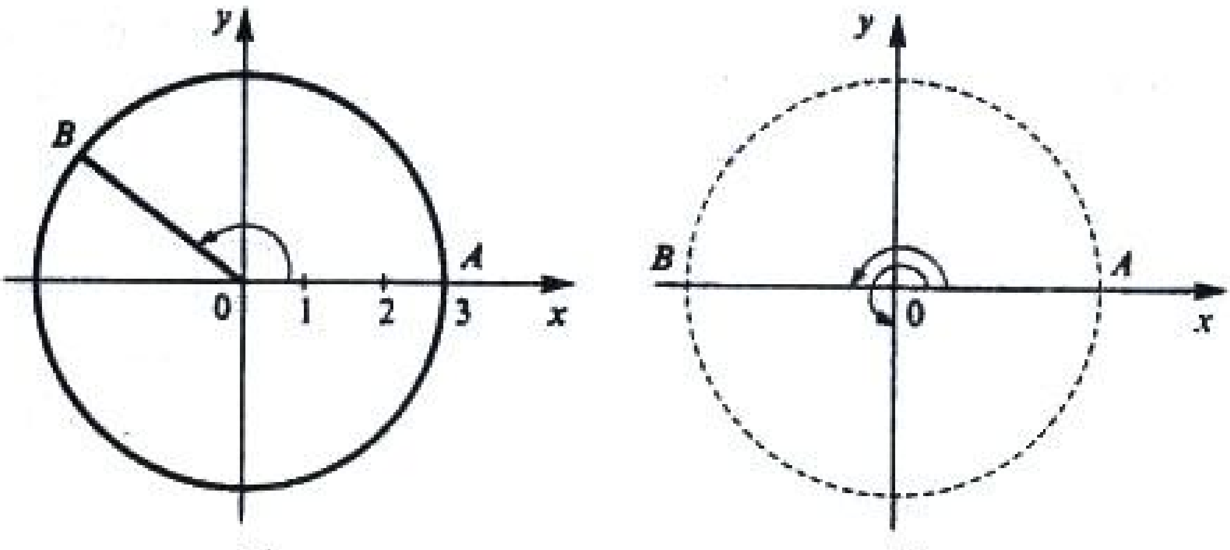
Агар $\alpha=\frac{3}{2}\pi$ (расми 108, *г*) бошад, он гоҳ $x=0$; $y=-1$ мешавад, бинобар ин $\cos\frac{3}{2}\pi=\cos270°=0$; $\sin\frac{3}{2}\pi=\sin270°=-1$; $tg\frac{3}{2}\pi=tg270°$ вуҷуд надорад; $ctg\frac{3}{2}\pi=ctg270°=0$ аст.

Доир ба ҳисоб кардани қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ мисолҳо меорем.

Мисоли 4. Қиматҳои тақрибии $\sin110°$, $\cos110°$, $tg110°$ ва $ctg110°$-ро бо ёрии нақша меёбем.

Давраи марказаш ибтидои координатаҳои радиусаш $OA=R=3$-ро месозем (расми 109). Радиуси OA-ро ба $110°$ гардиш медиҳем. Радиуси OB ҳосил мешавад. Координатаҳои нуқтаи B, яъне x ва y-ро аз расм меёбем:

$$x=-1{,}05, \qquad y=2{,}80.$$



а) *б)*

Расми 109

Аз ин ҷо:

$$sin110^\circ = \frac{y}{R} = \frac{2,80}{3} \approx 0,93, \qquad tg110^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-2,80}{1,05} \approx -2,7,$$

$$cos110^\circ = \frac{x}{R} = \frac{-1,05}{3} \approx -0,35, \qquad ctg110^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1,05}{2,80} \approx -0,38.$$

Акнун ҷадвали қиматҳои функсияҳои тригонометриро барои баъзе кунҷҳо меорем.

α	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$2\frac{\pi}{3}$ (120°)	$3\frac{\pi}{4}$ (135°)	$5\frac{\pi}{6}$ (150°)	π (180°)
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	вуҷуд надорад	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	вуҷуд надорад	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\sqrt{3}$	вуҷуд надорад

α	0	$7\frac{\pi}{6}$ (210°)	$5\frac{\pi}{4}$ (225°)	$4\frac{\pi}{3}$ (240°)	$3\frac{\pi}{2}$ (270°)	$5\frac{\pi}{3}$ (300°)	$7\frac{\pi}{4}$ (315°)	$11\frac{\pi}{6}$ (330°)	2π (360°)
sin α	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	вуҷуд надорад	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	вуҷуд надорад	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\sqrt{3}$	вуҷуд надорад

Мисоли 5. Аломати ҳосили зарбро муайян мекунем.

$$\sin67^\circ \cdot \cos267^\circ \cdot \cos375^\circ \cdot \sin(-68^\circ) \cdot \cos(-68^\circ) \cdot \sin2.$$

Ҳал. $\sin67^\circ>0$ чунки кунҷи 67° дар чоряки якум ҷойгир аст, синус дар чоряки якум мусбат мебошад.

$\cos267^\circ<0$ чунки кунҷи 267° кунҷи чоряки се аст, косинус дар ин чоряк манфӣ мебошад.

$\cos 375°>0$, чунки кунҷи 375° кунҷи чоряки якум мебошад, косинус дар ин чоряк мусбат.

$\sin(-68°)<0$ чунки кунҷи $-68°$ кунҷи чоряки чорум аст, синус дар ин чоряк манфӣ мебошад.

$\cos(-68°)>0$ чунки кунҷи $-68°$ дар чоряки чорум ҷойгир аст, косинус дар ин чоряк мусбат.

$\sin 2>0$ чунки кунҷе, ки бузургиаш ба 2 радиан баробар аст, кунҷи чоряки дуюм мебошад, синус дар чоряки дуюм мусбат. Бинобар ин ҳосили зарб мусбат мебошад.

? **1.** Радиан чист? **2.** Кунҷҳои 30°, 45°, 60°, 90°-ро бо радианҳо ифода намоед. **3.** Таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи α-ро гӯед. **4.** Ифодаҳои sinα, cosα, tgα, ctgα барои кадом қиматҳои α маъно доранд?

596. Кунҷи додашударо бо радианҳо ифода намоед.

а) 1°; в) 45°; д) 120°; з) 320°; к) 1000°.
б) 15°; г) 70°; ж) 150°; и) 315°;

597. Кунҷи додашударо бо градусҳо ифода намоед:

а) $\frac{\pi}{15}$; б) $-\frac{\pi}{8}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{11\pi}{6}$; д) $0{,}25\pi$; ж) $-\frac{31}{6}\pi$.

598. Кунҷи зерин дар кадом чоряк тамом мешавад:

а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{2\pi}{3}$; в) $21\frac{\pi}{4}$.

599. Қимати ифодаро ёбед:

а) $a^2\sin\frac{\pi}{2}+b^2\cos 0+2ab\cos\pi$; в) $2\cos\pi+6ctg\frac{3}{2}\pi-5\sin 2\pi$;

б) $3\cos\frac{\pi}{2}-4\sin^3\frac{3\pi}{2}+8tg\pi$; г) $2tg0+\sin\pi-\cos\frac{3}{2}\pi-ctg\pi$.

600. Ҳисоб кунед.

а) $2\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{\pi}{6}+tg\frac{\pi}{6}$; в) $a\sin\pi+b\cos\pi+tg\pi$;

б) $2\cos\pi+3\cos 3\frac{\pi}{2}+6tg\frac{\pi}{3}$; г) $m\cos\frac{\pi}{2}+n\cos\pi+p\sin 3\frac{\pi}{2}+qtg2\pi$.

601. Ҳисоб кунед.

а) $2\cos 60°+\sqrt{3}\cos 30°$; г) $3\,tg45°\cdot tg60°$;
б) $5\sin 30°-ctg45°$; д) $4tg60°\cdot\sin 60°$;
в) $2\sin 30°+6\cos 60°-4tg45°$; е) $12\sin 60°\cdot ctg60°$.

602. Якчанд қиматҳои α-ро ёбед, ки барои онҳо:

а) $\cos\alpha=0$; б) $\sin\alpha=1$; в) $ctg\,\alpha=0$
бошад.

603. Якчанд қиматҳои φ-ро ёбед, ки барои онҳо:

а) $\sin\varphi=\frac{1}{2}$; б) $\cos^2\varphi=1$; в) $\cos\varphi=0$; г) $tg\,\varphi=0$
бошад.

604. Дар давраи воҳидӣ нуқтаи $P_a(x_a;\ y_a)$-*ро* тасвир кунед, ки:

а) $x_a>0$, $y_a>0$;   б) $y_a>0$, $x_a<0$;   в) $y_a<0$, $x_a<0$;   г) $y_a<0$, $x_a>0$

бошад.

605. Аломати ҳосили зарбро муайян кунед:

$\sin 67° \cdot \cos 267° \cdot \cos 375° \cdot \sin(-68°)\cos(-68°) \cdot \sin 2$.

606. Якчанд кунҷи α-ро ёбед, ки дар онҳо ифодаи:

а) tg α маъно надорад;   б) ctg α маъно надорад.

607. Оё cos α қиматҳои

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sqrt{3}$ -ро қабул карда метавонад?

608. Магар адади α-и баробариҳои зеринро қонеъгардонанда вуҷуд дорад?

а) $\sin\alpha=\frac{7}{25}$; $\cos\alpha=\frac{24}{25}$;   в) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{7}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{4}$.

б) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$;

609. Агар:

а) $\alpha=0°$;   б) $\alpha=45°$;   в) $\alpha=90°$;   г) $\alpha=180°$

бошад, қимати ифодаи $\sin\alpha+\cos\alpha$-ро ёбед.

610. Ҳисоб кунед:

а) $2\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$;   в) $a\sin\pi+b\cos\pi+\operatorname{ctg}\pi$.

б) $2\cos\pi+3\cos 3\frac{\pi}{2}+6\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

611. Агар:

а) $\alpha=15°$;   б) $\alpha=30°$;   в) $\alpha=90°$

бошад, қимати ифодаи $\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$-ро ёбед

Машқҳо барои такрор

612. Ифодаро содда кунед:

$$\left[\frac{2}{(-a)^3}\right]^2+\left[\left(-\frac{2}{a}\right)^3\right]^2+\left(-\frac{2}{a^3}\right)^3-2\left(-\frac{2}{a^3}\right)^2-\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{a}\right)^2\right]^3.$$

613. Ҳисоб кунед:

а) (3,52 : 1,1+6,2) · (7,2–4,62 :2,2);

б) (2,86 : 2,6–0,8)–(3,4+7,04 : 3,2).

614. Нуқтаи буриши хати рости $x+y=2$ ва давраи $x^2+y^2=100$-ро ёбед.

615. Муодиларо ҳал кунед:

$$x-7-9x=4x-3-8x.$$

616. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $x^2<16$;   б) $x^2\geq 2$.

617. Асоси росткунҷа ба 8 см баробар буда, баландии он аз асосаш 2 см зиёд аст. Периметр ва масоҳати росткунҷаро ёбед.

618. Прогрессияи арифметикӣ бо формулаи $a_n=3n+2$ дода шудааст. Суммаи 20 аъзои аввалаи онро ёбед.

§11. АЙНИЯТҲОИ АСОСИИ ТРИГОНОМЕТРӢ ВА ТАТБИҚИ ОНҲО

31. Баъзе хосиятҳои функсияҳои тригонометрӣ

Аломати функсияҳои синус, косинус, тангенс ва котангенсро дар чорякҳои гуногун муайян менамоем.

Бигузор ҳангоми радиуси $OA=R$-ро ба кунҷи α гардиш додан нуқтаи A ба нуқтаи $B(x;y)$ табдил ёбад. (Расми 110.)

Мувофиқи таъриф $\sin\alpha=\frac{y}{R}$ бинобар ин аломати $\sin\alpha$ аз y вобаста аст. Қимати синус барои кунҷҳои дар чунин чорякҳо тамомшаванда мусбат мешавад, ки дар ин чорякҳо ординатаи нуқтаҳо мусбат мебошанд.

Бинобар ин, **синусҳои дар нимҳамвории болоӣ (чорякҳои I ва II) тамомшаванда мусбат ва синусҳои кунҷҳои дар нимҳамвории поёнӣ (чорякҳои III ва IV) тамомшаванда манфӣ мебошанд.**

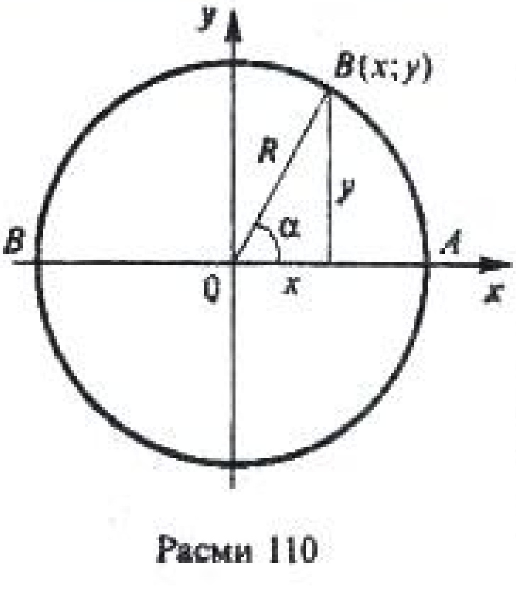
Азбаски $\cos\frac{x}{R}$ аст, бинобар ин аломати $\cos\alpha$ аз аломати x вобаста аст, қимати косинус барои кунҷҳои дар чунин чорякҳо тамомшаванда мусбат мешаванд, ки дар ин чорякҳо абсиссаҳои нуқтаҳо мусбат мебошанд.

Аз ин рӯ, **косинусҳои кунҷҳои дар нимҳамвории рост (чорякҳои I ва IV) тамомшаванда мусбат, косинусҳои кунҷҳои дар нимҳамвории чап (чорякҳои II ва III) тамомшаванда манфӣ мебошанд.**

Азбаски $tg\,\alpha=\frac{y}{x}$ $ctg\,\alpha=\frac{x}{y}$ аст, пас аломатҳои $tg\,\alpha$ ва $ctg\,\alpha$ аз аломатҳои x ва y вобаста мебошанд.

Бинобар ин, **тангенс ва котангенсҳои кунҷҳои дар чорякҳои I ва III тамомшаванда мусбат, тангенс ва котангенсҳои кунҷҳои дар чорякҳои II ва IV тамомшаванда манфӣ мебошанд.**

Аломатҳои синус, косинус, тангенс ва котангенс дар ҳар яки ин чорякҳо дар расми 111 нишон дода шудаанд.

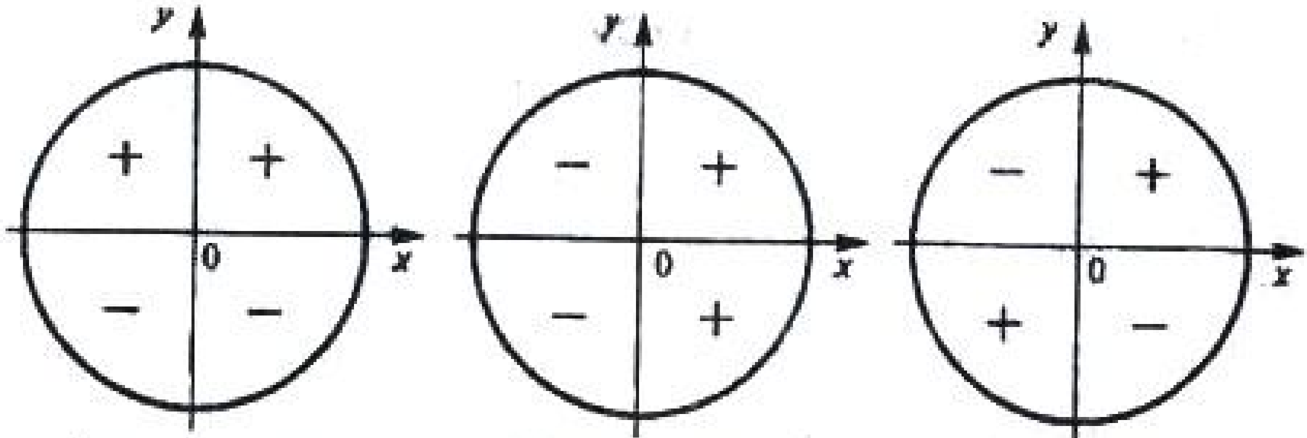


Расми 110

Акнун масъалаи ҷуфт ва тоқ будани функсияҳои тригонометриро аниқ мекунем.

Чӣ тавре дида будем (ниг. ба §1-и п. 3), агар қимати функсия дар вақти ба қимати муқобилаш иваз кардани аргумент тағйир наёбад, функсияро ҷуфт меноманд, яъне агар $y=y(x)$ функсия бошад, пас вай ҷуфт аст, агар $y(-x)=y(x)$ бошад. Функсияи $y=x^2$ мисоли оддитарини функсияи ҷуфт аст, зеро

$$y(-x)=(-x)^2=x^2=y(x).$$

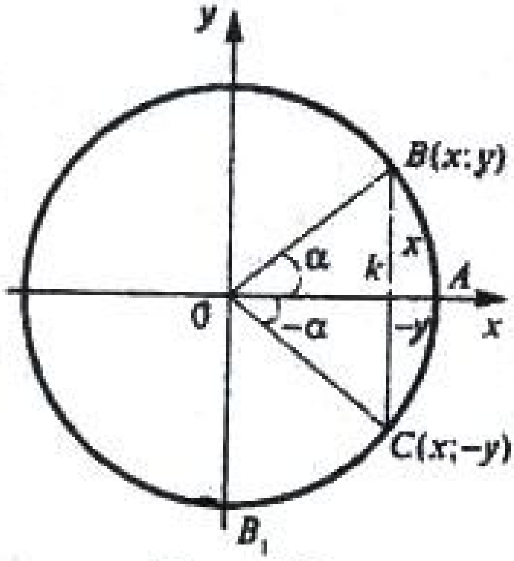


Аломати синус   Аломати косинус   Аломати тангенс ва котангенс

Расми 111

Агар ҳангоми ба адади муқобил иваз кардани аргументи функсия қимати он ба адади муқобилиаш иваз шавад, яъне $y(-x)=-y(x)$ бошад, он гоҳ функсияро тоқ номида будем. Функсияи $y=x^3$ мисоли функсияи тоқ аст, зеро $(-x)^3=-x^3=-y$.

Фарз мекунем, ки кунҷи α дода шудааст. Кунҷи α-ро дида мебароем. Кунҷҳои ба ҳам муқобили α ва $-\alpha$ дар натиҷаи аз вазъияти аввалини OA ба самтҳои ба ҳам муқобил як хел гардиш додани радиуси ҳаракатнок ташкил меёбанд.



Расми 112

Ҳангоми ба кунҷи α гардиш додан радиуси OA он ба радиуси OB бадал мешавад ва ҳангоми ба кунҷи $-\alpha$ гардиш додани ҳамон радиуси он ба радиуси OC бадал мешавад (расми 112). Нуқтаҳои B ва C-ро бо порча пайваст карда, секунҷаи баробарпаҳлӯи BOC-ро ҳосил менамоем. OA биссектрисаи кунҷи BOC мебошад. Пас, порчаи Ok медиана ва баландии секунҷаи BOC аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки нуқтаҳои B ва C нисбат бо тири абсисса симметрианд.

Координатаҳои нуқтаҳои $B(x;\ y)$ ва $C(x;\ -y)$-ро муқоиса карда ҳосил мекунем:

$$\sin(-\alpha)=\frac{-y}{R}=-\frac{y}{R}=-\sin\alpha; \qquad \cos(-\alpha)=\frac{y}{R}=\cos\alpha;$$

$$\mathrm{tg}(-\alpha)=\frac{y}{x}=-\frac{y}{x}=-\mathrm{tg}\alpha; \qquad \mathrm{ctg}(-\alpha)=\frac{x}{-y}=-\frac{x}{y}=-\mathrm{ctg}\alpha.$$

Ҳамин тавр:

Косинус функсияи ҷуфт:

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

синус, тангенс ва котангенси функсияҳои тоқ мебошанд:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha; \qquad \mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha; \qquad \mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$$

Масалан:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$;

$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$..

2) $\cos(-135°)=\cos135°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(-135°)=-\sin135°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\mathrm{tg}(-135^0)=-\mathrm{tg}135°=1$; $\mathrm{ctg}(-135°)=-\mathrm{ctg}135°=1$.

? 1. Синус, косинус, тангенс ва котангенс дар ҳар яки чоряки ҳои координатавӣ чӣ хел аломат доранд? 2. Кадоме аз функсияҳои тригонометрӣ, функсияи ҷуфт ва кадомашон тоқ мебошанд? 3. Нуқтаҳои ба тири ордината симметрӣ буда мутааллиқи кадом кунҷҳо мебошанд?

619. Агар: а) $\alpha=45°$; б) $\alpha=120°$; в) $\alpha=365°$; г) $\alpha=310°$; д) $\alpha=275°$ бошад, аломати $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$-ро муайян кунед.

620. Аломати ифодаи зеринро муайян намоед:
а) $\sin67°$; б) $\cos267°$; в) $\cos375°$; г) $\sin(-68°)$; д) $\cos(-68°)$.

621. Ин ифода чӣ гуна аломат дорад:
а) $\sin325°$; б) $\cos275°$; в) $\mathrm{tg}420°$: г) $\mathrm{ctg}420°$; д) $\sin25°$?

622. а) $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$; б) $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$; в) $\cos\alpha$ ва $\mathrm{tg}\alpha$
дар кадом чоряк ҳо аломати якхела доранд?

623. Қимати ифодаро ёбед:
а) $\sin45°$; б) $\cos(-90°)$; в) $\sin210°$; г) $\sin180°$; д) $\cos(-45°)$.

624. Қимати ифодаҳои зеринро ёбед:
а) $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha$-ро ҳангоми $\alpha=30°$ будан:
б) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{3}$-ро ҳангоми $\alpha=90°$ будан.

Машқҳо барои такрор

625. Ҳисоб кунед:
а) $\frac{2\cdot5^{22}-9\cdot5^{21}}{25^{10}}$; б) $2\sqrt{48}+\sqrt{27}+\sqrt{12}$.

626. Нобаробариро ҳал кунед:
а) $x^2-3x>0$; б) $(x-5)x+4x>2$.

627. Адади 336-ро ба зарбкунандаҳои содда ҷудо намоед.

628. Прогрессияи геометрии (b_n) дода шудааст. Агар:
а) $b_n=72{,}9$, $q=1{,}5$; б) $b_n=\frac{16}{9}$, $q=\frac{2}{3}$
бошад, суммаи ҳафт аъзои аввалаи онро ёбед.

32. Муносибатҳои байни функсияҳои тригонометрии як кунҷ

Муносибатҳои асосиеро муқаррар мекунем, ки бо онҳо қиматҳои чор функсияи тригонометрии аргументи додашуда алоқамананд.

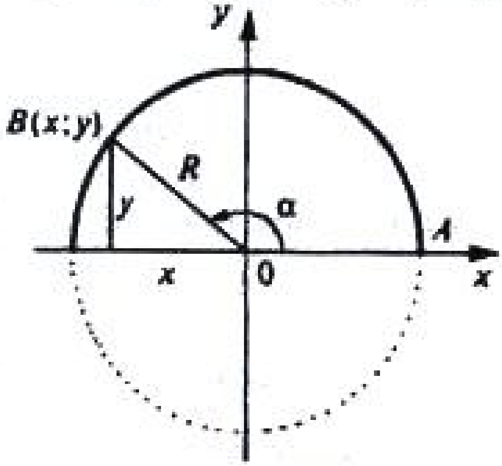
Бигзор ҳангоми ба кунҷи α дар атрофи нуқтаи O гардиш додани радиуси OA радиуси OB ҳосил шавад (расми 113). Мувофиқи таърифи синус ва косинус

$$\sin\alpha=\frac{y}{R},\qquad \cos\alpha=\frac{x}{R}$$

ки дар ин ҷо x - абсиссаи нуқтаи B, y - ординатаи нуқтаи B, R -радиуси давра мебошад. Азбаски нуқтаи B муталлиқи давра мебошад, бинобар ин координатҳои он муодилаи давраи

$$x^2+y^2=R^2$$

-ро қаноат мекунанд. Ба ҷои x ва y ифодаҳои $R\cos\alpha$ ва $R\sin\alpha$-ро гузошта ҳосил менамоем:



Расми 113

$$(R\cos\alpha)^2+(R\sin\alpha)^2=R^2. \qquad R^2\cos^2\alpha+R^2\sin^2\alpha=R^2.$$

Ҳар ду қисми баробариро ба R^2 тақсим намуда ҳосил менамоем:

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \qquad (1)$$

Суммаи квадратҳои косинус ва синуси як хел аргумент ба як баробар аст. Мувофиқи таърифи тангенс ва котангенс

$$tg\alpha=\frac{y}{x}=\frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{ва} \quad ctg\alpha=\frac{x}{y}=\frac{R\cos\alpha}{R\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

агар $\cos\alpha\neq0$ ва $\sin\alpha\neq0$ бошад.

Ҳамин тариқ,

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\qquad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

Айнияти (2)-ро аъзо ба аъзо зарб намуда, ҳосил мекунем:

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1 \qquad (3)$$

Баробарии (3) чӣ тавр ба якдигар алоқаманд будани тангенс ва котангенси кунҷи α-ро нишон медиҳад. Ин баробарӣ барои ҳамон қиматҳои α, ки барояшон $tg\alpha$ ва $ctg\alpha$ маъно дорад, дуруст аст.

Айнияти (1)-ро аввал ба $\cos^2\alpha$ баъд ба $\sin^2\alpha$ аъзо ба аъзо тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{ва} \quad \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

ё

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{ва} \quad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (4)$$

Баробариҳои (1)-(4) айниятҳои асосии тригонометрӣ ном доранд.

Ҳар гуна айнияти тригонометрӣ барои ҳамаи қиматҳои имконпазири аргумент, яъне барои ҳамаи он қиматҳои аргументе, ки тарафи рост ва чап маъно дорад, дуруст аст. Ин айниятҳо имконият медиҳанд, ки ҳангоми дода шудани қимати яке аз функсияҳои тригонометрӣ қиматҳои боқимонда ёфта шаванд.

Мисолҳоро дида мебароем.

Мисоли 1. Маълум, ки $\cos\alpha=-0,6$ ва $90°<\alpha<180°$ аст. $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$-ро меёбем.

Ҳал. Аз айнияти (1) ҳосил мекунем: $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Азбаски синус дар чораки II мусбат мебошад, бинобар ин пеш аз реша аломати плюс гирифтан лозим аст. Ҳамин тариқ,

$$\sin\alpha=\sqrt{1-0,36}=\sqrt{0,64}=0,8;$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0,8}{-0,6}-\frac{4}{3}; \qquad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-0,6}{0,8}=-\frac{3}{4}.$$

Мисоли 2. Бигузор $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ва $90°<\alpha<180°$ бошад. $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$-ро меёбем.

Ҳал. Кунҷи α дар чораки II тамом мешавад, ки дар он косинус, тангенс ва котангенс манфӣ мебошанд, бинобар ин

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}; \qquad tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4};$$

$$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}.$$

? 1. Айниятҳои асосии тригонометриро номбар намуда онҳоро исбот кунед. 2. Барои кадом кунҷҳо айниятҳои (2) ва (3) дурустанд? 3. Имконияти истифодаи ин айниятҳо дар чӣ зоҳир мегардад?

629. Қимати функсияҳои тригонометрии кунҷи α-ро ёбед, агар маълум бошад, ки

а) $\sin\alpha=0,6$; $0°<\alpha<90°$;

б) $tg\alpha=2$; $0°<\alpha<270°$;

в) $\sin\alpha=\frac{1}{k}$; $180°<\alpha<270°$.

630. Ифодаро содда кунед:

а) $1-\cos^2\alpha$;

б) $\sin^2\alpha-1$;

в) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+ctg^2\alpha$;

г) $\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$;

д) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;

е) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$;

ж) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;

з) $\frac{\cos^2\alpha-ctg^2\alpha}{tg^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

631. Ифодаро табдил диҳед:

а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$; б) $ctg\alpha - \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

632. Ифодаҳоро табдил диҳед:

а) $\dfrac{1}{tg\alpha + ctg\alpha}$; б) $\dfrac{\sin\alpha \cdot ctg\alpha}{\cos^2\alpha} - tg\alpha \cdot \sin\alpha$;

б) $\left(1-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)$; г) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha} : \left[1+\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2\right]$.

633. Маълум, ки $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ аст. Агар:

а) $\cos\alpha=-0,6$ бошад, $\sin\alpha$-ро; в) $\cos\alpha=-\dfrac{15}{17}$ бошад, $tg\alpha$-ро;

б) $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ бошад, $\cos\alpha$-ро; г) $ctg\alpha=-2$ бошад, $\sin\alpha$-ро ёбед.

634. Қимати функсияҳои тригонометрии кунҷи α-ро ёбед, агар маълум бошад, ки

а) $\sin\alpha=0,96$; $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; д) $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\sin\alpha=-0,8$; $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; е) $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$; $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

в) $\sin\alpha=0,6$; $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; ж) $\cos\alpha=0,6$; $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

г) $\sin\alpha=-0,3$; $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$; з) $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$; $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Машқҳо барои такрор

635. Ифодаро содда кунед:

а) $\sqrt{242}-\sqrt{200}+\sqrt{8}$; б) $\sqrt{75}-0,1\sqrt{300}+\sqrt{27}$; в) $\sqrt{98}-\sqrt{72}+0,5\sqrt{8}$.

636. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\sqrt{5x-10}$ ҳангоми $x=2$; $x=2,2$; $x=5,2$; $x=22$;

б) $\sqrt{6-2y}$ ҳангоми $y=1$; $y=-1,5$; $y=-15$; $y=-37,5$;

в) $\sqrt{2a-b}$ ҳангоми $a=0$; $b=0$; $a=4$; $b=7$;

г) $\sqrt{m-4n}$ ҳангоми $m=0$; $n=-1$; $m=33$; $n=2$.

637. Касрро ихтисор намоед:

а) $\dfrac{(3x-6)^2}{(2-x)^2}$; б) $\dfrac{a^2+8a+16}{(2a+8)^2}$.

638. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}<5$; б) $\dfrac{3y}{2}-\dfrac{y}{3}\ge 2$.

639. Як адад назар ба дигараш 4,5 маротиба калонтар аст. Агар аз адади калон 54-ро тарҳ кунему ба адади хурд 72-ро ҷамъ кунем, ададҳои баробар ҳосил мешаванд. Ин ададҳо ба чанд баробаранд?

640. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x+y=8, \\ xy=-20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=0,8, \\ xy=2,4. \end{cases}$

33. Табдилдиҳии ифодаҳои тригонометрӣ

Ифода тригонометрӣ номида мешавад, агар вай дар таркиби худ функсияҳои тригонометриро дошта бошад.

Масалан: $\sin x+\cos x$, $(\sin^2 x+1)\cdot \mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}^2x+\dfrac{1}{1+\sin^2\alpha}+3$, $a^2+2ab\cos x$ ифодаҳои тригонометрианд.

Мо аллакай баъзе табдилоти соддатарини ифодаҳои тригонометриро ба монанди $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$.

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ муоина кардем. Ҳоло бошад мисолҳои нисбатан мураккабро дида мебароем.

Мисоли 1. Ифодаи $\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$-ро табдил медиҳем.

$$tg^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\alpha=\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\sin^2\alpha=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=tg^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Мисоли 2. Ифодаи $\mathrm{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha-1)$-ро содда мекунем. Аз формулаҳои $\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$ ва $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ истифода карда ҳосил мекунем: $\mathrm{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha-1)=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}(-\sin^2\alpha)=-\cos^2\alpha$.

Мисоли 3. Ифодаи $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ -ро содда мекунем.

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{2+2\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2}{\sin\alpha}.$$

Мисоли 4. Айнияти $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$-ро исбот мекунем. Қисми чаппи ин баробариро табдил медиҳем:

$$tg^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)=\sin^2\alpha(1+tg^2\alpha-1)=$$

$$=tg^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$$

Мисоли 5. Айнияти $\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)^2$-ро исбот мекунем.

Қисми рости ин баробариро табдил медиҳем.

$$(tg\alpha+ctg\alpha)^2=\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=\left(\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}\right)^2=$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{(\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}.$$

? 1. Кадом формула алоқамандии байни функсияҳои $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$-ро ифода мекунад? 2. Ҳамаи он айниятҳои тригонометрие, ки ба шумо маълум аст номбар кунед. 3. Аломати кимати $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$-ро нишон диҳед, агар кунҷи α дар а) чоряки якуми координатҳо б) дар чоряки дуюми координатаҳо; в) дар чоряки сеюми координатҳо; г) дар чоряки чоруми координатӣ ҷойгир бошад.

641. Ифодаро содда кунед:

а) $1-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; б) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1$; в) $1-\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{ctg\alpha}$; г) $\dfrac{tg\alpha\cdot ctg\alpha-\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}$.

642. Ифодаро табдил диҳед:

а) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-1}$; в) $(tg\alpha+1)^2+(tg\alpha-1)^2$; д) $ctg\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

б) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}+\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$; г) $(ctg\beta+1)^2+(ctg\beta-1)^2$; е) $tg\beta+\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$.

643. Айниятро исбот кунед:

а) $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)=\sin^2\alpha$; в) $1+\cos\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha$;

б) $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=2\sin^2\alpha$; г) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=1$.

644. а) Ифодаи $1+tg^2\alpha$ ба чӣ баробар аст?

б) Ифодаи $1+ctg^2\alpha$ ба чӣ баробар аст?

в) Ифодаи $tg\alpha\cdot ctg\alpha$ ба чӣ баробар аст?

645. Оё синуси α ба а) $\dfrac{2}{3}$; б) 0,8; в) $\dfrac{3}{2}$; г) 2; д) 1; е) 3 баробар мешавад?

646. Айниятро исбот кунед:

а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; б) $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

647. Ифодаро содда кунед:

а) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot ctg^2\alpha$; б) $(tg\alpha-\sin\alpha)^2+(1-\cos\alpha)^2$.

Машқҳо барои такрор

648. Касрро ихтисор намоед:

$$\frac{6a^2-7a-3}{2a^2-a-3}.$$

649. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}2x+3y=-4,\\3x+8y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=-2,\\x^2+y^2=100.\end{cases}$

650. Қаиқи мотордор, ки суръаташ 20 км/соат аст, барои рафтуомади байни ду истгоҳи дарё 6 соату 15 дақиқа вақт сарф мекунад. Суръати оби дарёро ёбед, агар масофаи байни истгоҳҳо 60 км бошад.

651. Қубури якум ҳавзро нисбат ба қубури дуюм 3 соат зудтар бо об пур мекунад. Барои бо об пур кардани ҳавз ҳарду қубурро кушоданд ва баъд аз 10 соат қубури якумро бастанд; баъд аз он қубури дуюм дар алоҳидагӣ ҳавзро баъд аз 5 соату 45 дақиқа пур кард. Ҳар як қубур дар алоҳидагӣ дар чанд соат ҳавзро бо об пур карда метавонад?

652. Оё нуқтаи а) $M(1,5; -225)$; б) $N(-3; -90)$ ба графики функсияи $y=-100x^2$ тааллуқ дорад?

§12. ФОРМУЛАҲОИ МУВОФИҚОВАРӢ

Формулаҳои мувофиқоварӣ гуфта формулаҳоеро меноманд, ки дар онҳо функсияҳои тригонометрӣ аз аргументҳои

$$-\alpha;\quad \frac{\pi}{2}\pm\alpha;\quad \pi\pm\alpha;\quad \frac{3}{2}\pi\pm\alpha;\quad 2\pi\pm\alpha$$

ба воситаи функсияи аргументи α ифода карда мешаванд, дар ин ҷо α қимати дилхоҳи (имконпазири) аргумент мебошад.

Аввал фомулаҳои мувофиқоварии синус ва косинусро ҳосил мекунем.

Исбот мекунем, ки барои α-и дилхоҳ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \quad \text{ва} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha. \qquad (1)$$

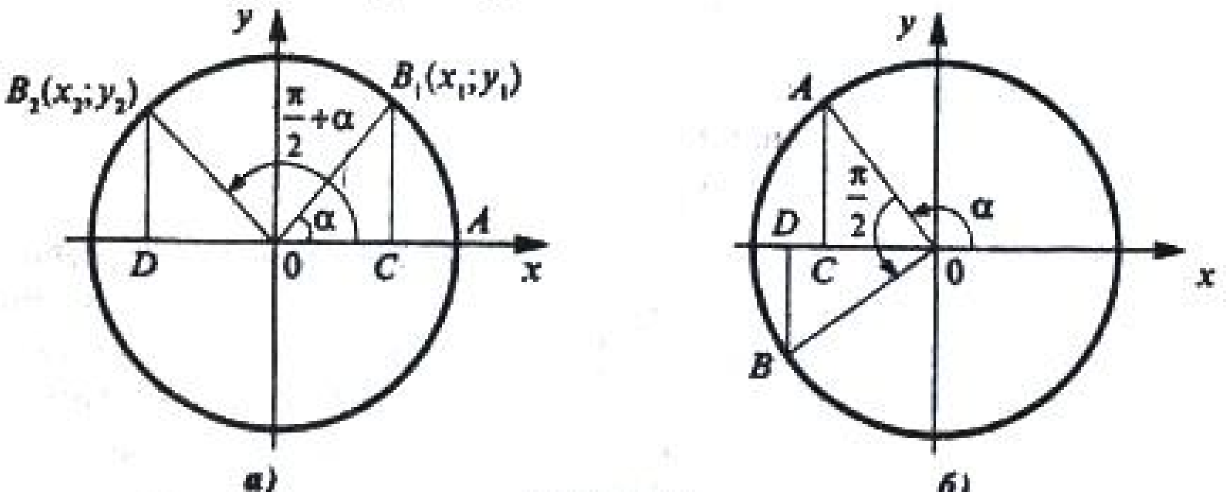
Радиуси OA-ро ки дарозиаш ба R баробар аст, ба кунҷи α ва ба кунҷи $\frac{\pi}{2}+\alpha$ гардиш медиҳем. Дар ин ҳолат радиуси OA мувофиқан ба радиусҳои OB_1 ва OB_2 бадал мешавад (расми 114, *а*). Аз нуқтаҳои B_1 ва B_2 ба тири Ox перпендикулярҳои B_1C ва B_2D-ро мегузаронем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=B_2D;\qquad \cos\alpha=OC.$$

Секунҷаҳои OB_1C ва OB_2D баробаранд; бинобар ин $B_2D=OC$.

Аз ин ҷо $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ агар кунҷи α дар чоряки II тамом шуда бошад, он гоҳ кунҷи $\frac{\pi}{2}+\alpha$ бояд дар чоряки III тамом шавад (расми 114, *б*)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-BD;\qquad \cos\alpha=-OC.$$



Расми 114

Секунчаи OAC ва BOD баробаранд: бинобар он $BD=AC$. Пас -$BD=OC$ ё $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

Аз айнияти исботшудаи (1) як қатор айниятҳои асосӣ ҳосил мешавад. Дар ифодаи (1) α - ро ба - α иваз карда ҳосил мекунем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha \qquad (2)$$

Барои $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ ҳосил кардани чунин формула дар ифодаи (2) α -ро бо $\frac{\pi}{2}-\alpha$ иваз мекунем. Дар натиҷа ҳосил мекунем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \text{ ёки } \sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Инак, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$. (3)

Аз ифодаҳои (2) ва (3) ҳосил мешавад:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\alpha, \quad tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha.$$

Ҳамин тавр, $ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}tg\,\alpha,\ ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\,\alpha$

Ҳамаи формулаҳои мувофиқовариро дар ҷадвал менависем. Аз ҷадвал қонуниятe, ки барои формулаҳои мувофиқоварӣ ҷой дорад, намоён аст. Ин қонуният имконият медиҳад, ки қоидае баён карда шаваду бо ёрии он формулаи дилхоҳи мувофиқоварӣ бе ёрии ҷадвалҳо навишта шавад.

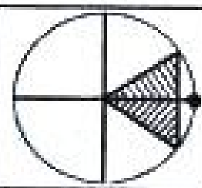
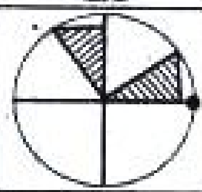
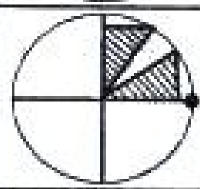
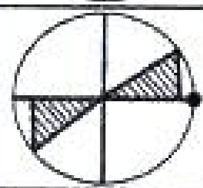
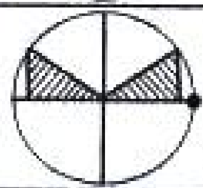
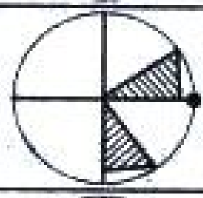
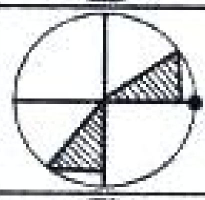
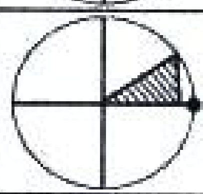
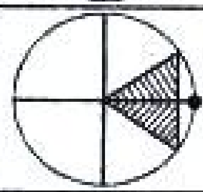
Агар кунҷи α кунҷи чоряки I бошад, аломати функсияи қисми ростӣ баробарӣ бо аломати функсияи аввала якхела мешавад; барои кунҷҳои $\pi\pm\alpha$ ва $2\pi\pm\alpha$ номи функсияи аввала нигоҳ дошта мешавад; барои кунҷи $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ва $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ номи функсияи аввала иваз мешавад (синус ба косинус, косинус ба синус, тангенс ба котангенс, котангенс ба тангенс).

Мисоли 1. $\cos(90^0+\alpha)$- ро ба воситаи функсияҳои кунҷи α ифода мекунем.

Ҳал. $\cos(90^0+\alpha)=\cos[90^0-(-\alpha)]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

Мисоли 2. $tg(90^0+\alpha)$ –-ро ба воситаи функсияҳои тригонометрии кунҷи α ифода мекунем.

Ҳал. $tg(90^0+\alpha)=tg[90^0-(-\alpha)]=ctg(-\alpha)=-ctg\alpha$.

Функсия \ Аргумент Радиано (градусҳо)		cos	sin	tg	ctg	
1	$-\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	
2	$\frac{\pi}{2}+\alpha(90^0+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	
3	$\frac{\pi}{2}-\alpha(90^0-\alpha)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	
4	$\pi+\alpha(180^0+\alpha)$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	
5	$\pi-\alpha(180^0-\alpha)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	
6	$\frac{3}{2}\pi+\alpha(270^0+\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	
7	$\frac{3}{2}\pi-\alpha(270^0-\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	
8	$2\pi+\alpha(360^0+\alpha)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	
9	$2\pi-\alpha(360^0-\alpha)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	

? **1.** Формулаҳоеро нависед, ки онҳо алоқамандии байни синус ва косинуси як кунҷро ифода намоянд. Онҳоро исбот намоед. **2.** Формулаҳоеро нависед, ки онҳо тангенс ва котангенсро ба воситаи синус ва косинус ифода менамоянд. Онҳоро исбот намоед. **3.** Формулаҳои мувофиқовариро барои кунҷҳои $\frac{\pi}{2}+\alpha$ ва $\pi-\alpha$ нависед.

653. Бо функсияи тригонометрии кунҷи α иваз намоед:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; д) $tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; ж) $ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; е) $tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; з) $ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

654. Ба намуди функсияи тригонометрии кунҷи α оред:

а) $\cos(90^0-\alpha)$; в) $tg(90^0-\alpha)$; д) $\cos(90^0+\alpha)$; ж) $tg(90^0+\alpha)$;

б) $\sin(90^0-\alpha)$; г) $ctg(90^0-\alpha)$; е) $\sin(90^0+\alpha)$; з) $ctg(90^0+\alpha)$.

655. Қимати функсияҳои зеринро ёбед:

а) $\sin 240^0$; б) $\cos(-210^0)$; в) $tg 300^0$.

656. Функсияҳои тригонометрии додашударо ба функсияҳои тригонометрии аргументи мусбати аз 45^0 хурд оред:

а) $\sin 146^0$, $\cos 132^0$, $tg 174^0$, $ctg 164^0$;

б) $\sin 665^0$, $\cos 208^0$, $tg 350^0$, $ctg 365^0$;

в) $\sin(-343^0)$, $\cos(-454^0)$, $tg(-312^0)$, $ctg(-275^0)$;

г) $\sin(-1364^0)$, $\cos(-10742^0)$, $tg(-5600^0)$, $ctg(-3000^0)$.

657. Ифодаро табдил диҳед:

а) $\dfrac{tg(180^0-\alpha)\cos(180^0-\alpha)tg(90^0-\alpha)}{\sin(90^0+\alpha)ctg(90^0+\alpha)tg(90^0+\alpha)}$;

б) $\sin^2(26^0+\alpha)+\sin^2(244^0-\alpha)+tg(113^0+\alpha)\cdot ctg(67^0-\alpha)$.

658. Ифодаро содда кунед:

а) $\cos(\alpha-90^0)+\sin(\alpha-180^0)+tg^2(180^0-\alpha)+ctg^2(\alpha-180^0)$;

б) $\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

в) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^4\alpha$; д) $(tg\alpha+ctg\alpha)^2-(tg\alpha-ctg\alpha)^2$;

г) $\dfrac{\cos\alpha\cdot tg\alpha}{\sin^2\alpha}-ctg\alpha\cdot\cos\alpha$; е) $\dfrac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha}-\dfrac{ctg\alpha}{1+ctg^2\alpha}$.

659. Ифодаҳоро табдил диҳед:

а) $ctg\left(3\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot ctg(7\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)$;

б) $\dfrac{\cos(-\alpha)\cos(180^0+\alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90^0+\alpha)}$; в) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{tg(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)}$.

660. Исбот кунед, ки:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$; в) $tg(45^0-\alpha)=ctg(45^0+\alpha)$;

б) $\cos(45^0+\alpha)=\sin(45^0-\alpha)$.

661. Ифодахоро содда кунед:

а) $\cos^2(\pi+x)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$;

б) $\sin(\pi+x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-\cos(2\pi-x)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$;

в) $\dfrac{ctg^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{ctg^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}$; г) $\dfrac{ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{1-tg^2(\alpha-\pi)}\cdot\dfrac{ctg^2(2\pi-\alpha)-1}{ctg(\pi+\alpha)}$;

д) $tg^2(\alpha-360^0)\sin^2(\alpha-270^0)+\cos^2(360^0+\alpha)$.

Машқҳо барои такрор

662. Методи фосилаҳоро истифода бурда нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $(x+8)(x-5)>0$; б) $(x-14)(x+10)<0$.

663. Ҳисоб кунед:

а) $(-3^{-3})^2\cdot 27^3$; б) $\left(2\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{8}{15}-\dfrac{5}{9}$.

664. Системаҳоро ҳал намоед:

а) $\begin{cases}x+y=5,\\ xy=4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y=10,\\ x-3y=5.\end{cases}$

665. Ғунҷоиши зарф 60 л буда, он бо кислота пур карда шудааст. Аз зарф миқдори муайяни кислотаро рехта, онро бо об пур карданд. Баъд, аз зарф боз ҳамон қадар маҳлул рехтанд. Дар маҳлули боқимондаи зарф 15 л кислота монд. Барои якум аз зарф чанд литр кислота рехтанд?

666. Барои аз майдони додашуда ғун доштани ҳосил ба бригадаи якум 12 рӯз ва ба бригадаи дуюм 75%-и ин вақт лозим аст. Баъд аз он ки бригадаи якум 5 рӯз кор карда, ба он бригадаи дуюм ҳамроҳ шуда, корро якҷоя тамом карданд. Бригадаҳо якҷоя чанд рӯз кор карданд?

§13 ДАРАҶАИ НИШОНДИҲАНДААШ РАТСИОНАЛӢ

34. Решаи дараҷаи n-ум ва хосиятҳои он

Решаи квадратӣ аз адади a ададест, ки квадраташ ба a баробар аст. Решаи дараҷаи n -ум аз адади a, ки дар ин ҷо n-адади натуралии дилхоҳи аз 1 калон мебошад, айнан ҳамин тавр муайян карда мешавад.

Т а ъ р и ф и 1. **Решаи дараҷаи n-ум аз адади a гуфта ададеро меноманд, ки дараҷаи n-уми он ба a баробар аст.**

М и с о л и 1. Решаи дараҷаи сеюм аз адади 125 ба 5 баробар аст, чунки $5^3=125$. Ададҳои 2 ва –2 решаҳои дараҷаи шашум аз адади 64 мебошанд, чунки $2^6=64$ ва $(-2)^6=64$ аст.

Мувофиқи ин таъриф решаи дараҷаи n-ум аз адади a аз ҳалли дилхоҳи муодилаи $x^n=a$ иборат аст. Функсияи $y=x^n$-ро дида мебароем. Маълум аст, ки дар фосилаи $[0;\infty)$ ин функсия дар қимати дилхоҳи n меафзояд ва тамоми қиматҳоро аз фосилаи $[0;\infty)$ қабул мекунад.

Аз тасдиқоти маълуми зерин истифода мебарем: бигзор функсияи f дар фосилаи I афзуншаванда (камшаванда) ва a қимати дилхоҳи он дар ин фосила бошад. Он гоҳ муодилаи $f(x)=a$ дар I решаи ягона дорад. Мувофиқи ин тасдиқот муодилаи $x^n=a$ барои ҳар гуна $a\in[0;\infty]$ решаи ғайриманфӣ дорад ва ин реша ягона аст. Решаро решаи арифметикии дараҷаи n-ум аз адади a меноманд ва ба намуди $\sqrt[n]{a}$ ишорат мекунанд. Адади n-ро нишондиҳандаи реша, худи адади a-ро ифодаи таҳтирешагӣ меноманд.

Т а ъ р и ф и 2. **Решаи арифметикии дараҷаи n-ум аз адади a гуфта адади ғайриманфиеро меноманд, ки дараҷаи n-уми он ба a баробар аст.**

М и с о л и 2. Решаҳои арифметикии $\sqrt[3]{27}$ ва $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$ -ро меёбем.

Ҳал. а) $\sqrt[3]{27}=3$, чунки $3^3=27$ ва $3>0$ аст; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}$, чунки $\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}$ ва $\frac{3}{2}>0$ аст.

Барои қиматҳои ҷуфти n функсияи $y=x^n$ ҷуфт аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки агар $a>0$ бошад, муодилаи $x^n=a$ ғайр аз решаи $x_1=\sqrt[n]{a}$ боз решаи $x_2=-\sqrt[n]{a}$-ро дорад. Агар $a=0$ бошад, реша ягона аст: $x=0$; агар $a<0$ бошад, ин муодила реша надорад, чунки нишондиҳандаҳои ҷуфти дараҷаҳои ҳар гуна адад адади ғайриманфӣ аст.

Инак, ҳангоми ҷуфт будани *n* ду решаи дараҷаи *n*-ум аз адади дилхоҳи мусбати *a* вуҷуд дорад; решаи дараҷаи *n*-ум аз адади *0* ба нул баробар аст; решаи дараҷаи ҷуфт аз ададҳои манфӣ вуҷуд надорад.

Мисоли 3. Муодилаи $x^4=81$ ду реша дорад: ададҳои 3 ва –3. Хулоса, ду решаи дараҷаи чорум аз 81 мавҷуданд. Дар айни ҳол $\sqrt[4]{81}$ адади ғайриманфӣ аст, яъне $\sqrt[4]{81}=3$.

Барои қиматҳои тоқи *n* функсияи $y=x^n$ дар тамоми хати рости ададӣ меафзояд, соҳаи муайянии он маҷмӯи тамоми ададҳои ҳақиқӣ мебошад. Дар асоси тасдиқоти болоӣ меёбем, ки муодилаи $x^n=a$ барои қиматҳои дилхоҳи a, аз ҷумла ҳангоми $a<0$ будан низ, расо як реша дорад. Ин решаро барои қимати дилхоҳи a (аз он ҷумла дар қимати манфии a низ) бо $\sqrt[n]{a}$ ишорат мекунанд.

Инак, ҳангоми тоқ будани *n* -решаи дараҷаи *n*-ум аз адади дилхоҳи *a* вуҷуд дорад ва ягона аст. Барои решаҳои дараҷаи тоқ баробарии $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ дуруст аст. Ҳақиқатан $\left(-\sqrt[n]{a}\right)^n=(-1)^n\cdot\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=$ $=-1\cdot a=-a$, яъне адади $-\sqrt[n]{a}$ решаи дараҷаи *n*-ум аз $-a$ мебошад. Вале чунин реша барои қимати тоқи *n* ягона, яъне $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ аст. Баробарии $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ (ҳангоми тоқ будани *n*) имконият медиҳад, ки решаи дараҷаи тоқро аз адади манфӣ ба воситаи решаи арифметикии худи ҳамон дараҷа ифода намоем. Масалан, $\sqrt[5]{-25}=-\sqrt[5]{25}$; $\sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{125}=-5$.

Барои *x*-и дилхоҳ $\sqrt[n]{x^n}=\begin{cases}|x|\text{ агар } n \text{ ҷуфт бошад,}\\ x,\text{ агар } n \text{ тоқ бошад.}\end{cases}$

Чунон, ки мо алакай медонем, решаи дараҷаи дуи ададро **решаи квадратӣ** меноманд ва нишондиҳандаи решаи 2-ро наменависанд (масалан, решаи квадратӣ аз 5 чун $\sqrt{5}$ навишта мешавад). Решаи дараҷаи сеюмро **решаи кубӣ** меноманд.

Мисоли 4. Муодилаҳои $x^5=-13$ ва $x^8=9$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Мувофиқи таърифи решаи дараҷаи *n*-ум адади *x* решаи дараҷаи панҷум аз –13 мебошад. Нишондиҳандаи реша адади тоқи 5 мебошад, бинобар ин чунин реша вуҷуд дорад ва ягона аст: $\sqrt[5]{-13}=-\sqrt[5]{13}$. Ҷавобашро ин тавр менависанд: $x=-\sqrt[5]{13}$.

Мувофиқи таърифи решаи дараҷаи *n*-ум ҳалли муодилаи $x^8=9$ адади $\sqrt[8]{9}$ мебошад. Азбаски 8-адади ҷуфт аст, $-\sqrt[8]{9}$ низ ҳалли ин муодила мебошад. Инак, $x_1=\sqrt[8]{9}$, $x_2=-\sqrt[8]{9}$. Ҷавоб: $x=\pm\sqrt[8]{9}$.

Хосиятҳои асосии решаҳои арифметикии дараҷаи n-умро баён мекунем.

Барои ҳар гуна ададҳои натуралии n ва k, ки аз 1 калонанд ва ҳар гуна ададҳои ғайриманфии a ва b баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$1^0.\ \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\quad 2^0.\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,(b\neq 0);\quad 3^0.\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a};$$

$$4^0.\ \sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k};\quad 5^0.\ \sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k.$$

Хосияти 1^0-ро исбот мекунем. Мувофиқи таъриф $\sqrt[n]{ab}$ адади ғайриманфиест, ки дараҷаи n –уми он ба ab баробар аст. Адади $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ ғайриманфӣ аст. Бинобарин $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=a\cdot b$-ро санҷидан кофист, ки он аз хосиятҳои дараҷаи нишондиҳандааш натуралӣ ва таърифи решаи дараҷаи n -ум бармеояд:

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab.$$

Се хосияти зерин ба монанди 1^0 исбот карда мешаванд:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\geq 0 \text{ ва } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\frac{a}{b};\quad \sqrt[n]{a}\geq 0 \text{ ва } \left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk}=\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k=a^k;$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\geq 0 \text{ ва } \left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk}=\left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k=\left(\sqrt[k]{a}\right)^k=a.$$

Акнун хосияти 5^0-ро исбот мекунем. Барои ин нишон медиҳем, ки дараҷаи n -уми адади $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k$ ба a^k баробар аст:

$$\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn}=\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k=a^k.$$

Мисоли 5. Ифодаҳоро табдил медиҳем:

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$; в) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; г) $\sqrt[21]{128}$; д) $\sqrt[7]{128^3}$;

Ҳал. а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{32}=2$; (хосияти 1^0) б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}$

(хосияти 2^0) в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}=\sqrt[15]{7}$ (хосияти 3^0) г) $\sqrt[21]{128}=\sqrt[21]{2^7}=\sqrt[3]{2}$

(хосияти 4^0) д) $\sqrt[7]{128^3}=\left(\sqrt[7]{128}\right)^3=2^3=8$.

6^0. Барои ададҳои дилхоҳи a ва b, ки шарти $0<a<b$-ро қонеъ менамоянд, баробарии $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ ҷой дорад.

Исбот. Баръакс фарз мекунем, ки $\sqrt[n]{a}\geq\sqrt[n]{b}$ аст. Он гоҳ мувофиқи хосияти дараҷаҳои нишондиҳандаашон натуралӣ

$(\sqrt[n]{a})^n \geq (\sqrt[n]{b})^n$, яъне $a \geq b$ мешавад. Ин ба шарти $a<b$ мухолиф аст.

Мисоли 6. Ададҳои $\sqrt[3]{2}$ ва $\sqrt[5]{3}$-ро муқоиса мекунем.

Ҳал. $\sqrt[3]{2}$ ва $\sqrt[5]{3}$ -ро ба намуди решаҳои нишондиҳандаашон якхела ифода мекунем: $\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{32}$ ва $\sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{27}$. Аз нобаробарии 32>27 ва хосияти 6[0] $\sqrt[3]{2} > \sqrt[5]{3}$ бармеояд.

Мисоли 7. Нобаробарии $x^6>20$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Ин нобаробарӣ ба нобаробарии $x^6-20>0$ баробарқувва аст. Аз методи фосилаҳо истифода мебарем. Муодилаи $x^6-20=0$ ду реша дорад: $\sqrt[6]{20}$ ва $-\sqrt[6]{20}$. Ин ададҳо хати ростро ба се фосила ҷудо мекунанд. Азбаски ҳангоми $x=0$ будан $x^6-20<0$ аст, пас фосилаи $(-\sqrt[6]{20},\ \sqrt[6]{20})$ ҳалли нобаробарӣ нест. Ҷавоб: $(-\infty; -\sqrt[6]{20}) \cup (\sqrt[6]{20}; \infty)$

? Таърифи решаи дараҷаи n-умро диҳед. 2. Решаи арифметики дараҷаи n - ум гуфта чиро мегӯянд? 3. Хосиятҳои асосии решаи арифметикиро баён кунед.

667. Ҳаққонӣ будани баробарии зеринро санҷед:

а) $\sqrt[4]{16} = 2$; б) $\sqrt[3]{-1} = -1$; в) $\sqrt[4]{625} = 5$; г) $\sqrt[12]{1} = 1$; д) $\sqrt[10]{0} = 0$; е) $\sqrt[5]{-243} = -3$.

668. Ҳисоб кунед:

а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[5]{-32}$; в) $\sqrt[4]{81}$; г) $\sqrt[3]{64}$; д) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$.

669. Содда кунед:

а) $(-\sqrt[4]{11})^4$; б) $(\sqrt[3]{7})^3$; в) $(3\sqrt[5]{-3})^5$; г) $\sqrt[7]{-3^7}$; д) $7\sqrt[8]{(-3)^8}$.

670. Ҳисоб кунед:

а) $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$; б) $\sqrt[4]{48 \cdot 27}$; в) $\sqrt[5]{160 \cdot 625}$; г) $\sqrt[3]{75 \cdot 45}$; д) $\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9}$.

671. Ададҳоро муқоиса кунед:

а) $\sqrt[3]{7}$ ва $\sqrt[6]{40}$; б) $\sqrt{5}$ ва $\sqrt[8]{500}$; в) $\sqrt[3]{4}$ ва $\sqrt[10]{87}$.

672. Муодиларо ҳал кунед:

а) $x^3=4$; б) $x^3+4=0$; в) $x^4=10$; г) $x^6=5$; д) $x^5=3$.

673. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $x^3<5$; б) $x^4<3$; в) $x^7 \geq 11$; г) $x^{10}>2$; д) $x^6>2$.

Машқҳо барои такрор

674. Содда намоед:

а) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 8^2 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2$; б) $5^3 \cdot 15^3 \cdot 25^3 \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^3$; в) $(49)^4 \cdot \left(-\frac{1}{343}\right)^4 \cdot 21^4$.

675. Ҳалли системаро ҳамчун функсияи параметри a ёбед:

а) $\begin{cases} 5ax-y=8, \\ -ax+y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x+2ay=1, \\ 5x+4ay=2. \end{cases}$

35. Дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ ва хосиятҳои он

Хосиятҳои дараҷаи адади нишондиҳандааш бутунро хотиррасон мекунем.

Барои ададҳои дилхоҳи a ва b, ададҳои бутуни ихтиёрии m ва n баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},\ a^m : a^n = a^{m-n}\ (a\neq 0),\ (a^m)^n = a^{m\cdot n},$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n,\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ (b\neq 0),\ \ a^1 = a,\ \ a^0 = 1\ (a\neq 0)$$

Агар $m>n$ бошад, ҳангоми $a>1$ будан $a^m>a^n$ ва ҳангоми $0<a<1$ будан $a^m<a^n$ аст.

Дар ин банд ба ифодаҳои намуди $2^{0,3}$, $8^{\frac{5}{7}}$, $4^{-\frac{1}{2}}$ва ғайра маъно бахшида, мафҳуми дараҷаи ададро ҳангоми адади дилхоҳи ратсионалӣ будани он муайян менамоем.

Бигузор $r=\frac{m}{n}$ адади ратсионалӣ, яъне m адади бутун ва n адади натуралӣ бошад. Қимати ифодаи $a^r=a^{\frac{m}{n}}$- ро ҳамчун ададе, ки дараҷаи n -уми он ба a^m баробар аст, яъне $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$ аст, муайян мекунем. Мувофиқи таърифи решаи дараҷаи n -ум ин чунин маъно дорад, ки адади a решаи дараҷаи n -ум аз адади a^m мебошад. Хулоса, таърифи зерин ҷой дорад.

Т а ъ р и ф. **Дараҷаи адади $a>0$-и нишондиҳандааш ратсионалии $r=\frac{m}{n}$ гуфта адади $\sqrt[n]{a^m}$-ро меноманд, ки ин ҷо m -адади бутун, ва n -адади натуралӣ (n>1) аст.**

Инак, мувофиқи таъриф $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. Дараҷаи адади 0 фақат барои нишондиҳандаҳои мусбат муайян карда шудаанд, мувофиқи таъриф барои $r>0$-и дилхоҳ $0^r=0$ аст.

М и с о л и 1. Мувофиқи таърифи дараҷаи нишондиҳандааш касрӣ: $7^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{7};\ \ 2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32};\ \ a^{-\frac{7}{15}}=\sqrt[15]{a^{-7}}$.

М и с о л и 2. Қимати ифодаҳои ададии $8^{\frac{1}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $128^{-\frac{2}{7}}$-ро меёбем.

Ҳал. Аз таърифи дараҷаи нишондиҳандааш касрӣ ва хосиятҳои решаҳо истифода карда, ҳосил мекунем:

$$8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8},\quad 8^{\frac{1}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}=2\,;\ 81^{\frac{3}{4}}=(3^4)^{\frac{3}{4}}=3^3=27\,;$$

$$128^{-\frac{2}{7}} = (\sqrt[7]{128})^{-2} = (\sqrt[7]{2^7})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

Аз таърифи дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ бармеояд, ки барои адади мусбати дилхоҳи a ва адади ратсионалии дилхоҳи r адади a^r мусбат аст.

Адади ратсионалии дилхоҳро ба намуди каср бо тарзҳои гуногун навиштан мумкин аст, чунки барои ададҳои натуралии дилхоҳи k баробарии $\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk}$ ҷой дорад. Қимати a^r низ аз шакли навишти адади ратсионалии r вобаста нест. Ҳақиқатан, аз хосиятҳои решаҳо бармеояд, ки

$$a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \left(\sqrt[nk]{a^m}\right)^k = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Ҳангоми $a<0$ будан a^r муайян карда намешавад. Инро дар мисоли зерин нишон медиҳем. Бигзор $(-8)^{\frac{1}{3}}$ дода шуда бошад. Маълум, ки он ба $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3]{2^3} = -2$ баробар мешавад. Вале, агар ба ҷои $\frac{1}{3}$ касри ба он баробари $\frac{2}{6}$ -ро гузорем $-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$ ба мухолифат омада мерасем.

Барои ададҳои ратсионалии дилхоҳи r,s ва ададҳои мусбати дилхоҳи a ва b баробариҳои зерин ҳаконианд:

1^0. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; 2^0. $a^r : a^s = a^{r-s}$; 3^0. $(a^r)^s = a^{rs}$;

4^0. $(ab)^r = a^r b^r$; 5^0. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Хосиятҳои 1^0, 3^0 ва 4^0-ро исбот мекунем. Дурустии хосияти 2^0 бевосита аз 1^0 бармеояд, чунки $a^r = a^{r-s+s} = a^{r-s} \cdot a^s$. Пас, $a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = \frac{a^{r-s}\cdot a^s}{a^s} = a^{r-s}$. Бигузор $r=\frac{m}{n}$ ва $s=\frac{p}{q}$ бошад, ки ин ҷо n ва q- ададҳои натуралӣ, m ва p ададҳои бутунанд.

$$a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = \sqrt[q]{(a^r)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{rs}$$

$$(ab)^r = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^r \cdot b^r$$

Мисоли 3. Қимати ифодаи $\left(\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}}\right) : 5^{-\frac{3}{4}}$–ро меёбем.

Ҳал. $(\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}}) : 5^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 5} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} =$

$$=\sqrt[4]{2^3}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{5}\cdot 5^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=10$$

Мисоли 4. Ифодаро табдил медиҳем:

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$; б) $\dfrac{a^{1,2}-b^{2,3}}{a^{0,8}+a^{0,4}\cdot b^{0,7}+b^{1,4}}$.

Ҳал.

$$\text{а)}\ \frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\frac{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\frac{(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{б)}\ \frac{a^{1,2}-b^{2,3}}{a^{0,8}+a^{0,4}\cdot b^{0,7}+b^{1,4}}=\frac{\left(a^{0,4}\right)^3-\left(b^{0,7}\right)^3}{\left(a^{0,4}\right)^2+a^{0,4}\cdot b^{0,7}+\left(b^{0,7}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left[a^{0,4}-b^{0,7}\right]\left[\left(a^{0,4}\right)^2+a^{0,4}\cdot b^{0,7}+\left(b^{0,7}\right)^2\right]}{\left(a^{0,4}\right)^2+a^{0,4}\cdot b^{0,7}+\left(b^{0,7}\right)^2}=a^{0,4}\cdot b^{0,7}$$

6^0. Бигузор r-адади ратсионалӣ ва $0<a<b$. Он гоҳ ҳангоми $r>0$ будан $a^r<b^r$ аст, ҳангоми $r<0$ будан $a^r>b^r$ мешавад.

7^0. Барои ададҳои ратсионалии дилхоҳи r ва s аз нобаробарии $r>s$ бармеояд, ки ҳангоми $a>1$ будан, $a^r>a^s$ аст, ҳангоми $0<a<1$ будан $a^r<a^s$ аст.

Мисоли 5. Ададҳои $\sqrt[5]{8}$ ва $2^{\frac{2}{3}}$-ро муқоиса мекунем. $\sqrt[5]{8}$-ро ба намуди дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ менависем:

$\sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$. Аз рӯи хосияти 7^0 $2^{\frac{2}{3}}>2^{\frac{3}{5}}$-ро ҳосил мекунем, чунки $\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$ аст. Инак, $2^{\frac{2}{3}}>\sqrt[5]{8}$ мешавад.

Мисоли 6. Ададҳои 2^{300} ва 3^{200}-ро муқоиса мекунем:

Ин ададҳоро ба намуди дараҷаҳои нишондиҳандаашон баробар менависем:

$2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100}$; $3^{200}=(3^2)^{100}=9^{100}$. Азбаски $8<9$ аст, пас аз рӯи хосияти 6^0 ҳосил мекунем: $8^{100}<9^{100}$, яъне $2^{300}<3^{200}$.

?

1. Таърифи дараҷаи адади нишондиҳандааш ратсионалиро диҳед. 2. Хосиятҳои дараҷаи адади нишондиҳандааш бутунро номбар кунед. 3. Хосиятҳои дараҷаи адади нишондиҳандааш ратсионалиро баён кунед.

676. Ифодаро ба намуди дарачаи нишондиҳандааш ратсионалӣ нависед:

а) $\sqrt{11}$; б) $\sqrt[3]{5^5}$; в) $\sqrt[7]{3^{17}}$; г) $\sqrt[9]{6^{21}}$; д) $\sqrt[3]{5^2}$; е) $\sqrt[3]{7^{-11}}$; ж) $\sqrt[5]{2^{-15}}$.

677. Ифодаро ба намуди реша аз адад нависед:

а) $7^{\frac{4}{7}}$; б) $4^{1,25}$; в) $3\cdot 2^{-\frac{3}{5}}$; г) $2\cdot 8^{\frac{2}{11}}$; д) $a^{\frac{3}{8}}$; е) $2b^{-\frac{2}{3}}$; ж) $b^{\frac{1}{3}}\cdot c^{\frac{2}{7}}$.

678. Қимати ифодаи ададиро ёбед:

а) $16^{\frac{5}{4}}$; б) $243^{0,4}$; в) $8^{3\frac{1}{3}}\cdot 81^{0,25}$; г) $8^{\frac{1}{2}}:\left(8^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{3}{2}}\right)$; д) $\left(\frac{27^{2}}{125^{6}}\right)^{\frac{2}{9}}$.

679. Кадоме аз ададҳои зерин калон аст:

а) $\sqrt[7]{3^3}$ ё $3^{\frac{19}{43}}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$ ё $\sqrt[7]{\frac{1}{32}}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ ё $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{3}{14}}$.

680. Ифодаро содда кунед:

а) $\frac{a-b}{a^{0,5}+b^{0,5}}$; б) $\frac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}$; в) $\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$; г) $\frac{z-8}{z^{\frac{2}{8}}+2z^{\frac{1}{3}}+z}$.

Машқҳо барои такрор

681. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x-3}$; б) $\frac{a}{x-2}=\frac{x+1}{x^2-4}$; в) $\frac{2}{x-3}=\frac{x+5}{x^2-9}$.

682. Коргар кореро дар 12,5 соат ичро карда метавонад, аммо рафиқи ӯ 0,03 қисми ин корро дар 1,5 соат ичро мекунад. Ҳамаи корро ҳар дуи онҳо якҷоя дар чанд вақт ичро карда метавонанд?

МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

Истилоҳи «тригонометрия» аз калимаи юнонӣ «тригон»-секунча ва «метрия»-чен мекунам пайдо шудааст ва дар якҷоягӣ маънои «чен кардани секунча»-ро дорад.

Дар инкишофи тригонометрия математикҳои Ҳиндустон дар асрҳои V-XII ҳиссаи муҳим гузоштаанд. Ба онҳо муносибатҳое маълум буданд, ки бо ифодаҳои ҳозира чунин навишта мешаванд: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\cos\alpha=\sin(90^0-\alpha)$

Теоремаи синусҳо аз тарафи математики ҳиндустонӣ Брахмагупай (598-660) нашр шудааст. Онро Насуруддини Тӯсӣ (1201-1274) исбот кардааст.

Назарияи тригонометрияро Ҷамшеди Кошонӣ (вафоташ с.1430) ва Алоуддини Қушчӣ (1402-1474) дар асарҳои худ низ инкишоф додаанд. Масалан, Қушчӣ барои ҳисоб кардани элементҳои секунча аз теоремаи синуси косинусҳо истифода бурдааст.

Дар расадхонаи Улуғбек (Самарқанд) Қушчӣ усули хеле саҳеҳи тартиб додани ҷадвалҳои тригонометрӣ кор карда баромада буд. Ҷадвалҳои қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ, ки аз тарафи олимони ин расадхона сохта шудаанд, чунон саҳеҳанд, ки онҳо аз ҷадвалҳои ҳозиразамон танҳо бо рақами нуҳум пас аз вергул фарқ мекунанд.

Ба туфайли асарҳои риёзидонони Осиёи Миёна тригонометрия ба фанни мустақил табдил ёфт, ки дар он на танҳо масъалаҳои геометрия, балки муносибатҳои алгебравии байни функсияҳои тригонометрӣ пайваста тадқиқ гардидаанд.

Далели равшани он тадқиқотҳои таърихшинос Браунмюл (1853-1908) шуда метавонад. Ӯ асарҳои доир ба риёзиёт навиштаи Баттонӣ, Абулвафои Бузаҷонӣ, Насуриддини Тусӣ ва олимони мактаби илмии Улуғбек-Қозизодаи Румӣ, Ҷамшеди Кошонӣ ва Алоуддини Қушчиро ба фикри он ки гӯё олимони Осиёи Миёна дар фан ягон навигарие дохил накардаанд муқобил баромада, хотиррасон мекунад, ки Насуриддини Тусӣ 200 сол пештар аз Аврупоӣ Региомонтан (1436-1476) мафҳуми тригонометрияро пешниҳод карда дар асари худ «Рисола оид ба чортарафаи пурра» ба чоп мерасонад. Истилоҳи «синус»-ро бори аввал ҳиндуҳо дохил карданд. Онҳо нисфи хордаро, ки камонро дарбар мегирад, хати синус номида ба вай номи «ҷива» дода буданд. Дар асри IX риёзидони Осиёи Миёна «ҷива»-и ҳиндуҳоро «ҷайб» тарҷума намуданд. Олимони Аврупои Ғарбӣ бошанд ба калимаи охирин «sinuc» ном гузоштаанд. Эйлер баъди якчанд аср аввалин шуда барои мухтасарӣ ба ҷои «sinuc» «sin»-ро қабул кард.

Дар асрҳои IX-XV математика дар Осиёи Миёна вобаста ба зарурияти ҳалли масъалаҳои амалии астрономия, ҷуғрофия ва геодезия тараққӣ мекард. Олимони Осиёи Миёна шаш хатти тригонометрии синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косекансро муҳокима карданд. Барои ҳалли масъалаи муайян кардани баландии офтоб астрономи араб Баттонӣ (852-929) ҷадвали на он қадар калони қиматҳои котангенсро тартиб дода буд. Астроном ва математик Абулвафои Бузаҷонӣ бо калимаҳо муносибатҳои алгебравии байни функсияҳои тригонометриро ифода карда буд, вай ҷадвали синусҳоро бо фосилаи 10 то саҳеҳи ($1:60^0$) ва инчунин ҷадвали тангенсҳоро тартиб дода аст. Бояд қайд кард, ки Абулвофои Бузаҷонӣ ва Баттониро асосгузори тригонометрия номидаанд. Ба хотири кашфиётҳои нуҷумияш ба яке аз тануроҳои Моҳ номи Абдулвафоро гузоштаанд.

Машқҳои иловагӣ ба боби IV
Ба параграфи 10

683. Ифодаро содда кунед:

а) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

б) $\dfrac{\sin^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha - 1} + tg\alpha \cdot ctg\alpha$; в) $\dfrac{\sin^2\alpha - tg^2\alpha}{\cos^2\alpha - ctg^2\alpha}$.

684. Айниятро исбот кунед.

а) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; б) $\frac{\cos^2\alpha-1}{\sin^2\alpha-1}=tg^2\alpha$

в) $(1+tg^2\alpha)\cos^2\alpha+1$; г) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{tg^2\alpha}=1$.

685. Қимати синус ва косинуси α -ро ёбед, агар:

1) $\alpha=750^0$; 2) $\alpha=1260^0$; 3) $\alpha=810^0$; 4) $\alpha=390^0$.

686. Чӣ гуна аломат доранд:

1) $\sin 181^0$; 2) $\cos 280^0$; 3) $\text{tg}175^0$; 4) $\text{ctg}358^0$; 5) $\cos(-116^0)$.

687. Қимати ифодаро ёбед:

а) $5\sin\frac{\pi}{2}+4\cos 0-3\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\pi$; б) $\sin(-\pi)-\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+2\sin 2\pi-tg\pi$;

в) $3-\sin^2\frac{\pi}{3}+2\cos^2\frac{\pi}{2}-5tg^2\frac{\pi}{4}$; г) $3\sin^2\frac{\pi}{2}-4tg^2\frac{\pi}{4}-3\cos^2\frac{\pi}{6}+3ctg^2\frac{\pi}{2}$.

Ба параграфи 11

688. Исбот кунед, ки ин баробариҳо айният мебошанд:

а) $tg^2\alpha-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\cdot tg^2\alpha$; б) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{tg^2\alpha+1}{tg^2\alpha-1}$;

в) $\frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=ctg\alpha-tg\alpha$; г) $\frac{1}{1+tg^2\alpha}+\frac{1}{1+ctg^2\alpha}=1$.

689. Чунин қиматҳои α -ро муайян намоед, ки барояш ифодаҳои зерин маъно надоранд:

а) $\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$; б) $\cos\alpha\cdot tg\alpha$; в) $\frac{ctg\,\alpha-1}{tg\,\alpha-1}$; г) $tg\alpha\cdot ctg\alpha$.

690. Ифодаро содда кунед:

а) $\sqrt{\frac{2}{1+\cos\alpha}+\frac{2}{1-\cos\alpha}}$; б) $1-\frac{\sin^2\alpha}{1+ctg\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{1+tg\alpha}$.

691. Ифодаро содда кунед:

а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-tg^2\alpha-\sin^2\alpha$; в) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-ctg^2\alpha(1+\sin^2\alpha)$;

б) $\sin^2\beta+\cos^2\beta-\frac{1}{\sin^2\beta}$; г) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-tg^2\alpha(\cos^2\alpha+1)$.

692. Айниятро исбот кунед:

а) $\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha=\cos\alpha\cdot ctg\alpha$; в) $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

б) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{ctg^2\alpha}=1$; г) $\frac{\sin a}{\cos a\cdot tg^2 a}=ctg a$.

Ба параграфи 12

693. Ифодаро содда кунед:

а) $\sin(\alpha-90^0)$; б) $\cos(\alpha-\pi)$; в) $tg(\alpha-270^0)$;

г) $ctg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; д) $tg(360^0-\alpha)\cdot ctg(180^0-\alpha)$.

694. Ифодаро содда кунед:

а) $\sin\alpha+\sin(90^0+\alpha)+\sin(180^0+\alpha)+\sin(270^0+\alpha)+\sin(360^0+\alpha)$;

б) $\cos(\alpha+40^0)+\cos(\alpha+130^0)+\cos(\alpha+220^0)+\cos(\alpha+310^0)$;

в) $\cos(90^0+\alpha)\cos(180^0+\alpha)[tg(180^0+\alpha)+tg(270^0+\alpha)]$;

г) $\sin 25^0\cos 65^0+\sin^2 115^0-\cos^2 245^0+\sin^2 295^0\cos^2 335^0$.

695. Кадомаш калон?:

а) $\sin 26^0$ ё $\cos 40^0$; б) $\sin 51^0$ ё $\cos 22^0$.

696. Айниятро исбот кунед:

а) $\sin(45^0+\alpha)=\cos(45^0-\alpha)$; б) $\cos(45^0+\alpha)=\sin(45^0-\alpha)$;

в) $\cos(45^0+\alpha)\cos(45^0-\alpha)-\sin(45^0+\alpha)\sin(45^0-\alpha)=0$;

г) $\sin 15^0+tg30^0\cos 15^0=\frac{\sqrt{6}}{3}$; д) $0{,}5(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)=\sin(30^0+\alpha)$.

697. Ифодаро содда кунед.

а) $\frac{ctg\,\alpha-1}{ctg\,\alpha+1}-ctg\,(45^0+\alpha)$; б) $\frac{3-tg^2 15^0}{3tg^2 15^0-1}$; в) $\frac{tg(45^0-\alpha)+tg\alpha}{1-tg(45^0-\alpha)+tg\alpha}$.

Ба параграфи 13

698. Ҳисоб кунед.

а) $\sqrt[3]{3^{12}}$; б) $\sqrt[3]{-1}$; в) $\sqrt[8]{255^4}$; г) $\sqrt[3]{-\frac{1}{7}}$;

д) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{24}}$; е) $\sqrt[3]{-34^3}$; ж) $\sqrt[4]{-8^7}$; з) $\sqrt[3]{343\cdot 0{,}125}$.

699. Аз хосиятҳои асосии реша истифода бурда ҳисоб кунед.

а) $\left(\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}\right):\sqrt[3]{250}$; б) $\left(\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{120}\right):\sqrt[4]{5}$;

в) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}$; г) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$.

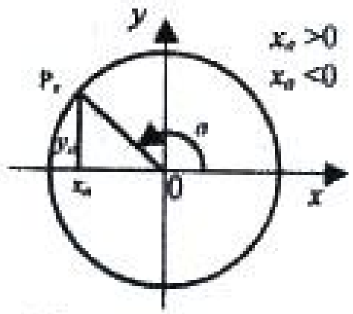
700. Ифодаро содда кунед:

а) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; б) $\frac{c-2c^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{c}-1}$; в) $\left(a^4\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}$.

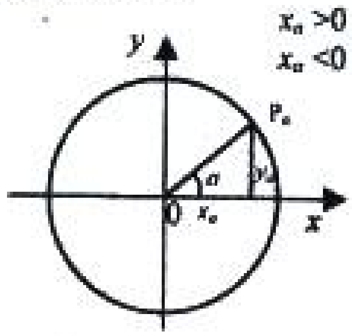
ҶАВОБҲО

593. 0,5. **594.** а) 2, –1; б) $-\frac{1}{2}$, 2; **595.** $s=\frac{3}{2}$. **596.** а) $\frac{\pi}{180}$; б) $\frac{\pi}{12}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{7\pi}{18}$; д) $\frac{2\pi}{3}$; ж) $\frac{5}{6}\pi$; з) $\frac{16}{9}\pi$; и) $\frac{7}{4}\pi$; к) $\frac{50}{9}\pi$. **597.** а) 12^0; б) $22^030'$; в) 120^0. **598.** а) Дар чоряки I: б) дар чоряки III; в) дар чоряки III. **599.** а) $(a-b)$; б) 4; в) -2; г) ифодаи додашуда муайян нест, $ctg\pi$ вуҷуд надорад. **600.** а) $\frac{7}{3}\sqrt{3}$; б) $6\sqrt{3}-2$; в) $-b$; г) $-(n+p)$.

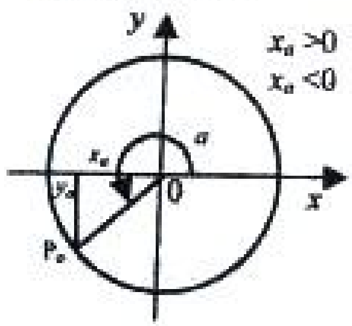
601. а) 2,5; б) 1,2; в) 0; г) $3\sqrt{3}$; д) 6; е) 6. **602.** а) $\alpha=\frac{\pi}{2}$; $\alpha=\frac{5\pi}{2}$; $\alpha=\frac{9\pi}{2}$; б) $\alpha=\frac{\pi}{2}$; $\alpha=\frac{5\pi}{2}$; $\alpha=\frac{9\pi}{2}$; в) $\alpha=\frac{\pi}{2}$; $\alpha=\frac{3\pi}{2}$; $\alpha=\frac{5\pi}{2}$. **603.** а) $\varphi=\frac{\pi}{6}$; $5\frac{\pi}{6}$; б) $\varphi=0$; 2π; в) $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$; г) $\varphi=0, \varphi=\pi, \varphi=2\pi$. **604.** а) Расми 115; б) расми 116; в) расми 117; г) расми 118.



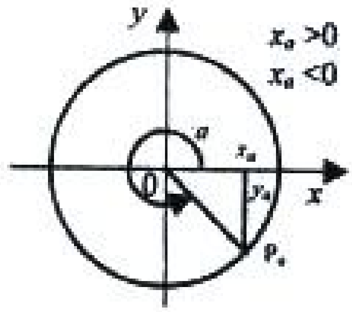
Расми 115



Расми 116



Расми 117



Расми 118

605. $\sin67^0>0$, $\cos267^0<0$, $\cos375^0>0$, $\sin(-68^0)<0$, $\cos(-68^0)>0$, $\sin2>0$ ҳосили зарб мусбат. **606.** а) $\alpha=\frac{\pi}{2}(90^0)$; $\alpha=3\frac{\pi}{2}(270^0)$; б) $\alpha=0$; $\alpha=\pi(180^0)$; $2\pi(360^0)$. **607.** а) Ҳа; б) не; в) ҳа; г) не. **608.** а) Ҳа; б) ҳа; в) ҳа. **609.** а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) 1; г) –1. **610.** а) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$; б) $6\sqrt{3}-2$; в) $-b$.

611. а) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) -1. **512.** $\frac{76a^3-8}{a^9}$. **613.** а) 47,94; б) 1,68. **614.** (8;–6), (–6;8) **615.**–1. **616.** а) (–4;4); б) $\left(-\infty;\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};\infty\right)$. **617.** P=36см; S=80см^2. **618.** 670. **619.** $\sin\alpha$-мусбат; $\cos\alpha$-мусбат; $\mathrm{tg}\,\alpha$-мусбат; $\mathrm{ctg}\,\alpha$-мусбат, б) $\sin\alpha$-мусбат; $\cos\alpha$-манфя; $\mathrm{tg}\,\alpha$-манфя; $\mathrm{ctg}\,\alpha$-манфя, в) $\sin\alpha$-мусбат; $\cos\alpha$-мусбат; $\mathrm{tg}\,\alpha$-мусбат; $\mathrm{ctg}\,\alpha$-мусбат; г) $\sin\alpha$-манфя; $\cos\alpha$-манфя; $\mathrm{tg}\,\alpha$-мусбат; $\mathrm{ctg}\,\alpha$-мусбат; д) $\sin\alpha$-манфя; $\cos\alpha$-мусбат; $\mathrm{tg}\,\alpha$-манфя; $\mathrm{ctg}\,\alpha$-манфя. **620.** а) $\sin 67^0>0$; б) $\cos 267^0<0$; в) $\cos 375^0>0$, г) $\sin(-68^0)<0$; д) $\cos(-68^0)>0$. **621.** а) $\sin 325^0<0$; б) $\cos 275^0>0$; в) $\mathrm{tg}\,420^0>0$; г) $\mathrm{ctg}\,420^0>0$; д) $\sin 25^0>0$. **622.** а) I; б) I; II; III; V, в) I; II. **623.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 0; в) $-\frac{1}{2}$; г) 0; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **624.** а) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. **625.** а) 5; б) $13\sqrt{3}$. **626.** а) $(-\infty;0)\cup(3;\infty)$; б) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(2;\infty)$. **627.** $2^2\cdot3\cdot7$. **628.** а) 205,9; б) $25\frac{34}{81}$. **629.** а) $\cos a=0,8$; $\mathrm{tg}\,\alpha=0,75$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{4}{3}$ ctg, б) $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha=-\frac{1}{5}$; $\mathrm{tg}\,\alpha=0,5$; в) $\mathrm{ctg}\,\alpha=k$, $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, $\cos\alpha=-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$. **630.** а) $\sin^2\alpha$; б) $-\cos^2\alpha$; в) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; г) $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot ctg\beta$; д) $\mathrm{ctg}^2\alpha$; е) $1+a$; ж) $1+a$; з) $-\mathrm{ctg}^2\alpha$. **631.** а) 2; б) $\frac{ctg\alpha}{1+\sin\alpha}$. **632.** а) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; б) 1; в) $\cos\alpha$; г) $0,5\sin\alpha$. **633.** а) 0,8; б) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; в) $-\frac{8}{15}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **634.** а) $\cos\alpha=0,28$; $\mathrm{tg}\,\alpha=3,4\overline{3}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=-0,29$; б) $\cos\alpha=0,6$; $\mathrm{tg}\,\alpha=-1\frac{1}{6}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=0,75$; в) $\cos\alpha=0,8$; $\mathrm{tg}\,\alpha=0,75$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=1\frac{1}{3}$; г) $\cos\alpha=-0,95$; $\mathrm{tg}\,\alpha=0,32$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=3,18$, д) $\sin\alpha=0,866$; $\mathrm{tg}\,\alpha=-1,73$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=-0,577$, е) $\sin\alpha=-0,8$; $\mathrm{tg}\,\alpha=-1\frac{1}{3}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$, ж) $\sin\alpha=0,94$; $\mathrm{tg}\,\alpha=8,6$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=-0,35$, з) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\mathrm{ctg}\,a=\frac{2}{\sqrt{5}}$. **635.** а) $3\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{2}$. **636.** а) 180; б) 48; в) 6; г) 24. **637.** 9; $\frac{1}{4}$. **638.** а) $(-\infty;6)$; б) $\left[1\frac{5}{7};\infty\right)$. **639.** (36 ва 152). **640.** а) (10; –2);

(–2;10), б) (2;1,2); (–1,2; –2). **641.** а) $-\operatorname{tg}^2\alpha$; б) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; в) $\cos^2\alpha$; г) $\frac{1}{2}\sin\alpha$. **642.** а) $\frac{2}{\sin\alpha}$; б) $\frac{2}{\cos\beta}$; в) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; г) $\frac{2}{\sin^2\beta}$; д) $\frac{1}{\sin\alpha}$; е) $\frac{1}{\sin\alpha}$. **644.** а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; б) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; в) 1. **645.** а), б), в), в), д), ҳа г) ва е) не.

в), д), ҳа г) ва е) не. **647.** а) $\sin^2\alpha$; б) $\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)^2$. **648.** $\frac{3a+1}{a+1}$ **649.** а) (–5;2); б) (6; –8); (–8;6). **650.** Нишондод $\frac{60}{20+x}+\frac{60}{20-x}=\frac{25}{4}$; **651.** $\left(\frac{10}{x}+\frac{10}{x+3}+\frac{23}{4(x+3)}=1\right)$ (24 соат ва 27 соат). **652.** а) ҳа; б) не. **653.** а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $-\sin^2\alpha$; г) $\cos\alpha$; д) $\operatorname{ctg}\alpha$; е) $-\operatorname{ctg}\alpha$; ж) $\operatorname{tg}^2\alpha$; з) $-\operatorname{tg}\alpha$ **654.** $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\operatorname{tg}\alpha$; д) $-\sin\alpha$; е) $\cos\alpha$; ж) $-\operatorname{ctg}\alpha$; з) $-\operatorname{tg}\alpha$. **655.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\sqrt{3}$. **656.** а) $\sin 34^0$, $-\sin 42^0$, $-\operatorname{tg}6^0$, $-\operatorname{ctg}14^0$, б) $-\cos 5^0$, $\cos 28^0$, $-\operatorname{tg}10^0$, $-\operatorname{ctg}4^0$; в) $-\sin 4^0$, $\operatorname{ctg}42^0$, $\operatorname{tg}5^0$; г) $\cos 14^0$, $\sin 32^0$, $-\operatorname{tg}20^0$, $\operatorname{tg}30^0$. **657.** а) 1; б) 2. **658.** а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) 1; в) $\sin^2\alpha$; г) $\sin\alpha$; д) 4; е) 0. **659.** а) $\sin\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$; в) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. **661.** а) 1; б) 1; в) 1; г) 1; д) 1. **662.** а) $(-\infty; -8)\cup(5; \infty)$; б) (–10;14). **663.** а) 27; б) $1\frac{7}{9}$. **664.** а) (1;4), (4;1); б) (4;3).

665. Нишондод $x+\frac{60-x}{60}x=40$, $x=30л$

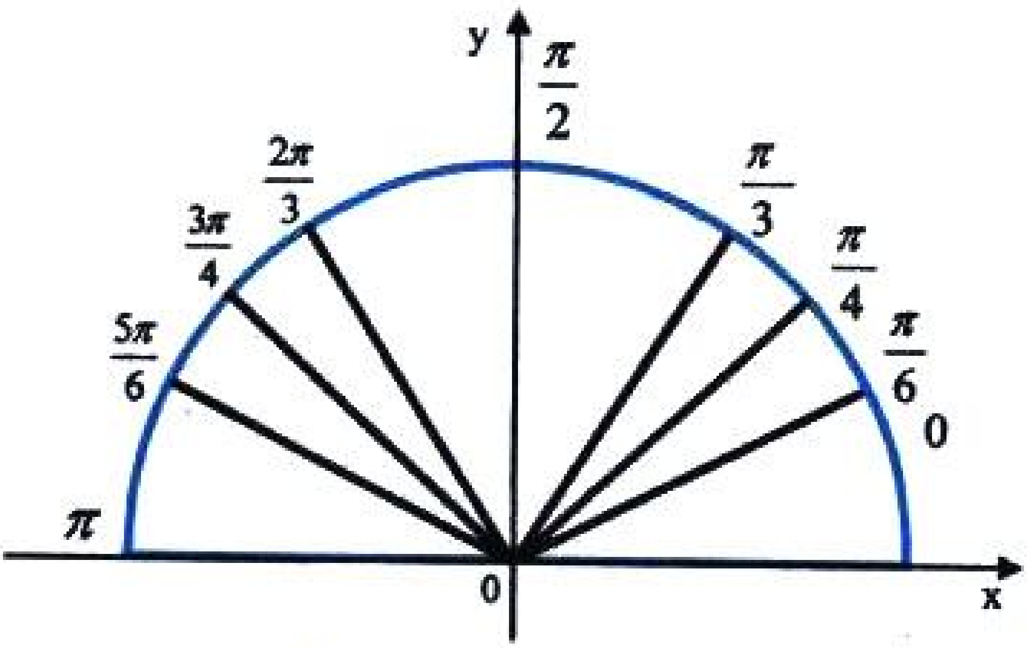
666. Нишондод. Матни масъала ба ҳалли муодилаи зерин меорад: $\frac{5}{12}+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{9}\right)x=1$. **668.** а) 3; в) 3; д) $-\frac{3}{2}$; **669.** а) 11; в) 729; д) 21; **670.** а) 6; в) 10. **673.** а) $(-\infty; \sqrt[3]{5})$; в) $(\sqrt[3]{11}; \infty)$; д) $(8; \infty)$; ж) [0;81]. **676.** а) $11^{\frac{1}{3}}$, $3^{\frac{17}{7}}$. **678.** а) 32; в) 3072; д) $\frac{9}{625}$. **680.** а) $a^{0,5}-b^{0,5}$; б) $\frac{1}{x^2+4}$; в) $a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}$; г) $z^{\frac{1}{3}}-12$.

МУНДАРИҶА

Муҳаррир Б.Алиев
Тарроҳ Абдураҳмонов Юлдош
Мусаҳҳеҳ Ҳамидов Асрор

Ба чопаш 15.11.2005 имзо шуд. Андозаи коғаз 60x90 1/16.
Коғази офсетӣ. Гарнитураи Times New Roman Tj. Чопи офсетӣ.
Ҳаҷм 14 ҷузъи чопии аслӣ. Адади нашр 60000.
Супориши №742.

Ҷамъияти саҳҳомии «Матбуот»-и Вазорати фарҳанги Ҷумҳурии Тоҷикистон.
734025, ш.Душанбе, хиёбони Рӯдакӣ, 37.



Қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ барои баъзе кунҷҳо

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Муайян нест	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\alpha$	Муайян нест	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Муайян нест

Формулаҳои мувофиқоварӣ

	Функсия / Аргумент Радиано (градусҳо)	Cos	sin	tg	ctg
1	$-\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$
2	$\frac{\pi}{2}+\alpha(90^0+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$
3	$\frac{\pi}{2}-\alpha(90^0-\alpha)$	$Sin\,\alpha$	$\cos\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$
4	$\pi+\alpha(180^0+\alpha)$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$
5	$\pi-\alpha(180^0-\alpha)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$
6	$\frac{3}{2}\pi+\alpha(270^0+\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$
7	$\frac{3}{2}\pi-\alpha(270^0-\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$
8	$2\pi+\alpha(360^0+\alpha)$	$Cos\,\alpha$	$\sin\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$
9	$2\pi-\alpha(360^0-\alpha)$	$Cos\,\alpha$	$-\sin\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$